Jiří Veselý

O jedné smíšené okrajové úloze teorie analytických funkcí

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 91 (1966), No. 3, 320--336

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117569

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 91 (1966), Praha

O JEDNÉ SMÍŠENÉ OKRAJOVÉ ÚLOZE TEORIE ANALYTICKÝCH FUNKCÍ

JIŘÍ VESELÝ, Praha

(Došlo dne 12. srpna 1965)

Při studiu okrajových úloh teorie analytických funkcí se zpravidla předpokládá „dostatečná hladkost“ křivek, tvořících hranici uvažované oblasti. Často se k řešení těchto úloh užívá Fredholmovy metody, pro kterou se zpravidla tento předpoklad zavádí. V tomto článku vyjádříme řešení jisté smíšené okrajové úlohy pomocí integrálů typu

$$\int_K \frac{F(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta \,, \tag{1}$$

kde K je rektifikovatelná Jordanova křivka a F spojitá reálná funkce na této křivce. Pro libovolnou spojitou funkci F nemůže však ani předpoklad hladkosti křivky K zaručit existenci spojitého rozšíření funkce vyjádřené integrálem (1) z vnitřku křivky K na K. V souvislosti s tím se studují oblasti ohraničené křivkami, splňujícími další omezení, na příklad tzv. Ljapunovovy podmínky.

V článcích [5] a [8] jsou studovány okrajové úlohy teorie harmonických funkcí; výsledků zde dosažených lze použít pro zobecnění řešení úlohy řešené též v [1] a [2]. V práci [1] naznačuje autor možnost převedení složitějších úloh na tuto úlohu, v práci [2] je popsána aplikace této úlohy v hydrodynamice. V tomto článku jsou formulovány nutné a postačující podmínky pro spojité rozšíření reálné a imaginární části studované funkce z uvažované oblasti na části hranice, kladené na křivky tuto hranici vytvářející. Je zde vyšetřen Fredholmův poloměr operátoru použitého k řešení této úlohy a udána podmínka, zaručující existenci řešení úlohy pro dostatečně širokou třídu hraničních podmínek.

Pro formulaci úlohy zavedeme následující označení. Nechť E_1 značí množinu všech reálných čísel, E_2 množinu všech komplexních čísel, $K_j \subset E_2$ pro $0 \leqq j \leqq q$ jest systém Jordanových křivek s vnitřky D_j, přičemž pro $0 \leqq j < k \leqq q$ platí

$$\bar{D}_j \cap \bar{D}_k = \emptyset \,, \quad D_0 \supset \bigcup_{j=1}^{q} \bar{D}_j \,. \tag{2}$$

Křivka K_0 jest orientována kladně, křivky K_j, $j = 1, \ldots, q$ záporně. Položíme

(3) $$D = D_0 - \bigcup_{j=1}^{q} \bar{D}_j$$

a zvolíme pevně přirozené p, $1 \leqq p \leqq q$. Nechť $L' = \bigcup_{j=0}^{p-1} K_j$, $L'' = \bigcup_{j=p}^{q} K_j$, $L = L' \cup L''$. Je-li M kompaktní, $M \subset E_2$, označíme symbolem $C(M)$ Banachův prostor všech spojitých reálných funkcí na M s normou $\|F\| = \sup_{t \in M} |F(t)|$. Dále nechť Q značí množinu všech funkcí z $C(L)$, které jsou konstantní na každé komponentě L, Q_0 množinu všech funkcí z Q, které nabývají na křivce K_0 pouze nulové hodnoty. Zřejmě je $Q_0 \subset Q \subset C(L)$. Smíšenou Dirichletovu úlohu, kterou se budeme zabývat, lze formulovat ve tvaru:

Úloha 1. K dané funkci $G \in C(L)$ najděte jednoznačnou analytickou funkci Φ v oblasti D tak, aby existovaly konečné limity

$$\lim_{\substack{z \to \zeta \\ z \in D}} \operatorname{Re} \Phi(z) = \tilde{\Phi}(\zeta) \quad \text{pro} \quad \zeta \in L',$$

$$\lim_{\substack{z \to \zeta \\ z \in D}} \operatorname{Im} \Phi(z) = \tilde{\Phi}(\zeta) \quad \text{pro} \quad \zeta \in L''$$

a platil vztah $\tilde{\Phi} - G \in Q$.

