Tamás Frey

Některé lokální věty o aproximaci

*Časopis pro pěstování matematiky*, Vol. 84 (1959), No. 4, 467--469

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117323

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 84 (1959), Praha

# REFERÁTY

## NĚKTERÉ LOKÁLNÍ VĚTY O APROXIMACI

(Vlastní referát T. FREYE, kandidáta matematických věd Matematické a technické university v Budapešti, o přednášce konané dne 27. dubna 1959 na Matematicko-fysikální fakultě Karlovy university v Praze)

Položme si otázku: *Pro které aproximační procesy platí věta o lokalisaci, podobná větě Riemannově;* dále, *zda platí nějaká věta o tom, jak silně se ovlivní jakost aproximace v nějakém bodě strukturními vlastnostmi aproximované funkce daleko od uvažovaného bodu.*

V tomto směru víme o nejlépe aproximující posloupnosti polynomů např. jen to, že jakost aproximace je charakterisována jakostí aproximace na nejhůře aproximovatelném intervalu. Není tedy bez zajímavosti najíti takovou posloupnost polynomů, která aproximuje uvažovanou funkci na každém intervalu tak dobře, jak nejlépe je vůbec možno (tedy pomocí strukturních vlastností aproximované funkce, uvažovaných jen na tomto intervalu). Musíme tedy nejprve odpověděti na poslední otázku.

Právě tyto problémy se objevují v práci M. BOCHNERA „Localisation of best approximation" ([1]), ale jen ve velmi úzkém pojetí a jsou jen částečně řešeny. Druhá věta této práce, s jejíž pomocí M. Bochner chce dokázat, že jeho výsledky nejsou zlepšitelné, je však chybná, jak se hned ukáže triviálním protipříkladem. (Chyba důkazu spočívá ve špatném použití Poisson-Jensenovy nerovnosti.)

Aby uvažovaná otázka mohla být přesněji formulována, musíme nejprve dokázati následující výroky:

1°. *Existuje právě jeden trigonometrický polynom nejvýše n-tého řádu, který nejlépe aproximuje funkci $f(x) \in C[a, b]$ na $a \leqq x \leqq b$, $b - a < 2\pi$.*

Tento polynom má všechny tzv. Čebyševovy vlastnosti. V dalším budeme značit tuto nejlepší aproximaci $E_n^{(T)}(f; a, b)$. (Důkaz nepoužívá žádných nových myšlenek.)

Abychom nyní odhadli tuto veličinu, poznamenejme nejprve, že jakost aproximace funkce třídy $C_{2\pi}$ je jednoznačně charakterisována toliko pomocí druhého modulu spojitosti nejvyšší, ještě spojité derivace. Nyní ukážeme, že také veličina $E_n^{(T)}(f; a, b)$ je charakterisována, a to také jednoznačně, jen pomocí druhého modulu spojitosti nejvyšší, ještě spojité derivace funkce, tedy pomocí

$$\omega_2(\delta; f^{(\nu)}; a, b) = \sup_{0 < \vartheta \leqq \delta} \{ \sup_{a+\vartheta \leqq x_0 \leqq b-\vartheta} |f^{(\nu)}(x_0 + \vartheta) - 2f^{(\nu)}(x_0) + f^{(\nu)}(x_0 - \vartheta)| \} .$$

2°. *Můžeme funkci, např. $f^{(\nu)}(x) \in C[a, b]$, tak rozšířiti ve funkci $b(x) \in C[-\infty, \infty)$, že platí*

$$\omega_2(\delta; g; -\infty, \infty) \leqq 5\omega_2(\delta; f^{(\nu)}; a, b) .$$

Toto rozšíření je charakterisováno zrcadlením okolo koncového bodu. Z toho však podle Jacksonových vět plyne, že $E_n^{(T)}(f; a, b)$ je charakterisovatelná pomocí $\omega_2\left(\frac{1}{n}; f^{(\nu)};\right.$

$a, b)$. Abychom nyní ukázali, že tato charakterisace je jednoznačná, tj. není zlepšitelná, lokalisujeme (a to v málo zjemněném tvaru) Bernsteinovy tzv. obrácené věty:

3°. *Buď* $1 < \gamma < 2$ *pevně zvoleno. Označme* $k$ *největší přirozené číslo alespoň rovné dvěma, pro které platí*

$$\lim n^{k-\gamma} E_n^{(T)}(f; a, b) < \infty, \quad \textit{ale} \quad \overline{\lim}\, n^{k-\gamma+1} E_n^{(T)}(f; a, b) = \infty$$

(*pokud takové existuje; jinak buď* $k = 2$). *Potom je ještě* $f^{(k-2)} \in C[\alpha, \beta]$ *a*

$$\omega_2\left(\frac{1}{n}; f^{(k-2)}; \alpha, \beta\right) \leqq C(k) \,.\, \sup \left\{\frac{1}{N^2} \sum_{s=1}^{N} s^{k-1} E_s^{(T)}(f; a, b)\right\},$$

*kde* $\alpha > a + \frac{k}{n}$ a $\beta < b - \frac{k}{n}$ *jsou libovolná.*

(Odhady se mohou dostati lokalisací tzv. první Bernsteinovy nerovnosti, jsou ostatně důsledkem původního od Bernsteina pocházejícího myšlenkového postupu.)

