Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Josef Zahradníček
Kyvy spřažených kyvadel torsních

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 61 (1932), No. 6, 268--275

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/109420`

Kyvy spřažených kyvadel torsních.

Josef Zahradníček.

(Došlo 10. listopadu 1931.)

Vhodnou průpravou ke kmitům elektrickým je studium kmitů mechanických s periodou pokud možno dlouhou, aby bylo možno jednotlivosti zajímavého děje vynucených kmitů přehlédnouti ve všech podrobnostech a pohodlně vykonati příslušná měření.

Spřažená kyvadla Oberbeckova v obvyklé formě mají periodu 1—2 sekundy podle délky kyvadel a z toho důvodu těžko se hodí k subjektivním měřením.[1]) Dobu kyvadel možno prodloužiti na př. na 10 sekund vhodným rozdělením hmot podél osy kyvadla. Měření na spřažených kyvadlech gravitačních v takové úpravě vykonal v našem ústavu R. Košťál a bude o nich podána zpráva později.

V následujícím budou podána měření na spřažených kyvadlech torsních prakticky netlumených s periodou asi 40 sekund. Spřažení kyvadel je silou, a to magnetickou silou Coulombovou, vzájemné působení silou Newtonovou ustupuje v tomto případě do pozadí.[2])

Aparatura je následující: Vahadlo tvoří ocelová tyčinka 30 *cm* délky, 1·3 *cm* průměru — zmagnetovaná — zavěšená na drátě ocelovém 30 *cm* délky a 0·3 *mm* průměru. Aby bylo docíleno velké doby kyvu, jsou na tyč nasunuty souměrně dvě koule olověné hmoty asi 5 *kg*. Torsní váhy jsou umístěny v dřevěné skřínce se skleněnými stěnami; rozměry skřínky jsou 36 *cm* × 21 *cm* × 17 *cm*. Hlava závěsu jest otáčivá, aby bylo možno váhy nastaviti do magnetického meridiánu. Aretace vah děje se jemným štětečkem, přibližovaným ke kouli mikrometricky z horní stěny skřínky. Závěs vah jest opatřen zrcátkem 1 *cm* průměru.

Dvoje váhy v popsané formě jsou postaveny do magnetického meridiánu na dřevěné konsole 100 *cm* × 70 *cm*, zavěšené na zdi;

[1]) A. Oberbeck, Ann. d. Phys. 34, 1041, 1888.

[2]) O kyvadlech torsních spřažených silou Newtonovou bude podána zpráva později.

vzájemná vzdálenost bližších pólů magnetických jest 20 *cm*. U jedněch vah je vzdálenost koulí stálá, a tedy stálý jest i moment setrvačnosti a doba kyvu t_1, na druhém vahadle jsou koule mikrometricky posunovatelny, aby bylo možno dobu kyvu t_2 měniti, a to v okolí hodnoty t_1. Doba kyvu — půlperioda — je měřena v té formě, že prvé váhy kývají, druhé jsou aretovány a obráceně.

Pohybové rovnice spřažených vah netlumených jsou

$$K_1\varphi'' + D_1\varphi = N_t, \quad K_2\psi'' + D_2\psi = -N_t, \tag{1}$$

kde K_1, K_2 jsou momenty setrvačnosti kývajících soustav, D_1, D_2 direkční síly, N_t otáčivý moment vlivem spřažení. V případě magnetických vahadel jsou direkční síly při známém způsobu psaní

$$D_{1,2} = M_{1,2}H\,(1 + \Theta_{1,2}).$$

V prvním přiblížení jest

$$N_t = E(\psi - \varphi), \tag{2}$$

kde konstanta E jest koeficient spřažení.

