Jiří Kopáček

Решение задачи Коши для квазилинейных гиперболических уравнений и линейных гиперболических систем методом конечных разностей

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 88 (1963), No. 4, 396--413

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117476`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 88 (1963), Praha

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И ЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

ИРЖИ КОПАЧЕК (Jiří Kopáček), Прага

(Поступило в редакцию 10/III 1962 г.)

В работе доказана устойчивость двух разностных схем для решения задачи Коши для квазилинейных уравнений и линейных систем гиперболического типа и существование решения этой задачи.

Методы работы [1] можно применить и для решения задачи Коши для квазилинейного гиперболического уравнения

$$\mathrm{D}_0^{m+1}u + \sum_{|\alpha|=m+1,\ \alpha_0\leqq m} a_\alpha(x, \mathrm{D}^\beta u)\,\mathrm{D}^\alpha u = f(x, \mathrm{D}^\beta u)\,, \quad |\beta| \leqq m\,,$$

и линейной системы гиперболического типа

$$\mathrm{D}_0 u + \sum_{i=1}^{n} A_i(x)\,\mathrm{D}_i u + B(x)\,u = f(x)\,.$$

В первой части решается задача Коши для квазилинейного гиперболического уравнения при нулевых начальных данных и некотором ограничении на правую часть. Это решение получается как предел решений разностных схем, аналогичных схемам в [1], продолженных определенным образом на всю область. Общая задача Коши сводится к этому частному случаю. Во второй части эти схемы используются для решения задачи Коши для линейных систем. Энергетическое неравенство доказывается следующим образом. Применяя к уравнениям разностной схемы оператор $B_1(x, \Delta)$, аналогично как и в [2], приводим главную часть этой системы к виду $a(x, \Delta)\,E$, где E единичная матрица и $a(x, \mathrm{D})$ гиперболический оператор $(m+1)$-ого порядка. Для такой системы энергетическое неравенство доказывается так-же, как для линейного уравнения $(m+1)$-ого порядка. Доказывается существование решения почти всюду и классического решения. Будем пользоваться следующими обозначениями.

Пусть $\{x\} = \{x_0, x'\} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ $(n+1)$-мерное пространство, Ω область в n-мерном пространстве $\{x'\} = \{x_1, \ldots, x_n\}$, определенная неравенствами

$0 \leqq x_i \leqq 2\pi$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $Q_T \equiv \{0 \leqq x_0 \leqq T,\ x' \in \Omega\}$ область в пространстве $\{x\}$, $Q_{T,\delta} \equiv \{-\delta \leqq x_0 \leqq T, x' \in \Omega\}$, где δ положительное число. $\mathrm{D}_i \equiv \partial/\partial x_i$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$, $\alpha = \{\alpha_0, \alpha'\} = \{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, $|\alpha| = \sum_0^n \alpha_i$, где α_i неотрицательные целые числа, $\mathrm{D}^\alpha \equiv \mathrm{D}_0^{\alpha_0}\mathrm{D}_1^{\alpha_1}, \ldots, \mathrm{D}_n^{\alpha_n}$. В пространстве $\{x\}$ построим сетку с узлами $x = \{k_0\tau, k_1 h, \ldots, k_n h\}$, где $\tau = \Delta x_0$, $h = \Delta x_i$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, положительные числа, удовлетворяющие условиям $T = M_\Delta \tau$, $2\pi = N_\Delta h$, где M_Δ, N_Δ натуральные числа и $k_0, k_1, \ldots, k_n$ произвольные целые числа. Множество точек $x' = k'h \in \{x'\}$, где $k' = \{k_1, k_2, \ldots, k_n\}$ целые числа, удовлетворяющие неравенствам $0 \leqq k_i \leqq N_\Delta - 1$, обозначим Ω_Δ. Пусть u функция, определенная в узлах сетки. Определим тогда функцию u_Δ следующим образом:

$$u_\Delta(x) = u(k_0\tau, k_1 h, \ldots, k_n h) \quad \text{для} \quad k_0\tau \leqq x_0 < (k_0 + 1)\,\tau\,,$$

$$k_i h \leqq x_i < (k_i + 1)\,h\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Далее обозначим

$$u^{\pm i} = u(x_0, \ldots, x_i \pm \Delta x_i, \ldots, x_n)\,,$$

$$J_1 u = \tfrac{1}{2}(u^{+0} + u)\,, \quad J_2 u = \tfrac{1}{2}(u^{+0} + u^{-0})\,, \quad {}'\Delta_i u = u_{x_i} = (\Delta x_i)^{-1}\,(u^{+i} - u)\,,$$

$$\Delta_i' u = u_{\bar{x}_i} = (\Delta x_i)^{-1}\,(u - u^{-0})\,, \quad \Delta_i u = \tfrac{1}{2}(u_{x_i} + u_{\bar{x}_i})\,, \quad i = 0, 1, \ldots, n\,,$$

$$\Delta^\alpha \equiv \Delta_0^{\alpha_0}\Delta_1^{\alpha_1} \ldots \Delta_n^{\alpha_n}\,,$$

$$\bar{\Delta}_0 u = u_{x_0}\,, \quad \bar{\Delta}_i u = J_1(\Delta_i u)\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,, \quad \bar{\Delta}^\alpha \equiv \bar{\Delta}_0^{\alpha_0}\bar{\Delta}_1^{\alpha_1} \ldots \bar{\Delta}_n^{\alpha_n}\,,$$

$$[u]_{x_0 = p\tau}^{x_0 = r\tau} = u(r\tau, x') - u(p\tau, x')\,.$$

Пусть C^∞ множество бесконечно дифференцируемых функций в области $[0 \leqq x_0 \leqq T] \times \{x'\}$, периодических по x' с периодом 2π, $C^{k,j}$ множество функций, обладающих непрерывными, периодическими по x' производными $\mathrm{D}^\alpha u$ для $|\alpha| \leqq k + j$, $\alpha_0 \leqq k$ в этой области, $H^{k,j}(Q_T)$ гильбертово пространство, получаемое замыканием C^∞ по норме

$$\left(\int_{Q_T} \sum_{|\alpha| \leqq k+j,\ \alpha_0 \leqq k} |\mathrm{D}^\alpha u|^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}, \quad H^{k,0} \equiv H^k\,.$$

Оператор

$$a(x, \mathrm{D}) \equiv \sum_{|\alpha| \leqq m+1} a_\alpha(x)\,\mathrm{D}^\alpha$$

называется нормальным гиперболическим, если $a_{m+1,0,\ldots,0} \equiv 1$ и уравнение $a_0(x, \lambda, \xi') = 0$ для всех действительных $\xi' = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$, удовлетворяющих условию $\sum_1^n \xi_i^2 \neq 0$ и всех $x \in Q_T$ имеет $(m + 1)$ различных действительных корней $\lambda_1(x, \xi'), \ldots, \lambda_{m+1}(x, \xi')$, где $a_0(x, \mathrm{D}) \equiv \sum_{|\alpha| = m+1} a_\alpha(x)\,\mathrm{D}^\alpha$ главная часть оператора $a(x, \mathrm{D})$. Разделяющим операторм для оператора $a(x, \mathrm{D})$ (см. [3]) называется оператор

$$b(x, \mathrm{D}) \equiv \frac{1}{m+1}\,\frac{\partial}{\partial \mathrm{D}_0}\,a_0(x, \mathrm{D})\,.$$

1. КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ $(m+1)$-ОГО ПОРЯДКА

Пусть в области Q_T дано уравнение

$$(1.1)\qquad \mathrm{D}_0^{m+1}u + \sum_{|\alpha|=m+1,\,\alpha_0\leqq m} a(x, \mathrm{D}^\beta u)\,\mathrm{D}^\alpha u = f(x_0, x', \mathrm{D}^\beta u)\,, \quad |\beta| \leqq m\,.$$

Пусть коэффициенты a_α и правая часть f являются периодическими по x' функциями с периодом 2π, и оператор $\mathrm{D}_0^{m+1} + \sum a_\alpha(x, y_\beta)\,\mathrm{D}^\alpha$ есть гиперболический для $|y_\beta| \leqq L$, $|\beta| \leqq m$, $x \in Q_T$, где L положительныя константа. Кроме того предположим, что

$$(1.2)\qquad f(0, x', 0) = 0\,.$$

Нашей задачей будет теперь найти в области Q_{T_0}, где $T_0 > 0$ достаточно малое число, функцию $u \in C^{m+1}(Q_{T_0})$, удовлетворяющую в Q_{T_0} уравнению (1.1) и начальным данным

$$(1.3)\qquad \mathrm{D}_0^{\beta_0}u\big|_{x_0=0} = 0\,, \quad \beta_0 = 0, 1, \ldots, m$$

(функция u, как элемент $C^{m+1}(Q_{T_0})$, является периодической функцией по x' с периодом 2π).

Явную разностную схему для решения задачи (1.1), (1.2), (1.3) определим следующим образом: Положим

$$(1.4)\qquad u(k_0\tau, k_1h, \ldots, k_nh) = 0 \quad \text{для} \quad -\left[\frac{\delta}{\tau}\right] \leqq k_0 \leqq m+1\,,$$

$k_1, k_2, \ldots, k_n$ произвольные целые числа; δ положительное число. В каждой точке $\{k_0\tau, k_1h, \ldots, k_nh\}$ с $1 \leqq k_0$, $0 \leqq k_j \leqq N_\Delta - 1$, $(j = 1, 2, \ldots, n)$ заменим уравнение (1.1) уравнением

$$(1.5)\qquad \Delta_0^{m+1}u + \sum_{|\alpha|=m+1,\,\alpha_0\leqq m} a_\alpha(x, \Delta^\beta u)\,\Delta^\alpha u = f(x, \Delta^\beta u)\,.$$

С помощью (1.4) и (1.5) определяется последовательно функция u для $k_0 > m + 1$, если ее всегда доопределять периодически по x' для $x \notin \Omega$. Уравнение (1.5) имеет смысл для таких k_0, для которых $|\Delta^\beta u(k_0\tau, k'h)| \leqq L$. Далее покажем, что это выполняется для $k_0 \leqq [T_0/\tau] + 1$, где T_0 достаточно малое положительное число.

Докажем сначала две леммы, дифференциальные аналоги которых очевидны.

