Časopis pro pěstování matematiky

Miroslav Mleziva

Die Unabhängigkeit des Axiomensystems des Aussagenkalküls von Hermes und Scholz

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 84 (1959), No. 4, 454--460

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117321`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 84 (1959), Praha

DIE UNABHÄNGIGKEIT DES AXIOMENSYSTEMS DES AUSSAGENKALKÜLS VON HERMES UND SCHOLZ

MIROSLAV MLEZIVA, Praha

DT: 517.11

(Eingelangt am 24. November 1958)

Dieser Artikel enthält den Beweis der Unabhängigkeit des Axiomensystems für das zweiwertige Aussagenkalkül von Hermes und Scholz.

In der „Mathematischen Logik" [1] führen H. HERMES und H. SCHOLZ folgendes Axiomensystem des zweiwertigen Aussagenkalküls an:

1.1 $p \to (q \to p)$, 1.2 $[p \to (p \to q)] \to (p \to q)$,

1.3 $(p \to q) \to [(q \to r) \to (p \to r)]$.

2.1 $(p \to \bar{q}) \to (q \to \bar{p})$, 2.2 $\bar{p} \to (p \to q)$,

2.3 $[(p \to \bar{p}) \to q] \to [(p \to q) \to q]$.

3.1 $(p \,\&\, q) \to p$, 3.2 $(p \,\&\, q) \to q$,

3.3 $(p \to q) \to [(p \to r) \to (p \to (q \,\&\, r))]$.

4.1 $p \to (p \vee q)$, 4.2 $q \to (p \vee q)$,

4.3 $(p \to r) \to [(q \to r) \to ((p \vee q) \to r)]$.

5.1 $(p \equiv q) \to (p \to q)$, 5.2 $(p \equiv q) \to (q \to p)$,

5.3 $(p \to q) \to [(q \to p) \to (p \equiv q)]$.

Die Autoren behaupten, dass dieses Axiomensystem unabhängig ist, d. h. dass keines der Axiomen aus den fünfzehn übrigen (auf Grund der Substitutions- und Abtrennungsregel) ableitbar ist [1] (S. 36). Sie führen weiter an, dass die Beweise noch nicht veröffentlicht sind (S. 36; Bemerkung 51).

Wir bringen hier einen Unabhängigkeitsbeweis für dieses Axiomensystem. Wir verwenden die bekannte Matrizenmethode. Für jedes der Axiome wird eine spezielle Matrix angegeben, die die Definitionen aller fünf in den Axiomen vorkommenden Funktioren enthält. Jede der angeführten Matrizen hat folgende Eigenschaften: 1. Sie erfüllt nicht das zu untersuchende Axiom; sie erfüllt aber die übrigen; 2. sie ist „normal" (siehe [1] S. 36). Jede Matrix hat nur einen ausgezeichneten Wert: „1".

Die Unabhängigkeit des Axioms 1.1:

	1 2 3 4		1 2 3 4	1 2 3 4	1 2 3 4
1	1 3 3 3	4	1 3 3 3	1 1 1 1	1 3 3 3
2	1 3 3 3	4	3 3 3 3	1 1 1 1	3 3 3 3
3	1 1 1 1	1	3 3 3 3	1 1 3 3	3 3 1 1
4	1 1 1 1	1	3 3 3 3	1 1 3 3	3 3 1 1
	$\rightarrow$	—	&	v	$\equiv$

Das Axiom 1.1 hat für die Argumentwerte $p = 2$, $q = 2$ den Wert:

$$\begin{array}{c} 2 \rightarrow (2 \rightarrow 2) \\ 2 \rightarrow \quad 3 \\ 3 \end{array}$$

Die Unabhängigkeit des Axioms 1.2:

	1 2 3		1 2 3	1 2 3	1 2 3
1	1 2 2	3	1 2 3	1 1 1	1 2 2
2	1 1 2	2	2 2 3	1 2 2	2 1 2
3	1 1 1	1	3 3 3	1 2 3	2 2 1
	$\rightarrow$	—	&	v	$\equiv$

Das Axiom 1.2 hat für die Argumentwerte $p = 2$, $q = 3$ den Wert:

$$\begin{array}{c} [2 \rightarrow (2 \rightarrow 3)] \rightarrow (2 \rightarrow 3) \\ [2 \rightarrow \quad 2 \quad] \rightarrow \quad 2 \\ 1 \quad \rightarrow \quad 2 \\ 2 \end{array}$$

Die Unabhängigkeit des Axioms 1.3:

	1 2 3 4		1 2 3 4	1 2 3 4	1 2 3 4
1	1 2 2 3	2	1 3 3 3	1 1 1 1	1 3 3 3
2	1 1 1 1	1	3 3 3 3	1 3 3 3	3 1 1 3
3	1 1 1 1	1	3 3 3 3	1 3 3 3	3 1 1 1
4	1 2 1 1	3	3 3 3 3	1 3 3 3	3 3 1 1
	$\rightarrow$	—	&	v	$\equiv$