Řešení této úlohy budeme hledat ve speciálním tvaru stejně jako v [1] či [2]. Proto též učiníme další předpoklad, že totiž $K_0, K_1, \ldots, K_q$ jsou rektifikovatelné křivky. Budeme studovat funkce $\Phi(z) = \Psi F(z)$ pro $F \in C(L)$, $z \in E_2 - L$ typu

(4) $$\Psi F(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{L'} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta + \frac{1}{\pi} \int_{L''} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta .$$

Pro řešení úlohy 1 ve tvaru (4) je nutno najít k funkci $G \in C(L)$ „hustotu" F, tj. vyšetřiti následující úlohu:

Úloha 2. K dané funkci $G \in C(L)$ určete funkci $F \in C(L)$ tak, aby funkce $\Psi F = \Phi$ určená vztahem (4) byla řešením úlohy 1.

Z hlediska určení chování funkce ΨF v okolí L a zaručení existence potřebných limit je vhodné vyšetřit následující úlohu:

Úloha 3. Nechť ΨF je definována vztahem (4). Najděte nutné a postačující podmínky k tomu, aby pro každou funkci $F \in C(L)$ existovaly vlastní limity

(5) $$\lim_{\substack{z \to \zeta \\ z \in D}} \operatorname{Re} \Psi F(z) = \Lambda F(\zeta) \quad \text{pro} \quad \zeta \in L',$$

$$\lim_{\substack{z \to \zeta \\ z \in D}} \operatorname{Im} \Psi F(z) = \Lambda F(\zeta) \quad \text{pro} \quad \zeta \in L''.$$

Poznámka 1. Z existence vlastních limit (5) pro všechna $\zeta \in L$ plyne spojitost funkce AF na L, tj. $AF \in C(L)$.

Začneme řešením úlohy 3. Zvolíme následující označení. Nechť je K rektifikovatelná Jordanova křivka v E_2, vytvořená komplexní spojitou periodickou funkcí ψ reálné proměnné t s periodou $2k$, $k > 0$, s následujícími vlastnostmi:

$$
\begin{aligned}
&\psi(\langle 0, 2k\rangle) = K, \ \psi(t + 2k) = \psi(t) \quad \text{pro} \quad t \in E_1\,, \\
&0 < |t_1 - t_2| < 2k \Rightarrow \psi(t_1) \neq \psi(t_2) \quad \text{pro} \quad t_1, t_2 \in E_1\,.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Z rektifikovatelnosti křivky K vyplývá při běžném způsobu definice variace funkce na intervalu var $[\psi; I] < +\infty$ pro každý omezený interval $I \subset E_1$. Přiřadíme každé funkci $F \in C(K)$ předpisem $f(t) = F(\psi(t))$ spojitou reálnou periodickou funkci f na E_1 s periodou $2k$. Vezmeme-li za normu na množině všech takových funkcí maximum funkce na E_1 a označíme-li takto vzniklý prostor C_{2k}, je uvedeným předpisem vyjádřený vzájemně jednoznačný vztah mezi funkcemi f, F izometrickým izomorfismem

$$C(K) \leftrightarrow C_{2k}\,. \tag{7}$$

Každé funkci $F \in C(K)$ přiřadíme funkci $\Psi_K F$, definovanou pro $z \in E_2 - K$ předpisem

$$\Psi_K F(z) = \int_K \frac{F(\zeta)}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\zeta = \int_0^{2k} \frac{F(\psi(t))}{\psi(t) - z}\, \mathrm{d}_t\, \psi(t)\,, \tag{8}$$

přičemž vzhledem k (7) budeme používat vždy vhodnějšího z obou vyjádření. V posledním integrálu lze integrovat přes libovolný interval $I \subset E_1$ délky $2k$.
Pro $z \notin K$ lze psáti

$$\psi(t) - z = |\psi(t) - z| \,.\, \exp i\, \vartheta_z(t)\,, \tag{9}$$

kde $\vartheta_z(z)$ označuje spojitou větev arg $[\psi(t) - z]$ na E_1. Dále označíme pro $F \in C(K)$, $z \in E_2 - K$