Лемма 1. *Пусть дана сложная функция $f(u_1, \ldots, u_\mu, x_0, x')$ переменных $x_0, x', u_2, \ldots, u_\mu$, где $u_1(x), \ldots, u_\mu(x)$ функции переменной x, и пусть эта функция непрерывна и обладает непрерывными производными по $u_1, u_2, \ldots, u_\mu, x'$ до $(n+7)$-ого порядка для $x \in Q_T$, $|u_j| \leqq L$, $j = 1, 2, \ldots, \mu$, где L положительная константа; u и f периодические по x' с периодои 2π. Рассматривая ее только* *в узлах сетки, определенной числами τ и h, то для $|\gamma| \leqq n + 7$, $\gamma_0 = 0$ имеет место равенство*

$$(1.6) \qquad '\Delta^\gamma f(u_1, u_2, \ldots, u_\mu, x_0, x') =$$

$$= \sum_{i=1}^{\mu} \sum_{|\delta|>[|\gamma|/2]} '\Delta^\delta u_i \Theta_\delta^i('\varDelta^\xi u_j) + \widetilde{\Theta}('\Delta^\xi u_j) + \mathrm{D}^\gamma f(\bar{u}_j, x), \quad |\zeta| \leqq [|\gamma|/2],$$

где Θ_δ^i, $\widetilde{\Theta}$ многочлены указанных переменных ($j = 1, 2, \ldots, \mu$), с ограниченными коэффициентами. Верхние грани абсолютных величин этих коэффициентов зависят только от производных функции f, вычисленных при $u = \bar{u}$; $\widetilde{\Theta}$ не содержит свободоного члена. Если левая часть (1.6) вычислена в точке $\{x_0, x'\}$, то в правую часть могут входить $'\Delta^\delta u$, взятые в точках x_0, $x' + k'h$, где $k' = \{k_1, \ldots, k_n\}$ и $|k_i| \leqq \sigma(\gamma)$, причем $\sigma(\gamma)$ есть число, зависящее только от γ. Далее $\bar{u}_j$ удовлетворяют неравенствам $\min u_j \leqq \bar{u}_j \leqq \max u_j$ ($j = 1, 2, \ldots, \mu$), где $\max$ и $\min$ берется по выше указанному конечному числу точек. В $\mathrm{D}^\gamma f$ учитывается только явная зависимость f от x.

Доказательство. Пусть $|\gamma| = 1$. Тогда по лемме Адамара ([6], стр. 81), имеем

$$(1.7) \qquad '\Delta_i f(u_1, \ldots, u_\mu, x) =$$

$$= h^{-1}\{f(u_1(x_i + h), \ldots, u_\mu(x_i + h), x_0, \ldots, x_i + h, \ldots, x_n) -$$

$$- f(u_1(x_i), \ldots, u_\mu(x_i), x_0, \ldots, x_i, \ldots, x_n)\} =$$

$$= \int_0^1 \{ \sum_{j=1}^{u} {}'\Delta_i u_j \mathrm{D}u_j f[u(x_i) + t(u(x_i + h) - u(x_i)), x_0, \ldots, x_i + th, \ldots, x_n] +$$

$$+ D_{x_i} f[u(x_i) + t(u(x_i + h) - u(x_i)), x_0, \ldots, x_i + th, \ldots, x_n]\} \,\mathrm{d}t\,.$$

Будем по индукции доказывать равенство

$$(1.8) \qquad '\Delta^\gamma f(u_1, \ldots, u_\mu, x) =$$

$$= \int_0^1 \mathrm{d}t_1 \int_0^1 \mathrm{d}t_2, \ldots, \int_0^1 \mathrm{d}t_{|\gamma|} \sum_{|\eta| \leqq |\gamma|} P^\eta(t_1, \ldots, t_{|\gamma|}, '\Delta^{\delta^1} u_1, \ldots, \Delta^{\delta_\mu} u_\mu) \times$$

$$\times \mathrm{D}^\eta f[P_\eta^1(t_1, \ldots, t_{|\gamma|}, u_2), \ldots, P_\eta^\mu(t_1, \ldots, t_{|\gamma|}, u_\mu), x_0, \pi_\eta^i(t_1, \ldots, t^{|\gamma|}, x_i)]\}$$

для $|\gamma| \leqq n + 7$, где $\mathrm{D}^\eta f$ производная порядка $|\eta|$ по переменным $u_1, \ldots, u_\mu$, $x_1, \ldots, x_n$, P^η многочлен переменных $'\Delta^\delta u_i$, $i = 1, 2, \ldots, \mu$ и $|\delta| \leqq |\gamma|$; приэтом разностные отношения $'\varDelta^\delta u_i$ с $|\delta| > [|\gamma|/2]$ он содержит только в первой степени с коэффициентами, зависящими только от $'\Delta^\xi u_j$, $j = 1, 2, \ldots, \mu$, $|\zeta| \leqq [|\gamma|/2]$. Если коэффициент при $'\Delta^\delta u_i$ ($i = 1, \ldots, \mu$) зависит от $'\Delta^\xi u_j$, $j = 1, 2, \ldots, \mu$, тогда $|\delta| + |\zeta| \leqq |\gamma|$. Если D^η есть производная порядка $|\eta|$ по $x_1, \ldots, x_n$, то $P^\eta \equiv 1$. В P^η могут входить разностные отношения, вычисленные в конечном числе точек, соседних с точкой, в которой вычислена левая часть (1.8). $P_\eta^i = 1, 2, \ldots, {}_\mu$ есть многочлен первой степени относительно u_i, взятых опять в выше упомянутом конечном числе точек. $|P^i_\eta| \leqq \max |u_i|$, где максимум берется по u_i в этих-же точках. $\pi^i_j = x_i + h \sum e^\eta_j t_j$, $e^\eta_j = 0, 1$, $j = 1, 2, \ldots, |\gamma|$.

Пусть (1.8) выполнено для $|\gamma| \leqq K \leqq n + 6$. Покажем, что оно верно и для $|\gamma| = K + 1$. Применяя к уравнению (1.8) оператор $'\Delta_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$, получим

$$'\Delta_j{}'\Delta^\gamma f = \int_0^1 \mathrm{d}t_1 \ldots \int_0^1 \mathrm{d}t_{|\gamma|} \sum_{|\eta| \leqq |\gamma|} \{'\Delta_j P^\eta \mathrm{D}^\eta \mathrm{f} + (P^\eta)^{+j}{}'\Delta_j \mathrm{D}^\eta f\} .$$

Легко видно, что $'\varDelta_j P^\eta$ есть опять многочлен переменных $'\Delta^\delta u_i$, $i = 1, 2, \ldots, \mu$, $|\delta| \leqq |\gamma| + 1$, обладающий требуемыми свойствами с заменой $|\gamma|$ на $|\gamma| + 1$. Применяя лемму Адамара к $(P^\eta)^{+j}\, '\Delta_j\, \mathrm{D}^\eta f$, получим

$$(P^\eta)^{+j} \int_0^1 \mathrm{d}t_{|\gamma|+1} \{\sum_{l=1}^{\mu} \mathrm{D}_{u_l} \mathrm{D}^\eta f[P^i_\eta + t_{|\gamma|+1}(P^i_\eta)^{+j} - P^i_\eta),\ x_0, \pi^j\eta +$$
$$+ t(_{|\gamma|+1}(\pi^j_\eta)^{+j} - \pi^j_\eta)]\, '\Delta_j P^l_\eta + \mathrm{D}_{x_j} \mathrm{D}^\eta f[P^i_\eta + t_{|\gamma|+1}((P^i_\eta)^{+j} - P^i_\eta),\ x_0 \pi^j_\eta +$$
$$+ t_{|\gamma|+1}((\pi^j_\eta)^{+j} - \pi^j_\eta)]\} ,$$

так как $(\pi^j_\eta)^{+j} - \pi^j_\eta = h$. Видно далее, что

$$P^i_{\tilde\eta} = P^i_\eta + t_{|\gamma|+1}((P^i_\eta)^{+j} - P^i_\eta)$$

обладает нужными свойствами, так-же как и

$$\pi^j_{\tilde\eta} = \pi^j_\eta + t_{|\gamma|+1}((\pi^j)^{+j}\eta - \pi^j\eta) .$$

Астается тогда доказать, что такой будет и $\tilde{P^\eta} = (P^\eta)^{+j}\, '\Delta_j P^l_\eta$. Пусть P^η содержит разностные отношения $'\Delta^\delta u_i$ с $|\delta| > [\frac{1}{2}(|\gamma| + 1)]$. Тогда, вследствие $|\gamma| \geqq 1$ для такого δ должно быть $|\delta| \geqq 2$. В P^η может такое разностное отношение входить с коэффициентом, зависящим от $'\Delta^\xi u_s$, где $|\zeta| \leqq |\gamma| = [\frac{1}{2}(|\gamma| + 1)] - 1 \leqq \leqq \frac{1}{2}[(|\gamma| + 1]$, и поэтому в P^η могут разностные отношения порядка $|\delta| > > [\frac{1}{2}(|\gamma| + 1)]$ входить с коэффициентами, зависящими от $'\Delta^\xi u_s$ с $|\zeta| \leqq [\frac{1}{2}(|\gamma| + 1)$, причем $|\delta| + |\zeta| \leqq |\gamma| + 1$. Из $|P^i_{\tilde\eta}| \leqq \max(|P^i_\eta, |(P^i_\eta)^{+j}|)$ вытекает $|P^i_{\tilde\eta}| \leqq \leqq \max |u_i|$ и также $P^{\tilde\eta} \equiv 1$, если D^η означает производную по $x_1, \ldots, x_n$. Следовательно, (1,8) выполняется для $|\gamma| \leqq n + 7$. Применяя теорему о среднем значении, получим из него утверждение леммы.

