Alois Švec

Poznámka o tensoru torse trojdimensionálního prostoru s eukleidovskou konexí

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 84 (1959), No. 1, 46--49

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117299

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 84 (1959), Praha

POZNÁMKA O TENSORU TORSE TROJDIMENSIONÁLNÍHO PROSTORU S EUKLEIDOVSKOU KONEXÍ

ALOIS ŠVEC, Praha

(Došlo dne 19. listopadu 1957) DT: 513.723.6

V práci je studována plocha trojdimensionálního prostoru s eukleidovskou konexí. Je nalezena modifikace věty, podle níž na ploše eukleidovského prostoru jsou hlavní křivky vyťaty rozvinutelnými plochami kongruence normál, čímž je nalezen význam tensoru torse.

1. Buď dán prostor s eukleidovskou konexí E_3 základními rovnicemi (ve smyslu Cartanově)

$$\mathrm{d}M = \omega^i I_i\,, \quad \mathrm{d}I_i = \omega_i^j I_j\,, \tag{1}$$

$$\omega^i = \Gamma_j^i\,\mathrm{d}u^j\,, \quad \omega_i^j = \Gamma_{ki}^j\,\mathrm{d}u^k\,, \quad \omega_i^j + \omega_j^i = 0\,, \tag{2}$$

kde $i, j, k, \ldots = 1, 2, 3$. Rovnice struktury píši ve tvaru

$$\begin{aligned} [\mathrm{d}\omega^i] &= [\omega^j\omega_j^i] + S_{rs}^i[\omega^r\omega^s]\,, \quad S_{(rs)}^i = 0\,, \\ [\mathrm{d}\omega_i^j] &= [\omega_i^k\omega_k^j] + \tfrac{1}{2}R_{rsi}^j[\omega^r\omega^s]\,, \quad R_{(rs)i}^j = 0\,, \end{aligned} \tag{3}$$

kde S_{rs}^i resp. R_{rsi}^j je tensor torse resp. křivosti. V prostoru E_3 uvažuji plo chu π jež je dána rovnicí

$$\omega^3 = 0\,. \tag{4}$$

Vnějším diferencováním vychází

$$[\omega^1\omega_1^3] + [\omega^2\omega_2^3] + 2S_{12}^3[\omega^1\omega^2] = 0\,, \tag{5}$$

Cartanovo lemma dává

$$\omega_1^3 = a\omega^1 + (b - S_{12}^3)\,\omega^2\,, \quad \omega_2^3 = (b + S_{12}^3)\,\omega^1 + c\omega^2\,. \tag{6}$$

Dalším vnějším diferencováním (5) vychází

$$[\mathrm{d}S_{12}^3\,\omega^1\omega^2] = 0\,, \tag{7}$$

takže S_{12}^3 je invariant, v dalším bude udán jeho geometrický význam. Vnějším diferencováním (6) dostávám konečně

$$\begin{aligned} [(\mathrm{d}a - 2b\omega_1^2)\,\omega^1] + [(\mathrm{d}b - a\omega_2^1 - c\omega_1^2)\,\omega^2] + (.)[\omega^1\omega^2] = 0\,, \\ [(\mathrm{d}b - a\omega_2^1 - c\omega_1^2)\,\omega^1] + [(\mathrm{d}c - 2b\omega_2^1)\,\omega^2] + (.)[\omega^1\omega^2] = 0\,, \end{aligned} \tag{8}$$

čili

$$\delta a = 2be_1^2, \quad \delta b = ae_2^1 + ce_1^2, \quad \delta c = 2be_2^1. \tag{9}$$