Das Axiom 1.3 hat für die Argumentwerte $p = 4$, $q = 3$, $r = 2$ den Wert:

$$\begin{array}{c}
(4 \to 3) \to [(3 \to 2) \to (4 \to 2)] \\
1 \quad \to [1 \to 2] \\
1 \quad \to \quad 2 \\
2
\end{array}$$

Die Unabhängigkeit des Axioms 2.1:

	1	2		1	2	1	2	1	2
1	1	2	2	1	2	1	1	1	2
2	1	1	2	2	2	1	2	2	1
	$\to$		$-$	&		$\vee$		$\equiv$	

Das Axiom 2.1 hat für die Argumentwerte $p = 2$, $q = 1$ den Wert:

$$\begin{array}{c}
(2 \to \bar{1}) \to (1 \to \bar{2}) \\
(2 \to 2) \to (1 \to 2) \\
1 \quad \to \quad 2 \\
2
\end{array}$$

Die Unabhängigkeit des Axioms 2.2:

	1	2		1	2	1	2	1	2
1	1	2	1	1	2	1	1	1	2
2	1	1	1	2	2	1	2	2	1
	$\to$		$-$	&		$\vee$		$\equiv$	

Das Axiom 2.2 hat für die Argumentwerte $p = 1$, $q = 2$ den Wert:

$$\begin{array}{c}
\bar{1} \to (1 \to 2) \\
1 \to \quad 2 \\
2
\end{array}$$

Die Unabhängigkeit des Axioms 2.3:

	1	2	3		1	2	3	1	2	3	1	2	3
1	1	2	3	3	1	2	3	1	1	1	1	2	3
2	1	1	3	3	2	2	3	1	2	2	2	1	3
3	1	1	1	1	3	3	3	1	2	3	3	3	1
	$\to$			$-$	&			$\vee$			$\equiv$		

Das Axiom 2.3 hat für die Argumentwerte $p = 2$, $q = 2$ den Wert:

$$
\begin{array}{c}
[(2 \rightarrow \bar{2}) \rightarrow 2] \rightarrow [(2 \rightarrow 2) \rightarrow 2] \\
[(2 \rightarrow 3) \rightarrow 2] \rightarrow [1 \rightarrow 2] \\
[3 \rightarrow 2] \rightarrow \quad 2 \\
1 \quad \rightarrow \quad 2 \\
2
\end{array}
$$

Die Unabhängigkeit des Axioms 3.1:

	1 2		1 2	1 2	1 2
1	1 2	2	1 2	1 1	1 2
2	1 1	1	1 2	1 2	2 1
	→	—	&	v	≡

Das Axiom 3.1 hat für die Argumentwerte $p = 2$, $q = 1$ den Wert:

$$
\begin{array}{c}
(2 \;\&\; 1) \rightarrow 2 \\
1 \quad \rightarrow 2 \\
2
\end{array}
$$

Die Unabhängigkeit des Axioms 3.2:

	1 2		1 2	1 2	1 2
1	1 2	2	1 1	1 1	1 2
2	1 1	1	2 2	1 2	2 1
	→	—	&	v	≡

Das Axiom 3.2 hat für die Argumentwerte $p = 1$, $q = 2$ den Wert:

$$
\begin{array}{c}
(1 \;\&\; 2) \rightarrow 2 \\
1 \quad \rightarrow 2 \\
2
\end{array}
$$

Die Unabhängigkeit des Axioms 3.3:

	1 2		1 2	1 2	1 2
1	1 2	2	2 2	1 1	1 2
2	1 1	1	2 2	1 2	2 1
	→	—	&	v	≡

Das Axiom 3.3 hat für die Argumentwerte $p = 1$, $q = 1$, $r = 1$ den Wert:

$$
\begin{array}{l}
(1 \rightarrow 1) \rightarrow [(1 \rightarrow 1) \rightarrow (1 \rightarrow (1 \,\&\, 1))] \\
\quad 1 \quad\; \rightarrow \quad [1 \quad \rightarrow (1 \rightarrow 2)] \\
\quad 1 \quad\; \rightarrow \quad [1 \rightarrow 2] \\
\quad 1 \quad\; \rightarrow \quad 2 \\
\qquad\quad 2
\end{array}
$$

Die Unabhängigkeit des Axioms 4.1:

	1 2		1 2	1 2	1 2
1	1 2	2	1 2	1 2	1 2
2	1 1	1	2 2	1 2	2 1
	$\rightarrow$	—	&	v	$\equiv$

Das Axiom 4.1 hat für die Argumentwerte $p = 1$, $q = 2$ den Wert:

$$
\begin{array}{l}
1 \rightarrow (1 \vee 2) \\
1 \rightarrow \; 2 \\
\quad 2
\end{array}
$$