Аналогично доказывается

Лемма 2. *Пусть функция $f(u_2, \ldots, \mu_\mu, x_0, x_1, \ldots, x_n)$ имеет непрерывные производные по $u_1, \ldots, u_\mu, x_1, \ldots, x_n$ до $(n + 7)$-ого порядка, непрерывную производную $(\partial/\partial x_0) f(u_2, \ldots, u_\mu\, x_0, x_1, \ldots, x_n)$, обладающую непрерывными производными по $u_1, \ldots, u_\mu, x_1, \ldots, x_n$ до $(n + 6)$-ого порядка. Тогда для $|\gamma| \leqq n + 6$*

$$(1.9) \qquad '\Delta^\gamma \Delta'_0 f = \sum_{|\delta| > [\frac{1}{2}|\gamma|[} \sum_{i=1}^{\mu} \{'\Delta^\delta \Delta'_0 u_i\, \tilde\Theta^i_\delta('\Delta^\xi u) + '\Delta^\delta u_i\, \Psi^i_\delta('\Delta^\xi \Delta'_0 u, '\Delta^\xi u) +$$
$$+ ('\Delta^\delta)^{-0} u_i X^i_\delta(\Delta'_0 u, ('\Delta^\xi)^{-0} u)\} + \tilde X('\Delta^\xi \Delta'_0 u, ('\Delta^\xi)^{-0} u, '\Delta^\xi u) + \mathrm{D}_0 \mathrm{D}^\gamma f(\bar u) ,$$

где $|\zeta| \leqq [\frac{1}{2}|\gamma|]$, $\widetilde{\Theta}^i_\delta$, ψ^i_δ, X^i_δ, $\widetilde{X}$ *многочлены указанных переменных, которые могут быть бычислены в конечном числе точек, соседних (при том-же* x_0) *с точкой* x_0, x', *в которой вычислена левая часть* (1.9). *Коэффициенты этих многочленов, так-же как и в лемме* 1, *зависят от производных функции* f, *вычисленных при* $u = \bar{u}$, *где* $\bar{u}$ *определяется аналогично, как и в лемме* 1.

Далее нам понадобятся еще три леммы.

Лемма 3. *Пусть* $a_0(x, \mathrm{D}) \equiv \sum\limits_{|\alpha|=m+1} a_\alpha(x)\,\mathrm{D}^\alpha$ *нормальный гиперболический оператор, коэффициенты которого являются периодическими по* x' *функциями с периодом* 2π *и удовлетворяют условию Липшица. Пусть* $\tau/h = \kappa \leqq \kappa_0$, *где* κ_0 *достаточно малая положительная постоянная. Тогда существуют положительные постоянные* C_1 *и* C_2, *которые зависят от максимумов модулей коэффициентов* $a_\alpha(x)$, *их констант Липшица и собственных чисел оператора* $a_0(x, \mathrm{D})$ $\lambda_1(x, \xi'), \ldots, \lambda_{m+1}(x, \xi')$ *при* $\|\xi'\| = (\sum \xi_i^2)^{1/2} = 1$, *но независяшие от* u, τ, h, *что*

$$\tau h^n \sum_1^{k_0-1} \sum_{\Omega_\Delta} a_0(x, \Delta)\, u J_2\{b(x, \Delta)\, u\} \geqq C_1 h^n \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{|\delta|=m} \left(|\Delta^\gamma u|^2 + |\Delta^\gamma u|\right)^{-0}{}_{x_0=k_0\tau} -$$

$$- C\{\tau h^n \sum_1^{k_0-1} \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{|\gamma|=m} \left(|\Delta^\gamma u|^2 + (|\Delta^\gamma u|^2)^{-0}\right) + h^n \sum_{\Omega_\Delta} \{ \sum_{|\gamma|\leqq m-1} \left(|\Delta^\gamma u|^2 + |\Delta^\gamma u|^2\right)^{-0})_{x_0=k_0\tau} +$$

$$+ \sum_{|\gamma|=m} \left(|\Delta^\gamma u|^2 + (|\Delta^\gamma u|^2)^{-0}\right)_{x_0=\tau}\}\}$$

для всех периодических по x' *функций и на сетке, определенной шагами* τ *и* h. $b(x, \mathrm{D})$ *есть разделяющий оператор для* $a_0(x, \mathrm{D})$, $a_0(x, \Delta)$, $b(x, \Delta)$ *разностные операторы, которые получаются из* $a_0(x, \mathrm{D})$, $b(x, \mathrm{D})$ *заменой* D_i *на* Δ_i.

Лемма 4. *Пусть* $y(k_0\tau)$ *неотрицательная функция для* $k_0 \geqq 0$, *удовлетворяющая при* $K \geqq k_0 \geqq 1$ *неравенству*

$$y(k_0\tau) \leqq C\{y(0) + \tau \sum_{s=0}^{k_0} y(s\tau) + F(k_0\tau)\}\,,$$

где $F(k_0\tau)$ *неотрицательная неубывающая функция,* C *положительная постоянная; тогда существует константа* C_1, *зависящая от* C *и* $T = K\tau$, *что*

$$y(k_0\tau) \leqq C_1\{y(0) + F(k_0\tau)\} \quad \text{для} \quad k_0 = 0, 1, \ldots, K\,.$$

Лемма 5. *Пусть* $w(k_0\tau, k'h)$ *периодическыя по* x' *функция на сетке. Тогда*

$$\int_\Omega \mathrm{D}^\gamma \widetilde{w}(k_0\tau, x')|^2\, \mathrm{d}x' \leqq 4^{|\gamma|} h^n \sum_{\Omega_\Delta} |{}'\Delta^\gamma w|^2\,, \quad \gamma_0 = 0\,,$$

где $\widetilde{w}(k_0\tau, x') = \sum_p a^{(p)}(k_0\tau)\,\mu^{(p)}(x')$, $x' \in \Omega$ *и* $a^{(p)}(k_0\tau)$ *коэффициенты разложения функции* $w(k_0\tau, k'h)$ *по ортонормированной системе функций на сетке*

$$\mu^{(p)}(x') = e^{ip_1x_1}, \ldots, e^{ip_nx_n}\,, \quad x_j = k_jh\,, \quad (k_j = 0, 1, \ldots, N_\Delta - 1)\,,$$

$$|p_j| \leqq (N_\Delta - 1)/2(N_\Delta\,\text{нечётное})\,, \quad \text{или} \quad -N_\Delta/2 \leqq p_j \leqq N_\Delta/2(N_\Delta\,\text{чётное})\,.$$

Доказательство леммы 3 вытекает из доказательства теоремы 1 в [1] (см. формулы (4.8)–(4.13)), лемма 4 доказывается аналогично, как в [4], стр. 144, лемма 5 аналогично, как в [5] стр. 228. Имеет место

Теорема 1. *Пусть коэффициенты a_α уравнения* (1.1) *и f имеют непрерывные производные по $x_1, \ldots, x_n$, $\mathrm{D}^\beta u(|\beta| \leqq m)$ до $(n+7)$-ого порядка при $|\mathrm{D}^\beta u| \leqq L$ и $x \in Q_T$, $\partial a_\alpha/\partial x_0$, $\partial f/\partial x_0$ имеют непрерывные производные по $x_1, \ldots, x_n$, $\mathrm{D}^\beta u$, $(|\beta| \leqq m)$ до $(n+6)$-ого порядка при тех-же x и $\mathrm{D}^\beta u$. Все эти функции пусть являются периодическими по x' с периодом 2π и f удовлетворяет условию* (1.2). *Тогда существует функция $u \in C^{m+1}(Q_{T_0})$, где T_0 достаточно малое положительное число, которая есть решение задачи* (1.1)–(1.3) *в Q_{T_0}. При этом решения разностных уравнений* (1.4), (1.5), *продолженные определенным способом на все Q_{T_0}, сходятся при $\tau, h \to 0$ равномерно в $C(Q_{T_0})$ к этому решению задачи* (1.1)–(1.3), *если $\tau/h = \kappa \leqq \kappa_0$, где κ_0 достаточно малое число.*

Доказательство. Пусть u решение (1.4), (1.5). Нашей задачей будет доказать компактность в C функций $\widetilde{\Delta^\alpha u}(|\alpha| \leqq m+1)$, продолженных линейно по x_0. Идея доказательства состоит в следующем. Предположим, что имеют место оценки

$$(1.10)\qquad \begin{aligned} &|\Delta^{\beta\prime}\Delta^\gamma u| < L \quad \text{для} \quad |\beta| \leqq m,\ |\gamma| \leqq [\tfrac{1}{2}(n+7)] + 1,\ \gamma_0 = 0\,, \\ &|\Delta^\beta \Delta_0' {}'\Delta^\gamma u| < L \quad \text{для} \quad |\beta| \leqq m,\ |\gamma| \leqq [\tfrac{1}{2}(n+6)] + 1,\ \gamma_0 = 0 \end{aligned}$$

для $x = \{k_0\tau, k_1 h, \ldots, k_n h\}$ с $k_0 \leqq M$, где $M\tau = T_0 \geqq \tau$. Пусть

$$(1.11)\qquad L_1 = \max\left\{|\mathrm{D}^\gamma_{x'} f(y_\beta, x_0, x')|,\ |\mathrm{D}_0 D^\delta_{x'} f(y_\beta, x_0, x')|\right\},$$

где максимум берется по $x \in Q_T$, $|y_\beta| \leqq L$, $|\gamma| \leqq [\frac{1}{2}(n+7)] + 1$, $\gamma_0 = 0$, $|\delta| \leqq$ $\leqq [\frac{1}{2}(n+6)] + 1$, $\delta_0 = 0$. Тогда сможем доказать энергетические неравенства для разностных отношений функции u достаточно высокого порядка, показать, что неравенства (1.10) имеют место для T_0 достаточно малого, что уже достаточно для компактности функций $\widetilde{\Delta^\alpha u}$, доопределенных указанным способом во всем Q_{T_0}. Переходим к подробному доказательству.

