Časopis pro pěstování matematiky

Recense článků a knih

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 77 (1952), No. 2, 185--189

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117142

RECENSE ČLÁNKŮ A KNIH

A) ČLÁNKY

Henry Löwig: **O transitivních Booleových relacích.** Časopis (rus.) *76* (1951), str. 225 až 228, Časopis (anglo-franc.-něm.) *76* (1951), str. 199 až 202.

Autor vychází z těchto předpokladů: Budiž B Booleova algebra (svazové spojení a průsek značíme jako součet a součin); buďte a, b, c, d její prvky. Definujme v B relaci $\boldsymbol{R}$ tak, že položíme $x\boldsymbol{R}y$, když a jen když platí

$$axy + bxy' + cx'y + dx'y' = 0.$$

Autor nyní vyšetřuje vlastnosti relace $\boldsymbol{R}$ a dokazuje zejména tyto věty:

$\boldsymbol{R}$ je ekvivalence, když a jen když $a = d = 0$ a $b = c$.

$\boldsymbol{R}$ je částečné uspořádání, když a jen když $a = d = 0$ a $b + c = 1$.

$\boldsymbol{R}$ je svazové uspořádání, když a jen když $a = d = 0$ a $b = c'$; v tomto případě definuje $\boldsymbol{R}$ dokonce Booleovu algebru. *J. Mařík*, Praha.

Julian Bonder: **O funkcích zobrazujících jedno-jednoznačně a konformně horní půlrovinu na vnějšky oblouků jistých algebraických křivek.** Časopis (rus.) *76* (1951), str. 229 až 258, Časopis (angl.-franc.-něm.) *76* (1951), str. 203 až 228.

Budiž dána n-značná algebraická funkce $\zeta = \varphi(z)$ definovaná na n-listé Riemannově ploše R_z rozložené nad komplexní rovinou z. Budiž dán jednoduchý oblouk $\widehat{AB}$ v rovině z, neprocházející žádným singulárním bodem funkce $\varphi(z)$ a takový, že se funkcí $\varphi(z)$ zobrazuje na n přímkových nebo kruhových oblouků $C^{(i)}$ $[i = 1, 2, \ldots, n]$ v rovině ζ [oblouk $\widehat{AB}$ při tomto zobrazení si představujeme vlastně jako n shodných nad sebou ležících oblouků v Riemannově ploše R_z]. Je tedy $\widehat{AB}$ oblouk jisté algebraické křivky v rovině z.

V článku je udána efektivní methoda k nalezení funkce $z = f(t)$ zobrazující jedno-jednoznačně a konformně horní půlrovinu nějaké roviny $t = r + is$ $[s > 0]$ na rovinu z, z níž je vyňatý oblouk $\widehat{AB}$.

Budiž R_t n-listá Riemannova plocha nad horní půlrovinou t, která vznikne jako obraz Riemannovy plochy R_z zobrazením $t = f^{-1}(z)$. Budiž R_t^* n-listá Riemannova plocha, která vznikne tak, že R_t doplníme o symetrický obraz plochy R_t vzhledem k reálné ose [symetrické listy podél této reálné osy slepíme]. Analytická funkce $\zeta = \varphi(f(t)) = \psi(t)$ je pak na Riemannově ploše nekonečně mnohoznačná. Dvě hodnoty ζ_1 a ζ_2 odpovídající touto funkcí $\psi(t)$ dvěma stejným hodnotám t Riemannovy plochy R_t^* jsou spolu vázány homografickou substitucí

$$\zeta_2 = \frac{a\zeta_1 + b}{c\zeta_1 + d},$$

kde koeficienty a, b, c, d závisí pouze na tom, na kterých listech plochy R_t^* a jakým způsobem překračujeme reálnou osu. Snadno se to zjistí použitím Schwarzova principu symetrie [hodnoty ζ_1 a ζ_2 jsou spolu vázány několikanásobnou inversí vzhledem ke kruhovým obloukům $C^{(i)}$].

Pro vyšetření funkce $f(t)$ použije se nyní okolnosti, že Schwarzův diferenciální parametr

$$D(\zeta)_t \equiv \frac{2\varphi'''\varphi' - 3\varphi''^2}{2\varphi'^2} = \frac{d^2}{dt^2}\left(\lg \frac{d\varphi}{dt}\right) - \tfrac{1}{2}\left[\frac{d}{dt}\left(\lg \frac{d\varphi}{dt}\right)\right]^2 = \Phi(t)$$

je pak jednoznačnou funkcí analytickou na ploše R_t^* [v některých speciálních případech lze použíti jednoduššího diferenciálního parametru] a že tedy $\Phi(t)$ je algebraickou funkcí o známém rodu a o známém počtu a řádu rozvětvovacích kritických bodů.