Snadno se verifikuje, že *na π jsou invariantní formy*

$$\varphi_1 = \mathrm{d}s^2 = (\mathrm{d}A)^2 = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2, \tag{10}$$

$$\varphi_2 = I_3\, \mathrm{d}^2A = \omega^1\omega_1^3 + \omega^2\omega_2^3 = a(\omega^1)^2 + 2b\omega^1\omega^2 + c(\omega^2)^2, \tag{11}$$

$$\varphi_3 = \mathrm{d}I_3^2 = (\omega_1^3)^2 + (\omega_2^3)^2. \tag{12}$$

Forma (10) je *metrická forma plochy*; geometrická interpretace formy φ_2 je táž, jako pro plochu v eukleidovském prostoru: Na π buď dána křivka γ, nechť γ' je její rozvinutí do lokálního prostoru bodu $M_0 \in \gamma$, pak průmět jejího vektoru křivosti $k\nu = \dfrac{\mathrm{d}^2B}{\mathrm{d}s^2}$ do normály plochy má délku $\varphi_2 : \varphi_1$. Složitější je interpretace formy φ_3. Buď γ křivka plochy π bodem M_0, daná rovnicemi $u^i = u^i(t)$, $t_1 \leqq t \leqq t_2$. Vektor $I_3(t)$ lokálního prostoru v bodě M_0 nechť vznikne přenosem jednotkového vektoru $I_3(t)$ normály plochy v bodě $M(u^i(t))$ do bodu M_0 podél oblouku křivky γ mezi t_0 a t; křivku $N = M_0 + I_3(t)$ nazvu *sférickým obrazem* γ_s křivky γ. Její délka je právě $\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\varphi_3}$.

2. Shodně s případem plochy v eukleidovském prostoru definuji *normální křivost* křivky na π formulí

$$k_n = -\frac{\varphi_2}{\varphi_1}. \tag{13}$$

Hlavní křivky, tj. křivky s extremální hlavní křivostí, *mají rovnici*

$$b(\omega^1)^2 + (c - a)\, \omega^1\omega^2 - b(\omega^2)^2 = 0. \tag{14}$$

V každém bodě plochy jsou buď dva kolmé hlavní směry (reálné) nebo každý směr je hlavní (tyto plochy vyloučím z dalšího studia). Repery specialisuji tak, že hlavní křivky jsou $\omega^1\omega^2 = 0$, pak $b = 0$ a normální křivost křivky $\omega^1 = 0$ resp. $\omega^2 = 0$ je ${}^2k = -c$, resp. ${}^1k = -a$. *Eulerova křivost* plochy π je $K = {}^1k\,{}^2k = ac$, *střední křivost* $H = {}^1k + {}^2k = -(a + c)$, známý vztah mezi třemi základními formami plochy v eukleidovském prostoru je pak nahrazen rovnicí

$$(K - (S_{12}^3)^2)\varphi_1 + H\varphi_2 + \varphi_3 - 2S_{12}^3({}^1k - {}^2k)\, \omega^1\omega^2 = 0. \tag{15}$$

Na ploše v eukleidovském prostoru jsou hlavní křivky vyťaty rozvinutelnými plochami kongruence normál, zjistím modifikaci této věty v uvažovaném obecnějším případě. Řeknu, že normály plochy π podél její křivky γ tvoří rozvinutelnou plochu, jestliže platí následující: Na γ buď zvolen bod M_0, normála n v bodě $M \in \gamma$ buď pomocí dané konexe přenesena po γ do lokálního prostoru bodu M_0 do přímky n', souhrn přímek n' je pak rozvinutelná plocha; zřejmě nezáleží na volbě bodu M_0 na γ. Tvoří-li normály podél γ rozvinutelnou plochu, pak zřejmě na každé existuje bod $F = M + zI_3$ tak, že rozvinutí křivky (F) do lokálního prostoru libovolného bodu $M_0 \in \gamma$ je bod nebo křivka, jejíž tečna v bodě $F_0 = M_0 + z_0(I_3)_0$ prochází bodem M_0; musí tedy býti $dF \equiv 0 \pmod{I_3}$, kde se diferencuje podél γ. Je

$$dF \equiv \Omega^i I_i = (\omega^1 + z\omega_3^1)\, I_1 + (\omega^2 + z\omega_3^2)\, I_2 + dz\, I_3 \, .$$