Пусть (1.10) выполняется для $M > 1$. Применяя к (1.5) оператор $'\Delta^\gamma$ с $|\gamma| \leqq$ $\leqq n + 7$, $\gamma_0 = 0$, получим для $k_0 = 1, 2, \ldots, M$

$$(1.12_\gamma)\qquad \begin{aligned} &\Delta_0^{m+1} u_\gamma + \sum a_\alpha(\Delta^\beta u, x)\,\Delta^\alpha u_\gamma = \\ &= -\sum_{|\delta| \leqq |\gamma|-1,\ |\delta|+|\xi|=|\gamma|,\ \delta_0=\xi_0=0} \sum_\alpha \varphi(\delta)\,\Delta^\alpha u_\delta\, {}'\Delta^\xi a_\alpha(\Delta^\beta u, x) + {}'\Delta^\gamma f(\Delta^\beta u, x)\,, \end{aligned}$$

где $\varphi(\delta)$ функции, аналогичные числам сочетаний в формуле Лейбница лдя производной произведения, $'\Delta^\gamma u = u_\gamma$. В виду периодичности можно не обращать внимание на то, что входящие в правую часть (1.12γ) разностные отношения берутся не только в точке (x_0, x'), в которой вычислена левая часть, но также в конечном числе соседних с ней точек x_0, $x' + k'h$. То, что не все разностные отношения в правой части вычисляются в той-же точке, что и левая часть, вытекает из формулы $'\Delta_i(vw) = '\Delta_i vw + '\Delta_i wv^{+i}$. Так как $f(0, x', 0) = 0$, то уравнение (1.5) выполнено и для $x_0 = 0$. Если обозначить $v = \Delta_0' u$, то, применяя к (1.5) при $1 \leqq k_0 \leqq M$ оператор Δ_0', получим

$$(1.13) \qquad \Delta_0^{m+1} v + \sum a_\alpha(\Delta^\beta u, x)\, \Delta^\alpha v = - \sum (\Delta^\alpha u)^{-0}\, \Delta_0' a_\alpha + \Delta_0' f(\Delta^\beta u, x)$$

и применением к (1.13) оператора $'\Delta^\gamma$ с $|\gamma| \leqq n + 6$, $\gamma_0 = 0$, $(v_\gamma = '\Delta^\gamma v)$,

$$(1.14_\gamma) \qquad \Delta_0^{m+1} v_\gamma + \sum a_\alpha(\Delta^\beta u, x)\, \Delta^\alpha v_\gamma =$$
$$= - \sum_\alpha \sum_\eta \varphi(\eta)\, (\Delta^\alpha u_\eta)^{-0}\, '\Delta^\varrho \Delta_0' a_\alpha - \sum_\alpha \sum_\delta \varphi(\delta)\, \Delta^\alpha v_\delta '\Delta^\sigma a_\alpha + '\Delta^\gamma \Delta_0' f\,,$$

где $|\delta| \leqq |\gamma| - 1$, $|\delta| + |\sigma| = |\gamma|$, $|\eta| \leqq |\gamma|$, $|\eta| + |\varrho| = |\gamma|$, $\eta_0 = \varrho_0 = \delta_0 = \sigma_0 = 0$. С помощью леммы 1 получим, что правая часть (1.12γ) есть линейная функция переменных $\Delta^\beta u_\gamma$, $|\gamma| \leqq n + 7$, $\gamma_0 = 0$, коэффициенты которой зависят от $\Delta^\beta u_\delta$ с $|\delta| \leqq [\frac{1}{2}(n + 7)] + 1$, и ее свободный член равен $D_{x'}^\gamma f(\bar{u}, \bar{x})$. С помощью лемм 1 и 2 показывается, что правые части (1.14γ) есть линейные функции переменных $\Delta^\beta v_j$, $\Delta^\beta u_\gamma$, $(|\gamma| \leqq n + 6$, $\gamma_0 = 0)$, $(\Delta^\beta u_\gamma)^{-0}(|\gamma| \leqq n + 7$, $\gamma_0 = 0)$, коэффициенты которых зависят от $\Delta^\beta v_\delta$, $|\delta| \leqq [\frac{1}{2}(n + 6)] + 1$ и $\Delta^\beta u_\delta$, $(\Delta^\beta u_\delta)^{-0}$ с $|\delta| \leqq [\frac{1}{2}(n + 6)]$. Их свободные члены равны $D_{x'}^\gamma D_0 f$. При доказательстве используется соотношение $\Delta^\alpha u_\delta = \frac{1}{2}\Delta^\beta(u_{\tilde{\delta}} + (u_{\tilde{\delta}})^{-r})$, где $|\alpha| = m + 1$, $\alpha_0 \in m$, $|\beta| = m$, $|\tilde{\delta}| = |\delta| - 1$, r некоторое из чисел $1, 2, \ldots, n$.

Если теперь выполнено (1.10), то с помощью лемм 3 и 4 получим, аналогично, как и в [1], оценки

$$(1.15) \qquad h^n \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{|\beta| \leqq m} |\Delta^\beta u_\gamma|^2_{x_0 = k_0\tau} \leqq x_0 K(L, L_1, x_0), \quad |\gamma| \leqq n + 7,\ \gamma_0 = 0\,,$$
$$h^n \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{|\beta| \leqq m} |\Delta^\beta v_\gamma|^2_{x_0 = k_0\tau} \leqq x_0 K(L, L_1, x_0), \quad |\gamma| \leqq n + 6,\ \gamma_0 = 0\,,$$

для $x_0 = k_0\tau$, $k_0 = 0, 1, \ldots, M$, так как начальные данные т.е. значения левых частей в (1.15) для $k_0 = 0, 1$ равны нулю. $K(L, L_1, x_0)$ растущая функция своих аргументов.

Кроме того, для любой периодоческой по x' функции $w(x_0, x')$, определенной на сетке, имеет место неравенство

$$(1.16) \qquad |w(x_0, x')|^2 \leqq C_1 h^n \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{|\gamma| \leqq [\frac{1}{2}n] + 1} |'\Delta^\gamma w|^2\,,$$

где константа C_1 не зависит от w (см. [5], стр. 228, 234). Из (1.15) и (1.16) вытекает

$$(1.17) \qquad \max |\Delta^\beta u_\gamma|_{|x_0 = k_0\tau} \leqq C_1 \sqrt{(x_0\,.\,K(L, L_1, x_0))}$$

для

$$|\gamma| \leqq n + 7 - [\tfrac{1}{2}n] - 1,\ \gamma_0 = 0\,,$$
$$\max |\Delta^\beta v_\gamma|_{|x_0 = k_0\tau} \leqq C_1 \sqrt{(x_0\,.\,K(L, L_1, x_0))}$$

для
$$|\gamma| \leqq n + 6 - [\tfrac{1}{2}n] - 1,\ \gamma_0 = 0\,,$$
и $x' \in \Omega_\Delta$, $x_0 = k_0\tau$, $k_0 = 0, 1, \ldots, M$. Из уравнений (1.12γ) с $|\gamma| \leqq [\frac{1}{2}(n + 7)] + 1$ и (1.14γ) с $|\gamma| \leqq [\frac{1}{2}(n + 6)] + 1$ вытекают оценки

$$(1.18)\qquad \begin{gathered} |\Delta_0^{m+1} u_\gamma| \leqq (x_0)^{1/2} K_1(L, L_1, x_0) + L_1\,,\\ |\gamma| \leqq [\tfrac{1}{2}(n + 7)] + 1,\ \gamma_0 = 0\,,\\ |\Delta_0^{m+1} v_\gamma| \leqq (x_0)^{1/2}\, K_1(L, L_1, x_0) + L_1\,,\\ |\gamma| \leqq [\tfrac{1}{2}(n + 6)] + 1,\ \gamma_0 = 0\,, \end{gathered}$$

для $k_0 = 1, 2, \ldots, M$, так как указанные уравнения сожержат разностные отношения $\Delta^\beta u_\delta$ с $|\delta| \leqq [\frac{1}{2}(n + 7)] + 2$, и $\Delta^\beta v_\delta$ с $|\delta| \leqq [\frac{1}{2}(n + 6)] + 2$, для которых имеют место оценки (1.17). Из (1.17) для $k_0 = 0, 1, \ldots, M$ вытекает также

$$(1.19)\qquad |\Delta_0 \Delta^\beta u_\gamma| \leqq \sqrt{(x_0\,.\,K(L, L_1, x_0))}$$

для
$$|\beta| \leqq m,\ \beta_0 \leqq m - 1,\ |\gamma| \leqq [\tfrac{1}{2}(n + 7)] + 1,\ \gamma_0 = 0\,,$$
$$|\Delta_0 \Delta^\beta v_\gamma| \leqq \sqrt{(x_0\,.\,K(L, L_1, x_0))}$$
для
$$|\beta| \leqq m,\ \beta_0 \leqq m - 1,\ |\gamma| \leqq [\tfrac{1}{2}(n + 6)] + 1,\ \gamma_0 = 0\,,$$
так как $[\frac{1}{2}(n + 7)] + 2 \leqq [\frac{1}{2}n] + 6$ и $[\frac{1}{2}(n + 6)] + 2 \leqq [\frac{1}{2}n] + 5$. Кроме того, вследствие (1.4) и (1.3), выполняется для $k_0 \leqq 1$ (1.10) и (1.18).

Пусть теперь для $x_0 = k_0\tau \leqq \bar{k}_0\tau$ выполнено (1.10). Тогда имеют место оценки (1.16)–(1.19) для $k_0 \leqq \bar{k}_0$ (если $k_0 \leqq 1$, то эти оценки следуют непосредственно из (1.4), (1,12$_\gamma$) и 1.14$_\gamma$) Оценим теперь левые части (1.10) для $x_0 = \bar{k}_0\tau + \tau$. Получим

$$(1.20)\qquad \begin{aligned} |\Delta^\beta u_\gamma|_{x_0(\bar{k}_0+1)\tau} &\leqq |\Delta^\beta u_\gamma|_{x_0(\bar{k}_0-1)\tau + 2\tau} |\Delta^\beta u_\gamma|_{x_0 = \bar{k}_0\tau} \leqq \\ &\leqq \sqrt{((\bar{k}_0\tau - \tau)\, K(L, L_1, \bar{k}_0\tau - \tau))} + 2\tau\sqrt{(\bar{k}_0\tau_0 K(L, L_1, \bar{k}_0\tau))},\ \beta_0 \leqq m - 1\,,\\ &\leqq \sqrt{((\bar{k}_0 - 1)\,\tau K(L, L_1, \bar{k}_0\tau - \tau))} + 2\tau(K_1\sqrt{(\bar{k}_0\tau)} + L_1),\ \beta_0 = m\,, \end{aligned}$$

для $|\gamma| \leqq [\frac{1}{2}(n + 7)] + 1$, $\gamma_0 = 0$,

$$(1.21)\qquad \begin{aligned} |\Delta^\beta v_\gamma|_{|x_0 = (\bar{k}_0+1)\tau} &\leqq |\Delta^\beta v_\gamma|_{|x_0 = (\bar{k}_0-1)\tau} + 2\tau|\Delta_0\Delta^\beta v_\gamma|_{x_0 = \bar{k}_0\tau} \leqq \\ &\leqq \sqrt{((\bar{k}_0 - 1)\,\tau K(L, L_1, \bar{k}_0\tau - \tau))} + 2\tau\sqrt{(\bar{k}_0\tau K(L, L_1, \bar{k}_0\tau))},\ \beta_0 \leqq m - 1\,,\\ &\leqq \sqrt{((\bar{k}_0 - 1)\,\tau K(L, L_1, \bar{k}_0\tau - \tau))} + 2\tau(K_1(L, L_1, \bar{k}_0\tau)\sqrt{(\bar{k}_0\tau)} + L_1,\quad \beta_0 = m\,, \end{aligned}$$

для $|\gamma| \leqq [\frac{1}{2}(n + 6)] + 1$, $\gamma_0 = 0$. Если теперь T_0 выбрать так, чтобы выполнялись неравенства

$$(1.22)\qquad \begin{gathered} (1 + 2T_0)\sqrt{(T_0 K(L, L_1, T_0))} < L,\\ \{\sqrt{K(L, L_1, T_0)} + 2T_0(L_1 + K_1(L, L_1, T_0)\sqrt{T_0})\}\sqrt{T_0} < L, \end{gathered}$$

то при $\tau \leqq T_0$ будут оценки (1.10), и следовательно и оценки (1.15)–(1.19), иметь место и для $x_0 = (\bar{k}_0 + 1)\,\tau$, и поэтому для всех $k_0\tau \leqq T_0 + \tau$.