V článku je pak podrobněji vyšetřen případ, kdy algebraická funkce $\Phi(t)$ má rod 1. Zejména podrobně je diskutován případ, kdy AB je oblouk parabolický, eliptický, hyperbolický a oblouk křivky Cassiniho. *Vl. Knichal*, Praha.

Peter Dénes: **O diophantické rovnici** $x^{np} + y^{np} = p^m z^{np}$. Časopis (rus.) *76* (1951), str. 205 až 212, Časopis (anglo-franc.-něm.), *76* (1951), str. 179 až 186.

V dřívější práci dokázal autor, že rovnice

$$x^{np} + y^{np} = p^m z^{np}, \quad xyz \neq 0, \tag{1}$$

nemá řešení v celých racionálních číslech x, y, z, je-li $p > 3$ regulární prvočíslo, m a n přirozená čísla. Současně vyslovil domněnku, že rovnice

$$x^t + y^t = t^m z^t, \quad xyz \neq 0,$$

nemá řešení v celých racionálních číslech x, y, z, jsou-li t a m přirozená čísla, $t > 3$.

Tento svůj výsledek týkající se řešitelnosti rov. (1) celými racionálními čísly rozšiřuje nyní autor i na některá iregulární prvočísla p. Budiž proto p iregulární prvočíslo a budiž $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{p}}$. Těleso p-tých odmocnin z jedné označme si $k(\zeta)$. O prvočísle p činí autor tyto předpoklady:

I. Druhý faktor počtu tříd tělesa $k(\zeta)$ je nesoudělný s p.

II. Žádné Bernoulliho číslo B_{rp} $\left(r = 1, 2, \ldots, \frac{p-3}{2}\right)$ není dělitelno číslem p^3.

Výsledek, ke kterému autor dospívá, je shrnut ve větu:

Je-li p iregulární prvočíslo splňující podmínky I a II, n, m přirozená čísla, $m \neq 3$, pak rovnice (1) nemá žádné řešení v celých racionálních číslech.

Vl. Kořínek, Praha.

Štefan Schwarz: **O pologrupách majících jádro.** Časopis (rus.) *76* (1951), str. 259 až 301, Časopis (angl.-franc.-něm.) *76* (1951), str. 229 až 264.

V této práci autor navazuje po stránce methodické na svou nedávnou práci: Структура простых полугрупп без нуля a zobecňuje řadu výsledků své dřívější práce: Téoria pologrup, Sborník prác Prírodovedeckej fak. Slov. univerzity, č. 6. 1943, 1—64 a rozšiřuje je z komutativních pologrup na nekomutativní. Vychází při tom z prací *Suškeviče*, *Reese* a *Clifforda*.

Má-li pologrupa S minimální dvojstranné ideály, pak má jen jeden a ten se nazývá jádro (Suškevič). V práci je jádro označováno písmenem $\mathfrak{n}$. Št. Schwarz studuje v práci pologrupy mající jádro. K tomu cíli si definuje jednoduchou pologrupu poněkud jinak než to činí Rees a Clifford. Je to pologrupa S, která nemá mimo jádro již žádný jiný dvojstranný ideál $\neq S$. Ve shodě s tím si definuje jednoduchý levý (pravý, dvojstranný) ideál jako ideál, který obsahuje $\mathfrak{n}$, neobsahuje však již žádný jiný levý (pravý, dvojstranný) ideál obsahující $\mathfrak{n}$. Tyto definice souhlasí s definicemi Reese a Clifforda jen v případě, že pologrupa S má nulu, která pak tvoří jádro.

V podstatě se jedná v práci o tyto dvě hlavní otázky:

I. Jaká je struktura jednoduchých levých neb dvoustranných ideálů a jaká je struktura jednoduchých pologrup.

2. Ve kterých případech a jakým způsobem lze převésti studium obecné pologrupy s jádrem na studium jednoduchých pologrup.

Ukázalo se užitečným zavésti při vyšetřování pojem $\mathfrak{n}$-potentní množiny a pojem radikálů. Budiž M část pologrupy S. Tato část se nazývá $\mathfrak{n}$-potentní, existuje-li přirozené číslo ϱ takové, že $M^{\varrho} \subseteqq \mathfrak{n}$ (ve smyslu násobení komplexů). Nejmenší takové ϱ nazývá Schwarz index $\mathfrak{n}$-potence. Sjednocení všech $\mathfrak{n}$-potentních dvoustranných ideálů nazývá Schwarz radikál $\mathfrak{r}$ pologrupy. Je to zřejmě opět dvoustranný ideál. V $\mathfrak{r}$ jsou pak obsaženy i všechny $\mathfrak{n}$-potentní levé a pravé ideály. S je pologrupa bez vlastního radikálu, když $\mathfrak{r} = \mathfrak{n}$, t. j. když neexistuje v S $\mathfrak{n}$-potentní ideál obsažnější než $\mathfrak{n}$.