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Re} \Psi_K F(z) &= \int_K \frac{F(\zeta)}{|\zeta - z|}\, \mathrm{d}|\zeta - z| = \int_0^{2k} \frac{F(\psi(t))}{|\psi(t) - z|}\, \mathrm{d}_t|\psi(t) - z| = M_K(z, F)\,, \\
\operatorname{Im} \Psi_K F(z) &= \int_0^{2k} F(\psi(t))\, \mathrm{d}_t\, \vartheta_z(t) = W_K(z, F)\,.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Nechť A, B jsou dvě množiny v E_2, pak dist $(A, B) = \inf \{|z_1 - z_2|;\ z_1 \in A,\ z_2 \in B\}$; je-li $A = \{z_1\}$, píšeme kratčeji dist (A, B) = dist (z_1, B). Položme $B(M) = \{F; F \in C(M), \|F\| \leq 1\}$.

Lemma 1. *Je-li $A \subset E_2$,* dist $(A, K) > 0$, *pak všechny funkce $M_K(z, F)$, $W_K(z, F)$ pro $F \in B(K)$ jsou stejně spojité a stejnoměrně omezené na A.*

Důkaz tohoto tvrzení vyplývá z lemmatu 2.1 v [8]. Nechť dále Int K značí omezenou komponentu $E_2 - K$, tj. vnitřek křivky K, Ext K neomezenou komponentu $E_2 - K$. Pro $z \notin K$ zavádíme označení ind (z, K) pro index bodu z vzhledem ke křivce K, tj.

$$\operatorname{ind}(z, K) = \frac{1}{2\pi} \Delta_u \arg [\psi(u) - z; \langle t, t + 2k \rangle] .$$

Označíme ještě symbolem σ hodnotu ind (z, K) na Int K, tj.

$$\operatorname{ind}(z, K) = \sigma \tag{11}$$

Je-li $z \in E_2$, $\alpha \in \langle 0, 2\pi \rangle$, $R \in (0, +\infty \rangle$, označíme $\mu_R^K(z, \alpha)$ počet $(0 \leqq \mu_R^K(z, \alpha) \leqq +\infty)$ bodů množiny $K \cap \{z + r \exp i\alpha; 0 < r < R\}$. Funkce $\mu_R^K(z, \alpha)$ je lebesgueovsky měřitelná funkce vůči proměnné α (viz [6]) a lze položiti

$$v_R^K(z) = \int_0^{2\pi} \mu_R^K(z, \alpha) \, d\alpha . \tag{12}$$

Pro $R = +\infty$ budeme psáti pouze $v^K(z)$. Označíme-li D_K libovolnou z komponent $E_2 - K$, platí:

Lemma 2. *Nutnou a postačující podmínkou pro stejnoměrnou spojitost funkcí $W_K(z, F)$ na D_K pro všechny funkce $F \in C(K)$ je vztah*

$$\sup_{\zeta \in K} v^K(\zeta) < +\infty . \tag{13}$$

Důkaz tohoto tvrzení vyplývá z věty 2.10 v [5]. Stejnoměrná spojitost funkcí $W_K(z, F)$ $(F \in C(K))$ na D_K je ekvivalentní s existencí vlastních limit

$$\lim_{\substack{z \to \zeta \\ z \in D_K}} W_K(z, F) \quad \text{pro} \quad \zeta \in K . \tag{14}$$