Пусть T_0 удовлетворяет условию (1.22). Продолжим функции $\Delta^\alpha u$, $|\alpha| \leqq \leqq m + 1$, определенные на сетке, следующим образом: сначала для $x_0 = k_0\tau$, $k_0 = 0, 1, \ldots, [T_0/\tau] + 1$, $x' \in \Omega$ положим $\overline{\Delta^\alpha u} = \acute{\Delta}^\alpha u$ ($\acute{\Delta}^\alpha u$ – функции из леммы 5). Для $x_0 \in (k_0\tau, (k_0 + 1)\,\tau)$, $k_0 = 0, 1, \ldots, [T_0/\tau]$ так полученные функции продолжим линейно по x_0. Оценки (1.15)–(1.19) обеспечивают равномерную ограниченность и равностепенную непрерывность функций $\overline{\Delta^\alpha u}$, $|\alpha| \leqq m + 1$ и, следовательно, их компакность в $C(Q_{T_0})$. Некоторая подпоследовательность $(\overline{\Delta^\alpha u})_\nu$, соответствующая сходящимся к нулю последовательностям τ_ν, h_ν при $\nu \to \infty$, сходится к функциям $u_\alpha \in C(Q_T)$, удовлетворящим уравнению

$$u_{m+1,0,\ldots 0} + \sum_{|\alpha| = m+1,\, \alpha_0 \leqq m} a_\alpha(u_\beta, x)\, u_\alpha = f(u_\beta, x)\,.$$

Кроме того, в виду равностепенной непрерывности, сходятся к u_α также функции $((\Delta^\alpha u)_{\Delta^\nu}$, для которых легко доказать (см. [1]), что они сходятся к $D^\alpha u$. Поэтому функция $u \in C^{m+1}(Q_{T_0})$, является решением уравнения (1.1) и удовлетворяет нулевым начальным данным. По теореме 4.1 работы [3] такое решение единственно, из чего вытекает сходимость всей последовательности $\overline{\Delta^\alpha u}$. Теорема доказана.

Аналогичную теорему можно доказать и для следующей разностной схемы, аналогичной схеме 2 в [1], в предположении $\kappa \leqq R$, где $R > 0$ любая константа: Положим

$$v(k_0\tau, k_1 h, \ldots, k_n h) = 0 \quad \text{при} \quad \left[-\frac{\delta}{\tau}\right] \leqq k_0 \leqq m\,, \tag{1.23}$$

$k_1, k_2, \ldots, k_n$ любые числа, и для $x = \{k_0\tau, k_1 h, \ldots, k_n h\}$, $0 \leqq k_0$, $0 \leqq k_i \leqq \leqq N_\Delta - 1$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ составляем уравнения

$$\overline{\Delta}_0^{m+1} v + \sum a_\alpha(\overline{\Delta}^\beta v, x)\, \overline{\Delta}^\alpha v = f(\overline{\Delta}^\beta v, x)\,. \tag{1.24}$$

(1.23) и (1.24) представляют собой неявную разностную схему для определения функции v, и для нее можно доказать теорему 1 и без предположения $f(0, x', 0) = = 0$.

2. ЛИНЕЙНЫЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Пусть в области Q_T дана система

$$D_0 u + \sum_{i=1}^n A_i(x)\, D_i u + B(x) u = f(x)\,, \tag{2.1}$$

и требуется найти периодическую по x' с периодом 2π функцию $u(x) =$

$= \{u_1(x), u_2(x), \ldots, u_{m+1}(x)\}$, являющуюся решением (2.1) в Q_T и удовлетворяющую начальным условиям

$$u|_{x_0=0, x' \in \Omega} = \varphi(x') . \tag{2.2}$$

$A_i(x)$, $B(x)$ матрицы $(m + 1)$-ого порядка $(m \geqq 1)$, f и $\varphi(m + 1)$-мерные вектор-функции с периодическими по x' с периодом 2π элементами. Система гиперболическая в следующем смысле: Уравнение

$$a(x, \xi) = \det\left(\xi_0 E + \sum_{i=1}^{n} A_i(x)\, \xi_i\right) = 0 \tag{2.3}$$

имеет для всех $x \in Q_T$ и всех действительных $\xi' = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ таких, что $\|\xi'\| \neq 0$, $(m + 1)$ различных действительных корней $\xi_0^j = \xi_0^j(x, \xi')$, $j = 1, 2, \ldots, m + 1$.

Тогда существует такая матрица $B_1(x, \xi)$, что

$$B_1(x, \xi)\, \{\xi_0 E + \sum_{i=1}^{n} \xi_i A_i(x)\} = a(x, \xi)\, E . \tag{2.4}$$

Элементами матрицы $B_1(x, \xi)$ являются алгебраические дополнения m-ого порядка матрицы $\xi_0 E + \sum \xi_i A_i(x)$, где E единичная матрица.

Для решения задачи (2.1) и (2.2) определяем на сетке с шагами τ, h функци u следующим образом:

$$u(k_0\tau, k_1 h, \ldots, k_n h) = \varphi(k_1 h, \ldots, k_n h) \quad \text{для} \quad -[\delta/\tau] \leqq k_0 \leqq 1 \tag{2.5}$$

и любых целых $k_1, k_2, \ldots, k_n$ где δ фиксированное положительное число. В каждой точке $\{k_0\tau, k_1 h, \ldots, k_n h\}$ с $k_0 = 1, 2, \ldots, M_\Delta - 1$ и $(M_\Delta \tau = T)$ и $0 \leqq k_i \leqq \leqq N_\Delta - 1 (N_\Delta h = 2\pi)$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ заменяем (2.1) системой разностных уравнений

$$\Delta_0 u + \sum_{i=1}^{n} A_i(x)\, \Delta_i u + B(x)\, u = f(x) . \tag{2.6}$$

(2.5) и (2.6) определяют явную разностную схему для определения функции u при всех $x = \{k_0\tau, k_1 h, \ldots, k_n h\}$, $k_0 \leqq M_\Delta$, $k_1, k_2, \ldots, k_n$ любые целые, если вегда продложать u периодически вне Ω_Δ. Пусть элементы матриц $A_i(x)$, $B(x)$ и компоненты вектора f являются функциями из $C^{m,1}(Q_T)$ и компоненты $\varphi(x')$ из $C^{m+1}(\Omega)$. Будем доказывать энергетическое неравенство для разностных отношений функции u, определенной с помощью (2.5) и (2.6). Применим при $x_0 = k_0\tau$ с $k_0 = m + 1, \ldots, M - (m + 1)$ к обеим частям уравнений (2.6) оператор $B_1(x, \Delta)$, который получим из $B_1(x, \xi)$ заменой ξ_i на Δ_i, $(i = 0, 1, \ldots, n)$. В следствие (2.4) получим, что функция u удовлетворяет в указанных точках системе

$$a(x, \Delta)\, Eu + C(x, \Delta)\, u = B_1(x, \Delta) f , \tag{2.7}$$

где $a(x, \mathrm{D})$ гиперболический дифференциальный оператор $(m + 1)$-ого порядка, который получим из $a(x, \xi)$ заменой ξ_i на D_i, $a(x, \Delta)$ разностный оператор, который получим аналогийно заменой ξ_i на Δ_i, $(i = 0, 1, \ldots, n)$, $C(x, \Delta)$ разностный оператор порядка $\leqq m$. Используя формулу

$$\Delta_i(vw) = \Delta_i vw + \tfrac{1}{2}(v^{+i}w_{x_i} + v^{-i}w_{\bar{x}_i})$$

легко видно, что $C(x, \Delta)$ при $x_0 = k_0\tau$ содержит разностные отношения

$$(2.8) \qquad \Delta^\beta u((k_0 + s)\tau, k_1 h, \ldots, k_n h), \ |\beta| \leqq m, \ |s| \leqq m - |\beta| + 1,$$

где s целое число. Снова не учитываем сдвиги по x', так как они несущественны в виду периодичности. Умножим (2.7) скалярно на вектор $J_2\{b(x, \Delta) Eu\}$, где $b(x, \mathrm{D})$ разделяющий оператор для оператора $a(x, \mathrm{D})$. Суммируя по Ω_Δ и по $x_0 = k_0\tau$, $k_0 = m + 1, \ldots, p - 1$, $p - 1 \leqq M - (m + 1)$, получим

$$(2.9) \qquad \tau h^n \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{m+1}^{p-1} a(x, \Delta) E_n J_2\{b(x, \Delta) E_n\} \leqq$$

$$\leqq C\{\tau h^n \sum_{m+1}^{p-1} \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{|\gamma| \leqq m} |\Delta^\gamma f|^2 + \tau h^n \sum_{|\gamma| \leqq m} \sum_{s=|\gamma|}^{p+m-|\gamma|} \sum_{\Omega_\Delta} |\Delta^\gamma u(s\tau, x')|^2\},$$

где использовано (2.8) и $|u|^2$ означает $\sum_1^{m+1} u_i^2$. Но левая часть (2.9) при $\tau/h = \kappa \leqq \kappa_0$, κ_0 достаточно малая константа, (см. (4.12) в [1]) вследствие леммы 3 больше, чем следующее выражение:

$$(2.10) \qquad C_1 h^n \sum_{\Omega\Delta} \sum_{|\gamma|=m} (|\Delta^\gamma u|^2 + (|\Delta^\gamma u|^2)^{-0})_{x_0=p\tau} -$$

$$- C_2 h^n \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{|\gamma| \leqq m-1} (|\Delta^\gamma u|^2 + (|\Delta^\gamma u|^2)^{-0})_{x_0=p\tau} - C_3 h^n \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{|\gamma|=m} (|\Delta^\gamma u|^2 +$$

$$+ (|\Delta^\gamma u|^2)^{-0})_{x_0=(m+1)\tau} - C_4 \tau h^n \sum_{m+1}^{P} \sum_{\Omega\Delta} \sum_{|\gamma|=m} (|\Delta^\gamma u|^2 + (|\Delta^\gamma u|^2)^{-0}).$$

Для доказательства энергетического неравенства нам понадобится еще несколько лемм.