Hlavní výsledek o struktuře jednoduchých levých ideálů je tento: 1. Budiž S pologrupa s jádrem, která má aspoň jeden jednoduchý levý ideál. Pak každý jednoduchý levý ideál z S, který obsahuje aspoň jeden idempotent neležící v $\mathfrak{n}$, je sjednocení disjunktních navzájem isomorfních grup a jedné $\mathfrak{n}$-potentní pologrupy s indexem $\mathfrak{n}$-potence 2. Všechny grupy z rozkladu jakéhokoli takového jednoduchého levého ideálu jsou navzájem isomorfní. Hlavní výsledek o struktuře jednoduché pologrupy je tento: 1. Budiž S jednoduchá pologrupa s jádrem, která má aspoň jeden jednoduchý levý ideál. Nechť S obsahuje aspoň jeden idempotent, který neleží v jádru. Pak S je sjednocení dvou disjunktních množin $S = \mathfrak{G} + \mathfrak{p}$. $\mathfrak{G}$ je sjednocení disjunktních isomorfních grup a $\mathfrak{P}$ sjednocení $\mathfrak{n}$-potentních pologrup s indexem $\mathfrak{n}$-potence 2. Průnik všech pologrup z $\mathfrak{P}$ je $\mathfrak{n}$. O jednoduchých dvoustranných ideálech dokazuje autor několik vět, z nichž uvádím: Budiž S pologrupa s jádrem $\mathfrak{n}$. Budiž M jednoduchý dvoustranný ideál v S takový, že $M^2 \neq \mathfrak{n}$. Pak M je jednoduchá pologrupa s jádrem $\mathfrak{n}$ a každý jednoduchý levý ideál z M je i jednoduchým levým ideálem v S. Obráceně, každý jednoduchý levý ideál $L^{(s)}$ z S, takový, že $L^{(s)} \cap M \cap \mathfrak{n}$, je jednoduchým levým ideálem v M a tedy $L^{(s)} \subseteqq M$.

V posledních dvou paragrafech práce studuje autor jednak pologrupy bez vlastního radikálu, které mají poměrně přehlednou strukturu, jednak pologrupy s vlastním radikálem, které jsou složitější, o nichž však odvozuje řadu zajímavých vlastností. *Vl. Kořínek*, Praha.

B) KNIHY

И. О. Натансон: **Теория функций вещественной переменной.** (*I. O. Natanson*: **Theorie funkcí reálné proměnné.**) Gostechizdat, Moskva-Leningrad, 1950, 400 str., náklad 10 000, cena 16,40 rublů.

Theorie funkcí reálné proměnné je nauka, která vznikla ve druhé pol. XIX. stol. z nutnosti položit základy analyse. Vytvoření theorie funkcí reálné proměnné bylo zahájeno, když se objevilo přesné učení o reálném čísle, vyložené v theorii *Dedekindově* a *Kantorově*. Hned za tím se objevil v matematice pojem nekonečné množiny, mocnosti (čili „počtu“ prvků) nekonečné množiny. Na tomto základě jsou podrobně vyšetřovány a dále zobecňovány pojmy limity, konvergence, funkce a dále pojmy derivace a integrálu. Vyšetřování derivace a integrálu je úkolem metrické theorie funkcí reálné proměnné. Sem také patří otázky spojené s rozličnými vyjádřeními funkcí, speciálně s otázkou vyjádření funkce ve tvaru součtu trigonometrické řady. Jiná větev, věnovaná studiu bodových množin a nespojitých funkcí a směřující k podrobnému vyšetření struktury číselné přímky, se jmenuje deskriptivní theorie množin.

Methody theorie funkcí reálné proměnné se ukázaly být užitečné nikoliv pouze v otázkách fundace analysy.

Užití myšlenek theorie funkcí na geometrii vedlo ke vzniku nové discipliny geometrie — topologie, v níž byly podrobeny hlubokému rozboru pojmy prostoru a spojitého zobrazení. V důsledku užití method funkcí na vyšetřování diferenciálních rovnic vznikla kvalitativní theorie diferenciálních rovnic, zkoumající charakter průběhu křivek, definovaných obyčejnými diferenciálními rovnicemi.