Z $\Omega^1 = \Omega^2 = 0$ vychází vyloučením z rovnice sítě, v níž rozvinutelné plochy kongruence normál protínají plochu:

$$\omega^1\omega_2^3 - \omega^2\omega_1^3 \equiv S_{12}^3(\omega^1)^2 - ({}^2k - {}^1k)\, \omega^1\omega^2 + S_{12}^3(\omega^2)^2 = 0 \, . \tag{16}$$

Pro úhel α těchto tzv. *torsálních křivek* se snadno nalezne

$$S_{12}^3 = \tfrac{1}{2}|{}^1k - {}^2k| \cos\alpha \, , \tag{17}$$

což dává geometrickou interpretaci složky tensoru torse S_{12}^3; S_{12}^3 nazývám *torsí* plochy π.

Buď nyní obecně dána plocha, jejíž tečná rovina je určena vektory $J_a^* = \alpha_a^j I_j$, kde $a = 1, 2$ a J_1^*, J_2^* jsou jednotkové navzájem kolmé vektory; vypočítám její torsi. Provedu-li změnu lokálních basí prostoru E_3 tak, že nové vektory base budou $J_i = \alpha_i^j I_j$ a vektory J_1, J_2 se na uvažované ploše shodují s uvažovanými vektory J_1^*, J_2^*, bude torse nutně $\overline{S}_{11}^3$, kde $\overline{S}_{jk}^i$ je tensor torse, jehož složky jsou počítány při lokálních basích J_i. Buď $\|\tilde{\alpha}_i^j\|$ matice inversní k orthogonální matici $\|\alpha_i^j\|$, pak je znám transformační zákon pro složky tensoru torse

$$\overline{S}_{jk}^i = \tilde{\alpha}_m^i \alpha_j^n \alpha_k^p S_{np}^m \, , \tag{18}$$

takže *torse plochy* je

$$\overline{S}_{12}^3 = \tilde{\alpha}_m^3 \alpha_1^n \alpha_2^p \alpha S_{np}^m \, . \tag{19}$$

Резюме

ЗАМЕЧАНИЕ О ТЕНЗОРЕ КРУЧЕНИЯ ТРЕХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА С ЕВКЛИДОВОЙ СВЯЗНОСТЬЮ

АЛОИС ШВЕЦ (Alois Švec), Прага

(Поступило в редакцию 19/XI 1957 г.)

Пусть в трехмерном пространстве с евклидовой связностью (1)—(3) дана поверхность (4)—(6). На этой поверхности геометрически интерпретируются три основные формы (10)—(12), связанные между собою соотношением (15). Составляющая тензора кручения S_{12}^3 (т. наз. кручение поверхности) является инвариантом и дана геометрически уравнением (17), где α есть

угол между кривыми (16), в которых поверхность пересекается с развертывающимися поверхностями конгруэнции нормалей, а ^{i}k суть главные кривизны. Кривизна поверхности, касательная плоскость которой определяется векторами $J_a^* = \alpha_a^j I_j$, дана соотношением (19).

Résumé

REMARQUE SUR LE TENSEUR DE TORSION DE L'ESPACE À CONNEXION EUCLIDIENNE À TROIS DIMENSIONS

ALOIS ŠVEC, Praha

(Reçu le 19 novembre 1957)

Soit donnée une surface (4) + (6) plongée dans l'espace à connexion euclidienne (1) — (3). J'ai trouvé l'interprétation géométrique des formes fondamentales (10) — (12) liées par la relation (15). La composante S_{12}^3 du tenseur de torsion est l'invariant dont l'interprétation géométrique est donnée par (17) où α est l'angle des courbes (16) et ^{i}k sont les courbures principales. La torsion de la surface au plan tangent donné par les vecteurs $J_a^* = \alpha_a^j I_j$ est (19).