Pro výpočet limity (14) zavedeme funkci $\vartheta_\zeta(t)$, $\zeta \in K$, $t \in E_1$. Nechť $\zeta \in K$; zvolíme libovolně $t_0 \in \psi^{-1}(\zeta) = \{t_0; t_0 \in E_1, \psi(t_0) = \zeta\}$. V $(t_0, t_0 + 2k)$ existuje vzhledem k (6) spojitá větev $\vartheta_\zeta(t)$ argumentu $\arg [\psi(t) - \zeta]$. Z (13) plyne (viz [8]) var $[\vartheta_\zeta(t); (t_0, t_0 + 2k)] < +\infty$ a existují tudíž vlastní limity

$$\lim_{t \to t_0+} \vartheta_\zeta(t) = \vartheta_\zeta(t_0+) , \quad \lim_{t \to (t_0 + 2k)^-} \vartheta_\zeta(t) = \vartheta_\zeta((t_0 + 2k) -) .$$

Položíme $\vartheta_\zeta(t_0) = \vartheta_\zeta(t_0+)$ a takto definovanou funkci $\vartheta_\zeta(t)$ rozšíříme z $\langle t_0, t_0 + 2k)$ na E_1 předpisem

$$\vartheta_\zeta(t + 2k) = \vartheta_\zeta(t) + \sigma\pi , \tag{15}$$

kde σ je určeno vztahem (11). I pro pevně zvolené $\zeta \in K$ není funkce $\vartheta_\zeta(t)$ určena jednoznačně, nýbrž jen až na jistou aditivní konstantu. Funkce $\vartheta_z(t)$ pro $z \notin K$ byla spojitá v E_1, funkce $\vartheta_\zeta(t)$ pro $\zeta \in K$ v E_1 obecně spojitá nemusí být. Položíme

$$W_K(\zeta, F) = \int_0^{2k} F(\psi(t))\, d_t\, \vartheta_\zeta(t)\,. \tag{16}$$

Hodnota $W_K(\zeta, F)$ je určena jednoznačně, nezávisle na výběru $\vartheta_\zeta(t)$. Potom platí (viz věta 1.2 v [8]):

Lemma 3. *Nechť platí* (13). *Pak pro libovolnou funkci $F \in C(K)$ a libovolné $\zeta \in K$ platí*

$$\lim_{\substack{z \to \zeta \\ z \in D_K}} W_K(z, F) = W_K(\zeta, F) \pm \sigma\pi\, F(\zeta)\,, \tag{17}$$

kde „+“ resp. „−“ platí při $D_K = \operatorname{Int} K$ resp. $D_K = \operatorname{Ext} K$.

Provedené úvahy lze snadno zobecniti na oblasti, jejichž hranice je složena z konečně mnoha rektifikovatelných Jordanových křivek, speciálně tedy pro systém L. Nechť ψ_{Kj}, M_{Kj}, W_{Kj} jsou definovány analogicky jako odpovídající funkce ve vztazích (8) a (10). Pro libovolnou $F \in C(L)$ definujme

$$M_{L'}(z, F) = \sum_{j=0}^{p-1} M_{K_j}(z, F)\,, \quad W_{L'}(z, F) = \sum_{j=0}^{p-1} W_{K_j}(z, F)\,, \quad z \in E_2 - L'\,, \tag{18}$$

$$M_{L''}(z, F) = \sum_{j=p}^{q} M_{K_j}(z, F)\,, \quad W_{L''}(z, F) = \sum_{j=p}^{q} W_{K_j}(z, F)\,, \quad z \in E_2 - L''\,.$$

Lemma 4. *Nechť $A \subset E_2$,* $\operatorname{dist}(A, L') > 0$. *Potom všechny funkce $M_{L'}(z, F)$, $W_{L'}(z, F)$ pro $F \in B(L)$ jsou stejně spojité a stejnoměrně omezené na A. Pro* $\operatorname{dist}(A, L'') > 0$ *platí analogické tvrzení o $M_{L''}(z, F)$, $W_{L''}(z, F)$, $(F \in B(L))$.*

Důkaz vyplývá z lemmatu 1.