Integrály předešlých rovnic

$$K_1\varphi'' + (D_1 + E)\,\varphi = E\psi, \quad K_2\psi'' + (D_2 + E)\,\psi = E\varphi \tag{1'}$$

jsou

$$\varphi = \varphi_0 \sin(\Omega t + \varepsilon), \quad \psi = \psi_0 \sin(\Omega t + \eta); \tag{3}$$

pro frekvenci vynucených kyvů Ω plyne odtud rovnice

$$(-K_1\Omega^2 + D_1 + E)\,(-K_2\Omega^2 + D_2 + E) = E^2. \tag{4}$$

Zavedeme-li vlastní frekvence soustav ve formě Kosselově,[3]) že totiž spřažení je sice vzato v úvahu, avšak druhý systém je zabrzděn, t. j.

$$\omega_1^2 = \frac{D_1 + E}{K_1}, \quad \omega_2^2 = \frac{D_2 + E}{K_2},$$

pak předešlá rovnice má tvar

$$(\Omega^2 - \omega_1^2)\,(\Omega^2 - \omega_2^2) = \frac{E^2}{K_1 K_2}. \tag{5}$$

Odtud plyne pro frekvenci kyvů vynucených

$$\Omega^2 = \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{3} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{2}\right)^2 + \frac{E^2}{K_1 K_2}}.$$

V případě resonance $\omega_1 = \omega_2$ jest

$$\Omega^2 = \omega^2 \pm \frac{E}{K_1 K_2}, \tag{6}$$

[3]) W. Kossel, Phys. ZS. 32, 172, 1931; Zeitschr. f. Hochfr. 37, 139, 1931; viz též A. Oberbeck loc. cit. 1044.

což jest známý fakt, že totiž z obou frekvencí spřažených soustav jest jedna frekvence vyšší a druhá nižší, než původní frekvence.

Z měření frekvence ω — jeden systém kývá, druhý je zabrzděn — a měřením frekvence systémů spřažených možno určiti koeficient spřažení E. Kyvy sekundárního kyvadla jsou dány vztahem

$$\varphi = \varphi_{0,1} \sin (\Omega_1 t + \varepsilon_{11}) + \varphi_{0,2} \sin (\Omega_2 t + \varepsilon_{12}), \tag{7}$$

čili

$$\varphi = \varphi_0 \sin \left(\frac{\Omega_1 + \Omega_2}{2} t + \frac{\varepsilon_{11} + \varepsilon_{12}}{2} + \varepsilon_0 \right), \tag{7'}$$

kde

$$\varphi_0^2 = \varphi_{0,1}^2 + \varphi_{0,2}^2 \pm 2\varphi_{0,1} \cdot \varphi_{0,2} \cos [(\Omega_1 - \Omega_2)\, t + (\varepsilon_{11} - \varepsilon_{12})], \tag{8}$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon_0 = \frac{\varphi_{01} - \varphi_{02}}{\varphi_{01} + \varphi_{02}} \operatorname{tg} \left(\frac{\Omega_1 - \Omega_3}{2} t + \frac{\varepsilon_{11} - \varepsilon_{12}}{2} \right). \tag{8'}$$

Z počátečních podmínek pro kyvadlo sekundární, a to v čase $t = 0$ nechť je jeho výchylka a rychlost nulová, t. j. $\varphi = 0$, $\varphi' = 0$, plyne

$$\varepsilon_{11} = (4k + 1) \frac{\pi}{2}, \ \varepsilon_{12} = (4k + 3) \frac{\pi}{2}, \ \varepsilon_{11} - \varepsilon_{12} = (2k + 1)\, \pi,$$

$$\varphi_{01} = \varphi_{02} = \frac{\varphi_{00}}{2}, \quad \varepsilon_0 = 0 \tag{9}$$

a tedy

$$\varphi = \varphi_0 \sin \frac{\Omega_1 + \Omega_2}{2} t, \quad \varphi_0 = \varphi_{00} \sin \frac{\Omega_1 - \Omega_2}{2} t. \tag{10}$$