Лемма 6. *Для любой периодической но x' функции и на сетке имеет место неравенство*

(2.11)

$$h^n \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{\gamma,\delta,s} J_3(|\Delta^\delta \Delta^\gamma u((p + s)\tau, x')|^2 \leqq C_5^\nu\{h^n \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{\gamma,\delta,s} J_3|\Delta^\gamma \Delta^\delta u((m + 1 + s)\tau, x')|^2 +$$

$$+ \tau h^n \sum_{k0=m+1} \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{|\gamma| \leqq m} \sum_{\delta,s} J_3|\Delta^\delta \Delta^\gamma u((k_0 + s)\tau, x')|^2\},$$

где $J_3 u = u + u)^{-0}$, и суммирование происходит по всем $|\gamma| \leqq m - 1$, $|\delta| \leqq \nu$, $\delta_0 = 0$, $|s| \leqq m - |\gamma|$; здесь $\nu \geqq 0$ целое, $m + 1 \leqq p \leqq M$ и константа C_5^ν зависит от $M\tau = T$, но не зависит от u, τ, h.

Эта лемма доказывается аналогично, как лемма 4.1 в [1].

Лемма 7. *Пусть элементы матриц $A_i(x)$, $B(x)$ принадлежат $C^{m,\nu}$, компоненты f и φ принадлежат соответсьвенно $C^{m,\nu}$ и $C^{m+\nu}$, $m \geqq 0$, $\nu \geqq 0$, $\kappa \leqq S < +\infty$,* *где S положительная константа. Тогда решение (2.5), (2.6) удовлетворяет неравенству*

$$(2.12)\qquad h^n \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{|\gamma| \leqq m} \sum_{\delta,s} J_3 |\Delta^\delta \Delta^\gamma u((m+1+s)\tau, x')|^2 \leqq$$

$$\leqq Ch^n \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{|\delta| \leqq \nu, \delta_0 = 0} \{ \sum_{|\gamma| \leqq m} |\Delta^\delta \Delta^\gamma \varphi|^2 + \sum_{s=1}^{2m} \sum_{|\gamma| \leqq m-1, \gamma_0 = 0} |\Delta^\delta \Delta^\gamma f(s\tau, x')|^2 +$$

$$+ \sum_{s=2}^{2m-1} \sum_{|\gamma| \leqq m-2, \gamma_0 = 0} |\Delta^\delta \Delta^\gamma \Delta_0 f(s\tau, x')|^2 + \ldots + \sum_{s=m}^{m+1} |\Delta^\delta \Delta_0^{m-1} f(s\tau, x')|^2 \} = CR_\nu^m$$

где константа C не зависит от f, φ, τ, h, и $\sum_{\delta,s}$ означает суммирование по $|\delta| \leqq \nu$, $\delta_0 = 0$ и $|s| \leqq m - |\gamma|$.

Доказательство. Левая часть (2.12) содержит разностные отношения $\Delta^\delta \Delta^\gamma u$ в точках с $x_0 = k_0\tau$, $k_0 = |\gamma|, \ldots, 2m + 1 - |\gamma|$, $|\gamma| \leqq m$. Из (2.6) вытекает, что для $x_0 = k_0\tau$, $k_0 = 2, \ldots, 2m + 1$, $j = 1, 2, \ldots, m + 1$

$$(2.13)\quad u_j(k\tau, k_1 h, \ldots, k_n h) = \sum_{i=1}^{m+1} \{ \sum_{|\sigma_r| \leqq k_0 - 1} \zeta_\sigma^{i,j}(x)\, \varphi_i[(k_1 + \sigma_1) h, \ldots, (k \ + \sigma_n) h] +$$

$$+ \tau \sum_{s=1}^{k_0 - 1} \sum_{|\sigma_r| \leqq k_0 - s - 1} \varrho_\sigma^{i,j}(x)\, f_i(s\tau, (k_1 + \sigma_1) h, \ldots, (k_n + \sigma_n) h)) \},$$

где $\zeta(x)$ и $\varrho(x)$ функции x, выражающиеся через элементы матриц $A_i(x)$, $B(x)$. Из (2.13) и (2.5) вытекает

$$(2.14)\qquad h^n \sum_{\Omega_\Delta} |u(k_0\tau, x')|^2 \leqq Ch^n \sum_{\Omega_\Delta} |\varphi|^2 + \tau^2 \sum_{\Omega_\Delta}^{2m} |f(s\tau, x')|^2 \}$$

для $k_0 = 0, 1, \ldots, 2m + 1$. Применяя к (2.5) и (2.13) оператор $\Delta^\delta \Delta^\gamma$, ($|\gamma| \leqq m$, $\gamma_0 = 0$, $|\delta| \leqq \nu$, $\delta_0 = 0$), получим

$$(2.15)\qquad h^n \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{|\delta| \leqq \nu, \delta_0 = 0} \sum_{|\gamma| \leqq m, \gamma_0 = 0} |\Delta^\delta \Delta^\gamma u(k_0\tau, x')|^2 \leqq$$

$$\leqq Ch^n \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{|\delta| \leqq \nu, \delta_0 = 0} \{ \sum_{|\gamma| \leqq m} |\Delta^\delta \Delta^\gamma \varphi|^2 + \sum_{s=1}^{2m} \sum_{|\gamma| \leqq m-1, \gamma_0 = 0} |\Delta^\delta \Delta^\gamma f(s\tau, x')|^2 \}$$

для $k_0 = 0, 1, \ldots, 2m + 1$. В (2.15) входят разностные отношения $\Delta^\delta \Delta^\gamma f$ с $|\gamma| \leqq m - 1$, так как f в (2.13) множится на τ, которое вместе с h^{-1} дает ограниченную величину $\kappa \leqq S$. Из (2.6) получим

$$(2.16)\quad h^n \sum_{\Omega_\Delta} |\Delta_0 u(k_0\tau, x')|^2 \leqq Ch^n \sum_{\Omega\Delta} \{|\varphi|^2 + \sum_{n=1}^{n} |\Delta_i \varphi|^2 + \sum_{s=1}^{2m} |f(s\tau, x')|^2 \}$$

для $k_0 = 1, 2, \ldots, 2m$, и применяя к (2.6) оператор $\Delta^\delta \Delta^\gamma$ с $|\gamma| \leqq m - 1$, $|\delta| \leqq \nu$, $\delta_0 = \gamma_0 = 0$

$$(2.17)\qquad h^n \sum_{|\gamma| \leqq \nu, \delta_0 = 0} \sum_{|\gamma| \leqq m-1, \gamma_0 = 0} \sum_{\Omega\Delta} |\Delta_0 \Delta^\delta \Delta^\gamma u(k_0\tau, x')|^2 \leqq$$

$$\leqq Ch^n \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{|\delta| \leqq \nu, \delta_0 = 0} \{ \sum_{|\gamma| \leqq m} |\Delta^\delta \Delta^\gamma \varphi|^2 + \sum_{s=1}^{2m} \sum_{|\gamma| \leqq m-1, \gamma_0 = 0} |\Delta^\delta \Delta^\gamma f(s\tau, x')|^2 \}$$

для $k_0 = 1, 2, \ldots, 2m$. Применяя к (2.6) при $x_0 = k_0\tau$, $k_0 = 2, \ldots, 2m-1$ оператор Δ_0, получим

$$\Delta_0^2 u = -\sum_{i=1}^{n} A_i\Delta_i\Delta_0 u - \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\left(A_i\right)_{x_0}\left(\Delta_i u\right)^{+0} + \left(A_i\right)_{\bar{x}_0}\left(\Delta_i u\right)^{+0}\right) - $$
$$- B\Delta_0 u - \tfrac{1}{2}\left(\left(B_{x_0}u\right)^{+0} + \left(B_{\bar{x}_0}u\right)^{-0}\right) + \Delta_0 f,$$

откуда вытекает

$$(2.18)\quad h^n\sum_{\Omega_\Delta}\left|\Delta_0 u(k_0\tau, x')\right|^2 \leqq Ch^n\sum_{\Omega_\Delta}\Big\{\sum_{i=0}^{n}\left(\left|\Delta_i\Delta_0 u\right|^2 + \left(\left|\Delta_i u\right|^2\right)^{+0} + \left(\left|\Delta_i u\right|^2\right)^{-0}\right) +$$
$$+ \left|\Delta_0 u\right|^2 + \left(\left|u\right|^2\right)^{+0} + \left(\left|u\right|^2\right)^{-0} + \left|\Delta_0 f\right|^2\Big\} \leqq$$
$$\leqq Ch^n\sum_{\Omega_\Delta}\Big\{\sum_{|\gamma|\leqq 2}\left|\Delta^\gamma\varphi\right|^2 + \sum_{s=1}^{2m}\sum_{|\gamma|\leqq 1,\,\gamma_0=0}\left|\Delta^\gamma f(s\tau, x')\right|^2 + \sum_{s=2}^{2m-1}\left(\Delta_0 f(s\tau, x')\right|^2\Big\}$$

для $k_0 = 2, \ldots, 2m-1$. Применяя к (2.6) оператор $\Delta_0\Delta^\gamma\Delta^\delta$ с $|\gamma| \leqq m-2$, $|\delta| \leqq \nu$, $\delta_0 = \gamma_0 = 0$, получим

$$(2.19)\quad h^n\sum_{\Omega_\Delta}\sum_{|\delta|\leqq\nu,\,\delta_0=0}\sum_{|\gamma|\leqq m-2,\,\gamma_0=0}\left|\Delta^\delta\Delta^\gamma\Delta_0^2 u(k_0\tau, x')\right|^2 \leqq$$
$$\leqq Ch^n\sum_{\Omega_\Delta}\sum_{|\delta|\leqq\nu,\,\delta_0=0}\Big\{\sum_{|\gamma|\leqq m}\left|\Delta^\delta\Delta^\gamma\varphi\right|^2 + \sum_{|\gamma|\leqq m-1,\,\gamma_0=0}\sum_{s=1}^{2m}\left|\Delta^\delta\Delta^\gamma f(s\tau, x')\right|^2 +$$
$$+ \sum_{|\gamma|\leqq m-2,\,\gamma_0=0}\sum_{s=2}^{2m}\Delta^\delta\Delta^\gamma\Delta_0 f(s\tau, x')^2|\Big\}$$

для $k_0 = 2, \ldots, 2m-1$.