Konečně velmi důležitým odvětvím moderní matematiky, vzniknuvším v důsledku spojení method theorie funkcí a klasické analysy, je funkcionální analysa. Zahrnuje celou řadu otázek souvisících s rovnicemi matematické fysiky a má velký význam pro problémy současné theoretické fysiky.

Řada významných výsledků z oblasti theorie funkcí byla nalezena sovětskými matematiky. Vedoucí místo ve světovém rozvoji theorie funkcí má sovětská škola, jejímž zakladatelem je vynikající ruský matematik *N. N. Luzin.*

Recensovaná kniha je kursem theorie funkcí reálné proměnné, a to hlavně metrické theorie funkcí a mající sloužit jako učebnice pro studenty vyšších ročníků a aspiranty matematických fakult na universitách.

V knize je se značnou úplností vyložena metrická theorie funkcí jedné proměnné a objasněny základní otázky metrické theorie funkcí několika proměnných. Mimo to jsou vyšetřovány elementární otázky deskriptivní theorie funkcí (transfinitní čísla a Bairova klasifikace). V kapitole XVI jsou uvedeny některé výsledky z funkcionální analysy. Sluší poznamenati, že práce *I. P. Natansona* je v ruské literatuře prvním kursem theorie funkcí reálné proměnné, obsahující tak rozsáhlý materiál. Jeho výběr je v podstatě proveden zdařile. Místy jsou však dotčena velmi speciální themata, která mohla být bez velké újmy vypuštěna, zatím co některé základní otázky theorie funkcí nejsou vyloženy vůbec. Tak na př. kapitola o singulárních integrálech (tištěna petitem) má velmi speciální charakter. Část této kapitoly, vztahující se k trigonometrickým rozvojům, bylo by lépe vyložit nezávisle na theorii singulárních integrálů. Vůbec otázky, týkající se trigonometrických rozvojů, jsou v knize roztroušeny v kapitole VII a X. Měla by se jim věnovat zvláštní kapitola. V theorii trigonometrických řad čtenář také najde některé velmi speciální věty, při čemž není vyložena řada základních. Na př., když vyjádřil součet S_n Dirichletovým integrálem, autor se vůbec nezdržuje u otázky konvergence Fourierových řad, dokonce ani neuvádí, co je zde známo a co je otevřenou otázkou a přímo, odkázav čtenáře ke knize Zygmundově, přejde k otázce sčítání Fourierových řad Cesarovou methodou.

Bylo by třeba v knize uvést byť i úplně stručný výklad o Denjoyově integrálu. Formulace problému vyhledání primitivní funkce je vyložena podrobně a dobře; v kapitolách V a IX je dokazována věta o primitivní funkci integrovatelné derivace. O úplném řešení problému je řečena pouze jedna věta na konci § 7.

Je třeba si přát lepší způsob výkladu. I když důkazy jednotlivých vět jsou ve většině případů podány prostě a jednoduše, kniha, jak už bylo řečeno, je přeplněna maličkostmi, které jsou postaveny do jedné řady se základními větami theorie funkcí. To se ještě stupňuje tím, že mnohé základní věty, na př. věta Kantor-Bernštejnova (str. 26), Bairova věta o funkcích prvé třídy (str. 341) a některé jiné jsou autorem rozděleny na několik menších, což naprosto ztěžuje osvojení obsahu a method důkazu.

Věta Borel-Lebesgueova (kap. II) o pokrytích je v jedné řadě s naprosto nevýznamnými větami. Formulace některých vět jsou oslabeny. Tak ve formulaci věty D. F. Jegorova (str. 90) je řečeno: „Existuje taková měřitelná množina...“, ačkoli důkaz není o nic obtížnější, jestliže nahradíme slovo „měřitelná“ slovem „dokonalá“. Věta N. N. Luzina o struktuře měřitelných funkcí je dokázána neúplně. Současně není zdůrazněna ta okolnost, že C je vlastnost, nikoliv jen nutná, nýbrž i postačitelná k měřitelnosti funkce. Kromě toho se zde čtenář opět setkává s rozdrobením důkazů na několik samostatných vět.

Výklad theorie míry je přecpán dokazováním očividných faktů, které by bylo možno přenechat čtenáři. Některé věty se dokazují odděleně pro míry otevřených a míry uzavřených množin a potom se už uvádí obecná definice míry a tytéž věty se dokazují pro obecný případ.

Neobratně je dokazována podmínka integrovatelnosti (R), která může být lehce získána jednoduchým odhadem.