Kyvy sekundárního kyvadla mají výchylku φ s periodou

$$\frac{\Omega_1 + \Omega_2}{2} = \Omega_v, \tag{11}$$

jejich amplituda je periodicky proměnná, a to s periodou

$$\frac{\Omega_1 - \Omega_2}{2} = \Omega_a. \tag{12}$$

Z těchto vztahů a s použitím dřívějšího

$$\Omega_{1,2}^2 = \omega^2 \pm \frac{E}{\sqrt{K_1 K_2}}$$

vyplývá

$$\Omega_{1,2} = \sqrt{\omega^2 - \Omega_a^2} \pm \Omega_a, \ \Omega_v = \sqrt{\omega^2 - \Omega_a^2},$$
$$E = 2\, \Omega_a \sqrt{\omega^2 - \Omega_a^2} \sqrt{K_1 K_2}. \tag{13}$$

Co se týká primárního kyvadla, bereme tu jako počáteční podmínky pro jeho výchylku ψ a rychlost ψ', aby v čase $t = 0$

bylo $\psi = \psi_0$, $\psi' = 0$. Pak odvodíme z obdobných vztahů, jako byly svrchu uvedeny pro kyvadlo sekundární, podmínky:

$$\cos\eta_{11}=0,\ \cos\eta_{12}=0,\ \sin\eta_{11}=1,\ \sin\eta_{12}=\pm 1,\ \eta_{11}-\eta_{12}=k\pi. \quad (14)$$

Platí tedy pro okamžitou výchylku primárního kyvadla

$$\psi = \psi_{01}\cos\Omega_1 t \pm \psi_{02}\cos\Omega_2 t, \quad (15)$$

pro jeho proměnnou amplitudu

$$\psi_0{}^2 = \psi_{01}{}^2 + \psi_{02}{}^2 \pm 2\,\psi_{01}\psi_{02}\cos(\Omega_1 - \Omega_2)\,t, \quad (16)$$

a fázovou diferenci obou složek

$$\operatorname{tg}\eta_0 = \frac{\psi_{01}-\psi_{02}}{\psi_{01}+\psi_{02}}\operatorname{tg}\left(\frac{\Omega_1-\Omega_2}{2}t + k\frac{\pi}{2}\right). \quad (16')$$

Pohybové rovnice obou kyvadel dávají další vztahy mezi amplitudami, a to ve formě

$$\frac{\psi_{01}}{\psi_{02}} = \frac{\Omega_2{}^2-\omega^2}{\omega^2-\Omega_1{}^2},\ \frac{\varphi_{01}}{\psi_{01}+\psi_{02}} = \frac{E}{K_2(\Omega_2{}^2-\Omega_1{}^2)}. \quad (17)$$

V případě resonance — a jen tímto případem se tu zabýváme — jest v důsledku vztahu (6)

$$\psi_{01} = \psi_{02} = \frac{\psi_{00}}{2}, \quad (18)$$

t. j. stejně jako u kyvadla sekundárního a dále platí

$$\frac{\varphi_{00}}{\psi_{00}} = \sqrt{\frac{K_1}{K_2}}. \quad (19)$$

K tomuto vztahu vede též rovnice energie obou systémů.

Přenos energie z jedné soustavy do druhé je patrný ze vztahu pro energii obou spřažených systémů

$$\tfrac{1}{2}(K_1\psi'^2+K_2\varphi'^2)+\tfrac{1}{2}[(D_1+E)\,\psi^2+(D_2+E)\,\varphi^2]-E\psi\varphi=\text{const.}, \quad (20)$$

jejž získáme z pohybových rovnic obou kyvadel. Hodnota integrační konstanty je při našich podmínkách

$$t = 0\ldots\ \psi = \psi_0,\ \psi' = 0,\ \varphi = 0,\ \varphi' = 0,\ \tfrac{1}{2}(D_1 + E)\,\psi_0{}^2 = \text{const.}$$