Die Unabhängigkeit des Axioms 4.2:

	1 2		1 2	1 2	1 2
1	1 2	2	1 2	1 1	1 2
2	1 1	1	2 2	2 2	2 1
	$\rightarrow$	—	&	v	$\equiv$

Das Axiom 4.2 hat für die Argumentwerte $p = 2$, $q = 1$ den Wert:

$$
\begin{array}{l}
1 \rightarrow (2 \vee 1) \\
1 \rightarrow \quad 2 \\
\quad 2
\end{array}
$$

Die Unabhängigkeit des Axioms 4.3:

	1 2		1 2	1 2	1 2
1	1 2	2	1 2	1 1	1 2
2	1 1	1	2 2	1 1	2 1
	$\rightarrow$	—	&	v	$\equiv$

Das Axiom 4.3 hat für die Argumentwerte $p = 2$, $q = 2$, $r = 2$ den Wert:

$$
\begin{array}{ccccccc}
(2 \rightarrow 2) & \rightarrow & [(2 \rightarrow 2) & \rightarrow & ((2 \vee 2) & \rightarrow & 2)] \\
1 & \rightarrow & [1 & \rightarrow & (1 & \rightarrow & 2)] \\
1 & \rightarrow & [1 & \rightarrow & 2] & & \\
1 & \rightarrow & & 2 & & & \\
 & 2 & & & & &
\end{array}
$$

Die Unabhängigkeit des Axioms 5.1:

	1 2		1 2	1 2	1 2
1	1 2	2	1 2	1 1	1 1
2	1 1	1	2 2	1 2	2 1
	$\rightarrow$	—	&	v	$\equiv$

Das Axiom 5.1 hat für die Argumentwerte $p = 1$, $q = 2$ den Wert:

$$
\begin{array}{ccc}
(1 \equiv 2) & \rightarrow & (1 \rightarrow 2) \\
1 & \rightarrow & 2 \\
 & 2 &
\end{array}
$$

Die Unabhängigkeit des Axioms 5.2:

	1 2		1 2	1 2	1 2
1	1 2	2	1 2	1 1	1 2
2	1 1	1	2 2	1 2	1 1
	$\rightarrow$	—	&	v	$\equiv$

Das Axiom 5.3 hat für die Argumentwertr $p = 2$, $q = 1$ den Wert:

$$
\begin{array}{ccc}
(2 \equiv 1) & \rightarrow & (1 \rightarrow 2) \\
1 & \rightarrow & 2 \\
 & 2 &
\end{array}
$$

Die Unabhängigkeit des Axioms 5.3:

	1 2		1 2	1 2	1 2
1	1 2	2	1 2	1 1	1 2
2	1 1	1	2 2	1 2	2 2
	$\rightarrow$	—	&	v	$\equiv$

Das Axiom 5.3 hat für die Argumentwerte $p = 2$, $q = 2$ den Wert:

$$\begin{array}{l} (2 \to 2) \to [(2 \to 2) \to (2 \equiv 2)] \\ \quad 1 \quad\ \to [1 \to \quad 2] \\ \quad 1 \quad\ \to \qquad 2 \\ \qquad\quad 2 \end{array}$$

Das Axiomensystem von Hermes und Scholz ist also unabhängig.

Bemerkung. Die Matrizen für 3.1—5.2 sind mit den von D. HILBERT und P. BERNAYS für den Unabhängigkeitsbeweis derselben Axiome angewendeten Matrizen identisch [2]. Wir führen diese Matrizen an, nur um den Beweis zu vervollständigen.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] *H. Hermes* und *H. Scholz*: Mathematische Logik, Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. I 1, Heft 1, Teil I; Teubner, Leipzig, 1952.

[2] *D. Hilbert* und *P. Bernays*: Grundlagen der Mathematik, Bd. I., Springer, Berlin, 1934; S. 76.

Výtah

NEZÁVISLOST HERMES-SCHOLZOVA AXIOMATICKÉHO SYSTÉMU VÝROKOVÉHO KALKULU

MIROSLAV MLEZIVA, Praha

(Došlo dne 24. listopadu 1958)

V práci je podán důkaz nezávislosti Hermes-Scholzova axiomatického systému dvouhodnotového výrokového kalkuku. Důkaz je proveden na základě obvyklé maticové metody.

Резюме

НЕЗАВИСИМОСТЬ СИСТЕМЫ АКСИОМ ГЕРМЕСА-ШОЛЬЦА ДЛЯ ИСЧИСЛЕНИЯ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

МИРОСЛАВ МЛЕЗИВА (Miroslav Mleziva), Прага

(Поступило в редакцию 24/XI 1958 г.)

В статье дается доказательство независимости системы аксиом Гермеса-Шольца для двузначного исчисления высказываний. Доказательство проводится на основании обычного матричного метода.