Druhý paragraf kapitoly XVI je věnován pojmu kompaktnosti. Avšak autor se vůbec nezdržuje u pojmu kompaktního prostoru, a bezprostředně uvádí pojem „kompaktní množiny", a chápe pod ním to, co se ve funkcionální analyse nazývá „množinou kompaktní v daném prostoru". Taková definice může vést k záměně pojmu kompaktnosti s týmž pojmem, známým z geometrické theorie množin. Měl by se zavést pojem kompaktního prostoru, a potom zdůraznit, že kompaktnost nebo nekompaktnost množiny bezprostředně závisí na struktuře prostoru, ve kterém je tato množina definována.

Uvedeme ještě řadu nedostatků při výkladu některých otázek, souvisících se základy matematiky v kapitole XIV. Na str. 323 autor „dokazuje" princip úplné indukce. To dělá několika slovy, při čemž se autor opírá o úplnou uspořádanost přirozené řady, jež je dokázána na str. 318. Poslední důkaz se opírá o lemma, které říká, že v uspořádané konečné množině A je prvý prvek.

Autor postupně vybírá prvky z A a poznamenává, že jestliže některý zvolený prvek a z A není prvý, pak možno z A vybrat prvek a^1, předcházející a, a potom ukazuje, že nekonečnost tohoto procesu je ve sporu s konečností množiny A. Avšak proces vyjmutí nekonečné posloupnosti prvků z A, jestliže má být proveden podrobně, se opírá o princip úplné indukce. Tak dostáváme circulus vitiosus. Princip úplné indukce a tvrzení o úplné uspořádanosti přirozené řady, při známých podmínkách, jsou ekvivalentními axiomy a proto nemohou být oba dokázány.

Na str. 328 autor formuluje Zermelův axiom a říká, že tento axiom vyvolává velké spory, avšak nevyjasňuje příčiny těchto sporů a omezuje se na větu: Autor této knihy stojí na stanovisku bezvýhradného uznání Zermelova axiomu. Dotýkaje se otázky přípustnosti Zermelova axiomu bylo by třeba, byť i krátce, se pozastavit u gnoseologických nesnází s ním spojených, uvést některé důvody jak pro, tak i proti jeho uznání.

Na str. 322 jsou úvahy o „zákonitosti" množin, avšak není jasno co tím autor myslí. Jak se zdá, autor ztotožňuje zákonnost s bezespornosti. Avšak potom jsou these jím vyslovené v poznámce pod čarou o zákonných množinách nesprávné.

V kapitole XVII věnované úloze ruských vědců v rozvoji theorie funkcí reálné proměnné, není dostatečně vylíčen význam sovětské školy theorie funkcí, vzniknuvší pod vedením *N. N. Luzina* — školy, která během více než 30 let hraje vedoucí úlohu v rozvoji theorie funkce reálné proměnné. V knize je prostě poznamenáno, že tato škola má první místo ve světě, avšak není vůbec řečeno a vyjasněno její vědecké zaměření. Zatím však vyložený materiál to umožňuje. Autorem podané vylíčení úspěchů sovětských matematiků v oblasti theorie funkcí je pouhým výčtem výsledků bez jakékoliv souvislosti mezi sebou a přitom daleko ne úplným. Prvý paragraf této kapitoly — o deskriptivní theorii množin — je velmi krátký a schematický. Neuvádí řadu podstatných výsledků, není upozorněno na souvislosti mezi deskriptivní theorií množin a otázkami základů matematiky. Paragrafy 2 a 3, týkající se metrické theorie funkcí, jsou napsány značně lépe a podrobněji. Základní výsledky metrické theorie funkcí jsou podány s dostatečnou jasností. Autor dokonce vykládá celou řadu podružných výsledků, takže bije do očí rozdíl s popisem výsledků sovětských vědců v deskriptivní theorii množin, kde nejsou uvedeny některé podstatné výsledky.

Je třeba podotknout, že na jiných místech knihy jsou práce sovětských vědců vyloženy dostatečně úplně.

Velkou předností monografie je to, že jsou v ní úlohy, uvedené na konci každé z prvých jedenácti kapitol. Řešení těchto úloh pomůže čtenáři ovládnout methody metrické theorie funkcí.

Recensovaná práce obsahuje velký a zajímavý materiál z theorie funkcí reálné proměnné. Nehledě na existující nedostatky, jediná v ruské literatuře dává takový úplný výklad metrické theorie funkcí. Otázky deskriptivní theorie množin a zvláště otázky vztahující se k základům matematiky, jsou vyloženy v knize neuspokojivě a jejich studium z této knihy není užitečné.

L. V. Keldyš, P. S. Novikov. — Přeložil *O. Vejvoda*, Praha.