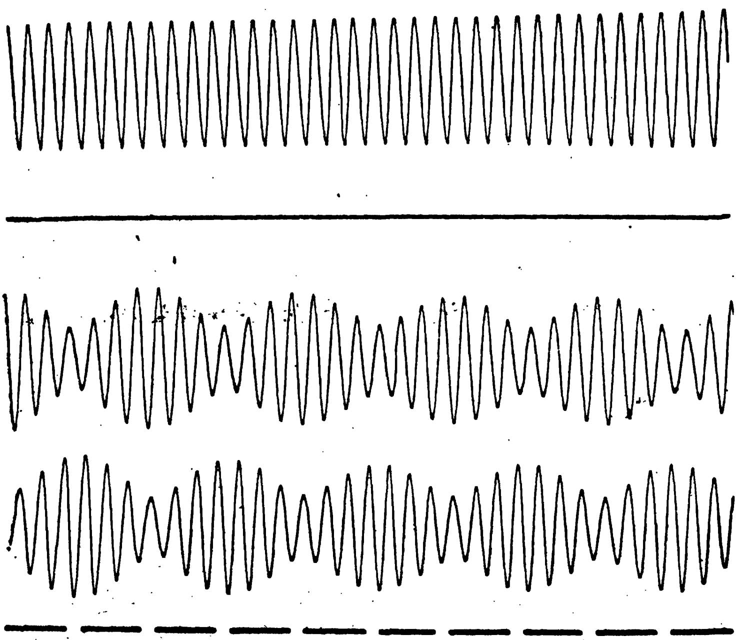
Tato počáteční energie primárního kyvadla je přenášena z primární soustavy do sekundární a obráceně. Kdykoliv v jednom systému je maximum energie a tedy i maximální výchylka na křivce amplitud, má druhý systém minimum a opačně. Jsou-li na př. krajové podmínky pro výchylky a rychlost v jednom čase $\psi = \psi_0$, $\varphi = 0$, $\psi' = 0$, $\varphi' = 0$ a v jiném čase $\psi = 0$, $\varphi = \varphi_0$,

$\psi' = 0$, $\varphi' = 0$, platí vztah již odjinud získaný

$$\left(\frac{\varphi_0}{\psi_0}\right)^2 = \frac{D_1 + E}{D_2 + E} = \frac{K_1}{K_2}. \tag{21}$$

Platnost tohoto vztahu možno verifikovati, případně z něho určiti koeficient spřažení.

Měření frekvence a koeficientu spřažení kyvadel spřažených možno provésti buď ze subjektivních pozorování dalekohledem se



Obr. 1.

škálou, anebo z autografických záznamů, zvláště tam, kde jde o měření jen orientační. Měříme pak jednak body obratu, t. j. maxima a minima křivky

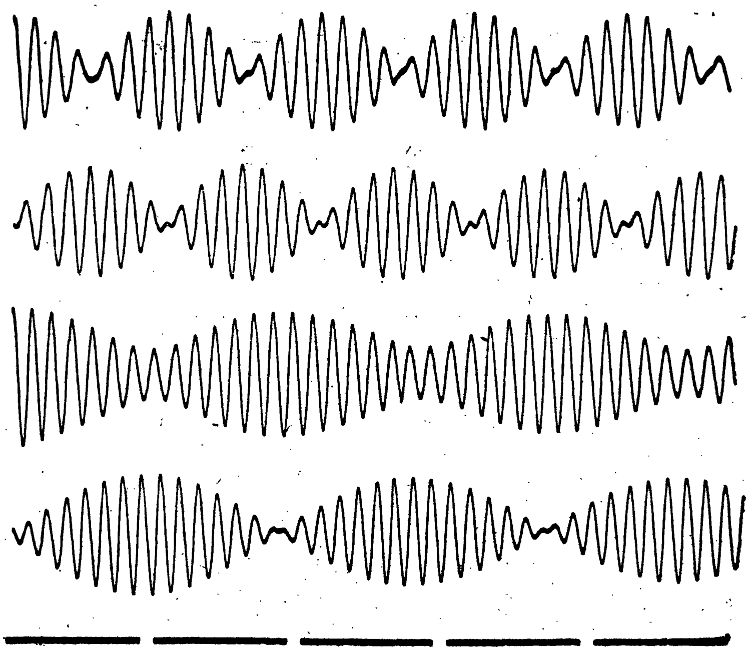
$$\varphi = \varphi_0 \sin \Omega_v t,\ \varphi_0 = \varphi_{00} \sin \Omega_a t,$$