Далее будем доказывать лемму по индукции. Пусть $L+1 \leqq m$, и пусть для $l \leqq L$ имеет место

$$(2.20)\quad h^n\sum_{\Omega_\Delta}\sum_{|\gamma|\leqq m-l,\,\gamma_0=0}\sum_{|\delta|\leqq\nu,\,\delta_0=0}\left|\Delta^\delta\Delta^\gamma\Delta_0^l u(k_0\tau, x')\right|^2 \leqq$$
$$\leqq Ch^n\sum_{\Omega_\Delta}\sum_{|\delta|\leqq\nu,\,\delta_0=0}\Big\{\sum_{|\gamma|\leqq m}\left|\Delta^\delta\Delta^\gamma\varphi\right|^2 + \sum_{|\gamma|\leqq m-1,\,\gamma_0=0}\sum_{s=1}^{2m}\left|\Delta^\delta\Delta^\gamma f(s\tau, x')\right|^2 +$$
$$+ \sum_{|\gamma|\leqq m-2,\,\gamma_0=0}\sum_{s=2}^{2m-1}\left|\Delta^\delta\Delta^\gamma\Delta_0 f(s\tau, x')\right|^2 + \ldots + \sum_{|\gamma|\leqq m-l,\,\gamma_0=0,}\sum_{s=l}^{2m+1-l}\left|\Delta^\delta\Delta^\gamma\Delta_0^{l-1} f(s\tau, x')\right|^2\Big\}$$

для $x_0 = k_0\tau$, $k_0 = l, \ldots, 2m+1-l$. Покажем, что (2.20) выполняется и для $l = L+1$. Применим к (2.6) при $x_0 = k_0\tau$, $k_0 = L+1, \ldots, 2m+1-(L+1)$ оператор $\Delta^\delta\Delta^\gamma\Delta_0^L$, $|\gamma| \leqq m-(L+1)$, $|\delta| \leqq \nu$, $\gamma_0 = \delta_0 = 0$. Получим

$$(2.21)\quad h^n\sum_{\Omega_\Delta}\left|\Delta^\delta\Delta^\gamma\Delta_0^{L+1} u(k_0\tau, x')\right|^2 \leqq$$
$$\leqq Ch^n\sum_{\Omega_\Delta}\sum_{|\zeta|\leqq\nu,\,\zeta_0=0}\Big\{\sum_{i=1}^{n}\sum_{|\eta|\leqq m-L-1,\,\eta_0=0}\Big(\left|\Delta^\xi\Delta^\eta\Delta_i\Delta_0^L u(k_0\tau, x')\right|^2 +$$
$$+ \sum_{|s|\leqq 1}\left|\Delta^\xi\Delta^\eta\Delta_i\Delta_0^{L-1} u((k_0+s)\tau, x')\right|^2 + \ldots + \sum_{|s|\leqq L}\left|\Delta^\xi\Delta^\eta\Delta_i u((k_0+s)\tau, x')\right|^2\Big) +$$
$$+ \sum_{|\eta|\leqq m-L-1,\,\eta_0=0}\Big(\left|\Delta^\xi\Delta^\eta\Delta_0^L u(k_0\tau, x')\right|^2 + \sum_{|s|\leqq 1}\left|\Delta^\xi\Delta^\eta\Delta_0^{L-1} u((k_0+s)\tau, x')\right|^2 + \ldots +$$
$$+ \sum_{|s|\leqq L}\left|\Delta^\xi\Delta^\eta u((k_0+s)\tau, x')\right|^2\Big) + \sum_{|\eta|\leqq m-L-1,\,\eta_0=0}\sum_{s=L+1}^{2m-L}\left|\Delta^\xi\Delta^\eta\Delta_0^L f\right|^2\Big\}.$$

Оценивая правую часть (2.20) с помощью (2.19), получим (2.19) для $C = L + 1$. Лемма доказана.

Вернемся теперь к (2.9) и (2.10). Если обозначить

$$y(p\tau) = h^n \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{|\gamma| \leqq m} \sum_{|s| \leqq m - |\gamma|} J_3 |\Delta^\gamma u((p + s)\tau, x')|^2, \tag{2.22}$$

то с помощью лемм 6 и 4 получим из (2.9) и (2.10) неравенство

$$y(p\tau) \leqq C\{y((m + 1)\tau) + \tau h^n \sum_{m+1}^{p-1} \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{|\gamma| \leqq m} |\Delta^\gamma f|^2\} \tag{2.23}$$

для $p = m + 1, \ldots, M - m$. Из (2.23) с помощью леммы 7 ($\nu = 0$) вытекает

Лемма 8. *Если элементы матриц $A_i(x)$, $B(x)$ и компоненты $f(x)$ функции из $C^m(Q_T)$, и компоненты $\varphi(x')$ из $C^m(\Omega)$, то при $\kappa \leqq \kappa_0$, где κ_0 достаточно малая постоянная, решение* (2.5) *и* (2.6) *удовлетворяет неравенству*

$$\begin{aligned} h^n \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{|\gamma| \leqq m} \sum_{|s| \leqq m - |\gamma|} J_3 |\Delta^\gamma u((k_0 + s)\tau, x')|^2 \leqq \\ \leqq C\{R_0^m + \tau h^n \sum_{m+1}^{k_0 - 1} \sum_{|\gamma| \leqq m} |\Delta^\gamma f|^2\} \quad \text{для} \quad k_0 = m + 1, \ldots, M - m. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Применением к (2.7) оператора Δ^δ с $|\delta| \leqq \nu$, $\delta_0 = 0$, и с помощью лемм 3, 4 и 6 доказывается и следующая лемма.

Лемма 9. *Пусть для $A_i(x)$, $B(x)$, f и φ выполнены предположения леммы 7, $m \geqq 1$, тогда при $\kappa \leqq \kappa_0$ для решения* (2.5) *и* (2.6) *имеет место оценка*

$$\begin{aligned} h^n \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{|\delta| \leqq \nu, \delta_0 = 0} \sum_{|\gamma| \leqq m} \sum_{|s| \leqq m - |\gamma|} J_3 |\Delta^\delta \Delta^\gamma u((k_0 + s)\tau, x')|^2 \leqq \\ \leqq C\{R_\nu^m + \tau h^n \sum_{m+1}^{k_0 - 1} \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{|\delta| \leqq \eta, \delta_0 = 0} \sum_{|\gamma| \leqq m} |\Delta^\delta \Delta^\gamma f|^2\} \end{aligned} \tag{2.25}$$

для $k_0 = m + 1, \ldots, M - m$.

Из уравнений (2.7) можем с помощью леммы 9 ($\nu = 1$) оценить также $\Delta_0^{m+1} u$ и получить следующую лемму.

Лемма 10. *В предположениях леммы 9 при $\nu = 1$ для решения* (2.5) *и* (2.6) *выполнено неравенство*

$$\begin{aligned} \tau h^n \sum_{s = |\gamma|}^{M - |\gamma|} \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{|\gamma| \leqq m+1} |\Delta^\gamma u(s\tau, x')|^2 \leqq \\ \leqq C\{R_1^m + \tau h^n \sum_{m+1}^{M - m - 1} \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{|\gamma| \leqq m+1, \gamma_0 \leqq m} |\Delta^\gamma f|^2\}. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Построим теперь функции $\overline{\Delta^\alpha u}$ следующим образом:

$\overline{\Delta^\alpha u} = (\Delta^\alpha u)_\Delta$ в $Q_{T,\delta}$ для $|\alpha| \leqq 1$,

$\overline{\Delta^\alpha u} = (\Delta^\alpha u)_\Delta$ для $|\alpha|\,\tau \leqq x_0 < (M + 1 - |\alpha|)\,\tau$, $|\alpha| > 1$,

$\overline{\Delta^\alpha u} = 0$ для $0 \leqq x_0 < |\alpha|\,\tau$ и $(M + 1 - |\alpha|)\,\tau \leqq x_0 \leqq M\tau$, $|\alpha| > 1$.

Теперь мы в состоянии доказать основную теорему этого пункта.

Теорема 2. *Пусть элементы матриц $A_i(x)$, $B(x)$ и компоненты $f(x)$ функции из $C^{m,1}$, компоненты $\varphi(x')$ из C^{m+1}, $m \geqq 1$. Тогда при $\kappa \leqq \kappa_0$, где κ_0 достаточно малая константа, функции $\bar{u}$ сходятся при $\tau, h \to 0$ слабо в $L_2(Q_T)$ к функции $u \in H^{m+1}(Q_T)$, которая удовлетворяет системе (2.1) почти всюду в Q_T и начальным условиям (2.2) в среднем. Функции $\overline{\Delta^\alpha u}$ сходятся слабо в $L_2(Q_T)$ к $D^\alpha u$. Для u имеет место оценка*

$$\|u\|^2_{H^{m+1}(Q_T)} \leqq C\{\|\varphi\|^2_{H^{m,1}(\Omega)} + \|f\|^2_{H^{m,1}(Q_T)}\}, \tag{2.27}$$

где постоянная C не зависит от f и φ.