Konstruujme nyní aproximační proces, který lokalisuje nejlepší aproximaci v hořejším smyslu, pomocí myšlenky De la Vallée-Poussinovy ([2]). De la VALLÉE-POUSSIN udal totiž posloupnost trigonometrických polynomů $V_n(t)$, která má následující vlastnosti:

a) $V_n(t)$ je trigonometrický polynom nejvýše $(2n - 1)$-tého řádu (tj. $V_n(t) \in M_{2n-1}^{(T)}$),

b) proces, definovaný pomocí $V_n$, jakožto jádrem, má tzv. reprodukční vlastnost, tj.

$$v_n(x; f) = \int_{-\pi}^{\pi} V_n(x - t)\, f(t)\, \mathrm{d}t \equiv f(x)\,, \quad \text{pokud} \quad f \in M^{(T)}\,,$$

c) proces má stejnoměrně omezenou Lebesgueovu konstantu (normu)

$$\int_{-\pi}^{\pi} |V_n(t)|\, \mathrm{d}t \leqq c_1\,, \quad (n = 1, 2, \ldots)\,.$$

Poznamenejme, že $V_n$ se snadno odvodí pomocí $v_n$ a částečných součtů Fourierovy řady pro $f(x) \in L_{2\pi}$.

Abychom nyní zkonstruovali lokálně nejlépe aproximující posloupnost polynomů, potřebujeme najíti takové jádro $A_n(t)$, které má nejen vlastnosti b) a c), ale ještě také další, a sice takové, které zajišťují, že dále vzaté strukturní vlastnosti uvažované funkce ovlivňují jakost aproximace jen jedním, pokud možno rychle k nule konvergujícím faktorem. Tento faktor je charakterisován tzv. vnější Lebesgueovou konstantou procesu

$$\Lambda_n^{(v)}(\delta) = \left\{ \int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\pi} \right\} |A_n(t)|\, \mathrm{d}t\,.$$

Může se snadno ověřiti, že jádro procesu $A_n(t)$, definované vztahem

$$e_n(x; f) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} s_{n+k}(x; f)$$

($e_n$ je tedy Eulerův průměr), dále

$$a_n(x; f) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e_{n+k}(x; f)\,, \tag{1}$$

tedy

$$a_n(x; f) = \int_{-\pi}^{\pi} A_n(x - t)\, f(t)\, \mathrm{d}t\,, \quad f \in L_{2\pi}\,,$$

splňuje všechny požadavky; že tedy

a) $A_n(t) \in M_{4n-2}^{(T)}$,

b) $a_n(x; f) \equiv f(x)$, pokud $f \in M_n^{(T)}$,

c) $\int_{-\pi}^{\pi} |A_n(t)| \, dt \leqq C_2$, $(n = 1, 2, \ldots)$,

d) $A_n^{(v)}(\delta) \leqq \frac{1}{n} C(\delta) [q(\delta)]^n$, $(n = 1, 2, \ldots)$,

kde $C(\delta) = C_3 \operatorname{ctg} \frac{\delta}{2}$ a $q(\delta) = \cos \frac{\delta}{2}$.

$\{a_n(x; f)\}$ je nyní posloupnost trigonometrických polynomů aproximující lokálně nejlépe funkci $f(x) \in L_{2\pi}$ v tom smyslu, že jakost aproximace touto posloupností v nějakém libovolném bodě $x_0$ je právě tak dobrá, jak lze vůbec dosáhnouti trigonometrickým polynomem v nějakém libovolném okolí $x_0$, totiž v $[x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ ($\delta > 0$ libovolné). Platí tedy odhad

$$|f(x_0) - a_n(x_0; f)| \leqq C_2 \, . \, E_n^{(T)}(f; x_0 - \delta, x_0 + \delta] + C_4(\delta) \, . \, \frac{1}{n} \cos^n \frac{\delta}{2},$$

kde $\delta > 0$ je libovolné a

$$C_4(\delta) \leqq \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| \, dt \, . \, \frac{C_5}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} \, .$$

Poznamenejme, že v případě $f'(x) \in L_{2\pi}$ také platí

$$\frac{d}{dx} a_n(x; f) \equiv a_n(x; f'),$$

takže tedy derivovaná posloupnost funkcí $a_n$ poskytuje lokálně nejlepší aproximaci funkce $f' \in L_{2\pi}$.

Poznamenejme ještě dále, že výše udaný proces v případě diferencovatelnosti v rozšířeném smyslu již není nejlepší, avšak může se definovati nekonečná řada takových procesů, a to místo tvořením aritmetických středů podle (1), pomocí středů vždy vyššího řádu, které všecky poskytují lokálně nejlepší aproximaci a dávají v případě diferencovatelnosti v rozšířeném smyslu vždy lepší výsledky.

T. Frey odvodil potom také jeden interpolační proces, poskytující lokálně nejlepší aproximaci. Ukázal, že Lagrangeova a Hermite-Fejérova interpolace mezi normální posloupností uzlových bodů splňují také větu o lokalisaci podobnou větě Riemannově, dále že tato vlastnost nespočívá v normalitě posloupnosti uzlových bodů, ale v tom, že uzlové body a příslušné konjugované body leží uvnitř interpolačního intervalu odděleny od sebe nějakou, na $n$ nezávisící vzdáleností.

*Literatura*

[1] *Bochner S.*: Localisation of best approximation. Annals of Math. Study, No *25*, 1950, Princeton.

[2] *De la Vallée-Poussin Ch.*: Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable, Paris 1919.

Přeložil *Miroslav Šisler*, Praha