případně

$$\psi = \psi_0 \cos \Omega_v t,\ \psi_0 = \psi_{00} \cos \Omega_a t,$$

jednak doby průchodů kyvadel polohou rovnovážnou. Při měřeních časových užíváme dvojích stopek, z nichž jedny zastavujeme a druhé současně spouštíme atd., kdykoliv vertikální vlákno nitkového kříže prochází rovnovážnou polohou. Chceme-li použíti autogramu, nutno vedle vzdálenosti válce od zrcátka[4]) znáti též otáčivou rychlost válce. Příslušnou graduaci provedeme tím způsobem, že na zrcátko klidného kyvadla pustíme světlo z lampy na dobu 4 nebo 9 minut a pak na jednu minutu světlo vypneme atd. a proměříme jednotlivé délky světelných signálů na autogramu.

Pohyb vah zaznamenává se cestou fotografickou na pruhu bromostříbrného papíru 9 *cm* × 30·5 *cm*, upevněném na auto-



Obr. 2.

grafickém válci, který poháněn hodinovým strojem se rovnoměrně otáčí — od fy Richard, Paris. Z jemné štěrbiny osvětlené 100-svíčkovou žárovkou vychází světlo a po odrazu na zrcátku vah vchází štěrbinou vodorovně orientovanou — 10 *cm* × ½ *cm* — do temné skřínky a další štěrbinou 10 *cm* × 0·3 *mm* na autografický válec. Rozměry dřevěné skřínky jsou 30 *cm* × 17 *cm* × 16 *cm*; skřínka je postavena tak, aby osa válce vodorovně upevněného byla kolmo ke směru paprsku. Rozměry válce jsou 9 *cm* a 9·3 *cm*; doba jedné otočky jest 52 minut.

[4]) V našem případě bylo A_1 = 84 *cm*, A_2 = 100 *cm*.

Ze zachycených autogramů spřažených kyvadel buďtež zde uvedeny následující ukázky — obr. 1 a 2.

a) Primární systém kývá — prakticky netlumeně— sekundární systém je zabrzděn. Oba systémy jsou v resonanci s periodami $t_1 = t_2 = t = 46{\cdot}365$ *sec.*

b) Sekundární váhy jsou uvolněny s výchylkou φ a s rychlostí $\varphi' = 0$, když primární mají výchylku maximální.

c) Sekundární váhy byly uvolněny s výchylkou $\varphi = 0$ a s rychlostí $\varphi' = 0$, když primární měly maximální výchylku. Křivka amplitud obou systémů — obálka — probíhá v tomto případě nulovou hodnotou.

d) Spřažení, jež v předešlých případech bylo podrženo stálým, bylo v tomto případě zmenšeno, a to tím způsobem, že oboje váhy byly vzájemně magneticky odstíněny — mezi skřínky vah byly vloženy čtyři tabulky plechu železného, rozměrů 20 *cm* $\times$ 20 *cm* $\times$ $\times$ 1 *mm*. Oboje váhy se poněkud rozešly, jak patrno z křivky amplitud systému primárního, jež neprochází hodnotou nulovou.

Ukázky tyto mohou býti rozmnoženy řadou dalších zajímavých autogramů za jiných podmínek počátečních, případně též za změněných konstant vah, na př. váhy sekundární mohou míti moment setrvačnosti značně menší než primární a případně s velkým útlumem.