Доказательство. Из (2.26) вытекает слабая компактность в $L_2(Q_T)$ функций $\overline{\Delta^\alpha u}$ при $|\alpha| \leqq m + 1$ и в $L_2(Q_{T,\delta})$ для $|\alpha| \leqq 1$. Также, как при доказательстве теоремы 3 в [1] доказывается, что $\lim \overline{\Delta^\alpha u} = D^\alpha u$, где $u = \lim \bar{u}$ и $D^\alpha u$ обобщенная производная. Также, как в [1] доказывается, что u почти вюду в Q_T удовлетворяет системе (2.1) и системе

$$B_1(x, D)\,[D_0 + \sum A_i(x)\,D_i + B(x)]\,u = B_1(x, D)\,f(x), \tag{2.28}$$

и начальным условиям (2.2) в среднем. Последнее вытекает из того, что $u \in H^1(Q_{T,\delta})$. (2.27) вытекает из сходимости правой части (2.26) к

$$C_1\{\|\varphi\|^2_{H^{m+1}(\Omega)} + \|f(0, x')\|^2_{H^{m-1,1}(\Omega)} + \|f\|^2_{H^{m,1}(Q_T)}$$

и теоремы вложения

$$\|f(0, x')\|^2_{H^{m-1,1}(\Omega)} \leqq C_2\|f\|^2_{H^{m,1}(Q_T)}.$$

Так как u удовлетворяет (2.2) для $x_0 = 0$, $u \in H^{m+1}(Q_T)$ и удовлетворяет системе (2.1) почти всюду в Q_T, то ее производные $D_0^{\beta_0} u|_{x_0=0} = \varphi_{\beta_0}(x')$, $\beta_0 = 0, 1, \ldots, \ldots, m$, где $\varphi_0 = \varphi$ и $\varphi_{\beta_0}(\beta_0 > 0)$ выражаются с помощью (2.1) и (2.2) однозначно через функции f и φ и их производные. Для системы (2.28) можно доказать теорему, аналогичную теореме 4.1 из [3], откуда следует единственность функции u, построенной в теореме 2. Из этого вытекает не только компактность, но и сходимость функций $\overline{\Delta^\alpha u}$ при τ, $h \to 0$. Этим теорема доказана.

Замечание. Аналогично, как в теореме 3 в [1], можно обобщить теорему 2 для $f \in H^{m,1}(Q_T)$, $\varphi \in H^{m+1}(\Omega)$.

Следствие. *Если $m + 1 = [n + 1/2] + 2 + r$ $(r \geqq 0)$, то решение задачи* (2.1), (2.2), *построенное в теореме* 2, *будет принадлежать $C^{1+r}(Q_T)$.* Это вытекает из теорем вложения.

Остается выяснить вопрос о существовании классического решения для $m \leqq [\frac{1}{2}(n + 1)]$. Имеет место

Теорема 3. *Пусть элементы матриц $A_i(x)$, $B(x)$ принадлежат $C^{m+\nu-1,1}$, $\varphi \in H^{m+\nu}(\Omega)$, $f \in H^{m+\nu-1,1}(Q_T)$ $(\nu \geqq 0,\ m \geqq 1)$. Тогда решение задачи* (2.1), (2.2), *построенное в теореме 2, будет принадлежать $H^{m+\nu}(Q_T)$ и удовлетворять неравенству*

$$\|u\|_{H^{m+\nu}(Q_T)} \leqq C\{\|\varphi\|_{H^{m+\nu}(\Omega)} + \|f\|_{H^{m+\nu-1,1}(Q_T)}\}. \tag{2.29}$$

Доказательство. Дадим доказательство для случая, когда $\varphi \in C^{m+\nu}$, $f \in C^{m+\nu-1,1}$. Из леммы 9 получим оценку

(2.30)
$$h^n \sum_{\Omega_\Delta} \left|\Delta^\delta \Delta^\gamma u(k_0\tau, x')\right|^2 \leqq C\{R_\nu^m + \tau h^n \sum_{s=m+1}^{M-(m+1)} \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{|\eta| \leqq \nu, \eta_0=0} \sum_{|\zeta| \leqq m} \left|\Delta^\eta \Delta^\xi f(s\tau, x')\right|^2\}$$

для $|\delta| \leqq \nu$, $\delta_0 = 0$, $|\gamma| \leqq m$ и $k_0 = |\gamma|, \ldots, M - |\gamma|$. Применяя к (2.7) оператор $\Delta_0^l \Delta^\delta$ с $l = 0, 1, \ldots, \nu - 1$ и $|\delta| \leqq \nu - (l+1)$, $\delta_0 = 0$ при $x_0 = k_0\tau$ с $k_0 = m + 1 + l, \ldots, M - (m + 1 + l)$, получим оценку

$$\begin{aligned}(2.31)\qquad \tau h^n \sum_{s=m+1+l}^{M-(m+1+l)} \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{|\gamma| \leqq \nu-(l+1), \gamma_0=0} &\left|\Delta_0^{m+l+1} \Delta^\gamma u(s\tau, x')\right|^2 \leqq \\ \leqq C\{R_\nu^m + \tau h^n \sum_{s=m+1}^{M-(m+1)} \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{|\eta| \leqq \nu, \eta_0=0} &\sum_{|\zeta| \leqq m} \left|\Delta^\eta \Delta^\xi f(s\tau, x')\right|^2 + \\ + \tau h^n \sum_{s=m+2}^{M-(m+2)} \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{|\eta| \leqq \nu-2, \eta_0=0} &\sum_{|\zeta| \leqq m} \left|\Delta_0 \Delta^\eta \Delta^\xi f(s\tau, x')\right|^2 + \ldots + \\ + \tau h^n \sum_{s=m+1+l}^{M-(m+1+l)} \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{|\eta| \leqq \nu-(l+1) \eta_0=0} &\sum_{|\zeta| \leqq m} \left|\Delta_0^l \Delta^\eta \Delta^\xi f(s\tau, x')\right|^2\}.\end{aligned}$$

Из (2.30) и (2.31) вытекает для $|\gamma| \leqq m + \nu$

$$\begin{aligned}(2.32)\qquad \tau h^n \sum_{s=|\gamma|}^{M-|\gamma|} \sum_{\Omega_\Delta} &\left|\Delta^\gamma u(s\tau, x')\right|^2 \leqq \\ \leqq C\{R_\nu^m + \tau h^n \sum_{s=m+1}^{M-(m+1)} \sum_{|\eta| \leqq \nu, \eta_0=0} &\sum_{|\zeta| \leqq m} \left|\Delta^\eta \Delta^\xi f(s\tau, x')\right|^2 + \\ + \tau h^n \sum_{s=m+2}^{M-(m+2)} \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{|\eta| \leqq \nu-2, \eta_0=0} &\sum_{|\zeta| \leqq m} \left|\Delta_0 \Delta^\eta \Delta^\xi f(s\tau, x')\right|^2 + \ldots + \\ + \tau h^n \sum_{s=m+\nu}^{M-(m+\nu)} \sum_{\Omega\Delta} &\sum_{|\zeta| \leqq m} \left|\Delta_0^{\nu-1} \Delta^\xi f(s\tau, x')\right|^2\}.\end{aligned}$$

Из (2.32) вытекает слабая компактность в $L_2(Q_T)$ функций $\overline{\Delta^\alpha u}$ для $|\alpha| \leqq m + \nu$, что доказывает первую часть теоремы 3. Кроме того при $\tau, h \to 0$ правая часть (2.32) сходится к величине, которая мажорируется выражением

$$C_1\{\|\varphi\|^2_{H^{m+\nu}(\Omega)} + \|f\|^2_{H^{m+\nu-1,1}(Q_T)}\}.$$

Теорема доказана.

Теорема 4. *Если* $m \leqq [\frac{1}{2}(n+1)]$ *и* $\nu = [\frac{1}{2}(n+1)] + 2 - m$, *то решение, построенное в тереме* 2, *принадлежит* $C^1(Q_T)$ *и имеет место оценка*

$$(2.33)\qquad \|u\|_{C^1(Q_T)} \leqq C\{\|\varphi\|_{H^{[1/2(n+1)]+2}(\Omega)} + \|f\|_{H^{[1/2(n+1)]+1,1}(Q_T)}.$$

Аналогично можно использовать и следующую неявную схему. Функция v определяется при $x_0 = k_0\tau$, $k_0 \leqq 0$ равенством

$$(2.34)\qquad v(k_0\tau, k_1h, \ldots, k_nh) = \varphi(k_1h, \ldots, k_nh)$$

и при $x_0 = k_0\tau$, $k_0 \geqq 1$ из системы разностных уравнений

$$\bar{\Delta}_0 v + \sum A_i(x) \bar{\Delta}_i v + B(x) v = f(x) \tag{2.35}$$

и условий периодичности по x'. (2.35) получается при $x = \{k_0\tau, k_1h, \ldots, k_nh\}$ с $k_0 \geqq 0$, $0 \leqq k_i \leqq N_\Delta - 1$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ из (2.1) заменой операторов D_j операторами $\bar{\Delta}_j$, $j = 0, 1, \ldots, n$.

Литература

[1] *И. Копачек:* Решение задачи Коши для линейных гиперболических уравнений методом конечных разностей. Чехословацкий мат. журнал, в печати.

[2] *Л. Гординг:* Задача Коши для гиперболических уравнений. Москва, 1961.

[3] *Л. Гординг:* Прямое решение задачи Коши для гиперболических уравнений. Математика, *2* : 1 (1958), 81–95.

[4] *О. А. Ладыженская:* Смешанная задачи для гиперболического уравнения. Москва, 1953.

[5] *О. А. Ладыженская:* Решение задачи Коши для гиперболических систем методом конечных разностей. Ученые записи ЛГУ, вып. *23* (1952), 192–246.

[6] *И. Г. Петровский:* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Москва-Ленинград, 1952.

Výtah

ŘEŠENÍ CAUCHYOVA PROBLÉMU PRO KVASILINEÁRNÍ HYPERBOLICKÉ ROVNICE A LINEÁRNÍ HYPERBOLICKÉ SOUSTAVY METODOU SÍTÍ

JIŘÍ KOPÁČEK, Praha

V práci je dokázána stabilita dvou diferenčních schemat (explicitního a implicitního) pro řešení Cauchyova problému pro kvasilineární hyperbolické rovnice libovolného řádu a lineární hyperbolické soustavy prvního řádu. Pro kvasilineární rovnice je také dokázána existence klasického řešení a pro soustavy existence řešení skoro všude i klasického řešení.

Summary

ON FINITE DIFFERENCE SOLUTIONS OF CAUCHY'S PROBLEM FOR QUASILINEAR HYPERBOLIC EQUATIONS AND LINEAR HYPERBOLIC SYSTEMS

JIŘÍ KOPÁČEK, Praha

The stability of two difference schemes (implicit and explicit) for the solution of Cauchy's problem for quasilinear hyperbolic equations of arbitrary order and for linear hyperbolic systems of the first order is proved. Also the existence of a classical solution of a quasilinear equation, and the existence of a solution almost everywhere and of a classical solution of linear systems is demonstrated.