Konstanty našich vah jsou následující: Momenty setrvačnosti vah primárních a sekundárních jsou $K_1 = 7{\cdot}968 \,.\, 10^5$ *abs. j.*, $K_2 = 1{\cdot}138 \,.\, 10^6$ *abs. j.*, direkční síly $D_1 + E = 3{\cdot}657 \,.\, 10^3$ *abs. j.*, $D_2 + E = 5{\cdot}225 \,.\, 10^3$ *abs. j.*, perioda případně frekvence v případě resonance $t_1 = t_2 = t = 46{\cdot}365$ *sec*, $\omega_1 = \omega_2 = \omega = 6{\cdot}776 \,.\, 10^{-2}$ sec^{-1}. Z autogramu a z příslušných subjektivních měření dalekohledem a stopkami určena perioda případně frekvence amplitud $T_a = 628{\cdot}2$ *sec*, $\Omega_a = 5{\cdot}001 \,.\, 10^{-3}$ sec^{-1}.

Ze vztahů svrchu uvedených (13) byly určeny frekvence a perioda pro okamžitou výchylku spřažených kyvů $\Omega_v = 6{\cdot}757 \,.\, 10^{-2}$ sec^{-1}, $T_v = 46{\cdot}50$ *sec*, koeficient spřažení $E = 645{\cdot}1$ *abs. j.*, a frekvence případně periody parciálních kyvů spřažením vzniklých $\Omega_{1,2} = 7{\cdot}257 \,.\, 10^{-2}$; $6{\cdot}257 \,.\, 10^{-2}$ sec^{-1}, $T_{1,2} = 43{\cdot}29$; $50{\cdot}21$ *sec.*

Perioda výchylky T_v může býti určena z autogramu a může tak býti zkoušena shoda pokusů s teorií; připomínám, že náš předpoklad pro vzájemný otáčivý moment vah

$$N_t = \pm E(\psi - \varphi)$$

je splněn tím spíše, čím menší jsou výchylky vah z polohy rovnovážné. Konstanta E je pak závislou jen na magnetických konstantách vah — magnetické momenty — na horizontální složce intensity zemského magnetismu a na vzdálenosti pólů.

Při podrobnějším rozboru daného případu se ukazuje, že jsou to dva koeficienty spřažení E_1, E_2. Pravé strany rovnic (1.) mají pak tvar

$$E_1\psi - E_2\varphi \text{ a } E_1\varphi - E_2\psi,$$

čímž se však další rovnice jen málo pozmění. Koeficient E_1 určí se, jak svrchu bylo naznačeno, z kyvů spřažených kyvadel, koeficient E_2 pak z výrazů pro $D_{1,2} + E_2$ t. j. z kyvů vlastních, jež koná jedno z kyvadel v silovém poli druhého, zabrzděného.

Jednoduchými prostředky možno sestaviti pokusy o spřažených kyvech magnetických kyvadel torsních ve formě následující: Na ocelovém drátě $1 - \frac{1}{2}$ *mm* tloušťky a 1 *m* délky je zavěšena ocelová tyčinka zmagnetovaná délky 40 *cm* a 1 *cm* průměru. Na tyčce jsou upevněny v proměnné vzdálenosti dvě válcové hmoty železné asi po 1 *kg*. Doba kyvu takového kyvadla jest kol 5—20 sekund. Dvě taková kyvadla zavěsíme do magnetického meridiánu ve vzájemné vzdálenosti měnitelné, aby spřažení mohlo tak býti měněno. Kyvadla nastavíme na stejnou dobu kyvu — jedno z kyvadel je vždy při tom zabrzděno.

Výhoda těchto kyvadel spřažených proti Oberbeckovým je v tom, že jsou prakticky skoro netlumená a že i těsnějším spřažením se nemění jejich rovnovážná poloha.

Fysikální ústav Masarykovy university.

V Brně v listopadu 1931.

*

Les Oscillations de deux pendules de torsion accouplés.

(Extrait de l'article précedent.)

On décrit un dispositif expérimental simple et commode au moyen duquel on peut enregistrer autographiquement les oscillations de deux systèmes accouplés, c'est à dire de deux pendules de torsion accouplés par la force magnétique. On peut changer la période d'oscillation et le couplage de ces pendules sans changement de la position d'équilibre.