Položme

$$v_R^{L'}(z) = \sum_{j=0}^{p-1} v_R^{K_j}(z)\,, \quad v_R^{L''}(z) = \sum_{j=p}^{q} v_R^{K_j}(z)\,, \quad v_R^{L}(z) = v_R^{L'}(z) + v_R^{L''}(z)\,. \tag{19}$$

Lemma 5. *Buď P libovolná množina, $P \subset E_2 - L'$, $L' \subset \bar{P}$. K tomu, aby pro libovolnou funkci $F \in C(L)$ funkce $W_{L'}(z, F)$ byla stejnoměrně spojitou funkcí proměnné z na P je nutné a stačí, aby platilo*

$$\sup_{\zeta \in L'} v^{L'}(\zeta) < +\infty\,. \tag{20}$$

Podobné tvrzení platí i pro $W_{L''}(z, F)$, přičemž podmínka má tvar

$$\sup_{\zeta \in L''} v^{L''}(\zeta) < +\infty\,. \tag{20'}$$

Důkaz vyplývá též z věty 2.10 v [5].

Poznámka 2. Vzhledem k definici (19) a vzhledem k vlastnostem funkcí v^L, $v^{L'}$, $v^{L''}$ je současná platnost podmínek (20) a (20') ekvivalentní podmínce

$$\sup_{\zeta \in L} v^L(\zeta) < +\infty . \tag{21}$$

Plyne to přímo z definice (19) a odhadů $v^{L'}(\zeta)$, $v^{L''}(\zeta)$ pomocí $v^L(\zeta)$. Na příklad pro $v^{L'}(\zeta)$ platí

$$\sup_{\zeta \in L'} v^{L'}(\zeta) \leqq \sup_{\zeta \in L'} v^L(\zeta) \leqq \sup_{\zeta \in L} v^L(\zeta) .$$

Poznámka 3. Podobně jako v (17) platí pro libovolné $F \in C(L)$, $\zeta \in L'$

$$\lim_{\substack{z \to \zeta \\ z \in D}} W_{L'}(z, F) = W_{L'}(\zeta, F) + \pi F(\zeta) . \tag{22}$$

Podle (17) jest pro pevně zvolené j, $0 \leqq j \leqq p - 1$, $F \in C(L)$ a libovolné $\zeta \in K_j$

$$\lim_{\substack{z \to \zeta \\ z \in D}} W_{K_j}(z, F) = W_{K_j}(\zeta, F) + \pi F(\zeta) .$$

Podle lemmatu 4 platí

$$\lim_{\substack{z \to \zeta \\ z \in D}} W_{K_l}(z, F) = W_{K_l}(\zeta, F) \quad \text{pro} \quad l \neq j$$

a odtud (22) vyplývá snadno sečtením přes všechna j, $0 \leqq j \leqq p - 1$ a porovnáním s definičními vztahy (18).

Označíme-li

$$W_{L'} F(\zeta) = \lim_{\substack{z \to \zeta \\ z \in D}} W_{L'}(z, F) - \pi F(\zeta), \; \zeta \in L' ,$$

zjistíme snadno porovnáním, že $W_{L'} F(\zeta) = W_{L'}(\zeta, F)$ pro každé $\zeta \in L'$. Za předpokladu (20) jest takto definovaný operátor $W_{L'}$, zobrazující $C(L)$ (resp. $C(L')$) do $C(L')$ spojitým operátorem na $C(L)$. (Viz též poznámka 3.3 v [8].) Podobné závěry platí i o funkci $W_{L''}(\zeta, F)$ a příslušném operátoru $W_{L''}$.

Věta 1. *Nechť platí označení z úlohy* 3. *Pak nutnou a postačující podmínkou k tomu, aby pro každou funkci* $F \in C(L)$ *existovaly vlastní limity* ΛF *z* (5), *je podmínka* (21).

Důkaz. Ze vztahů (3) a (18) pro $z \in D$, $F \in C(L)$ vyplývají po separaci reálné a imaginární části vztahy

$$\operatorname{Re} \Psi F(z) = \frac{1}{\pi} \left[W_{L'}(z, F) + M_{L''}(z, F) \right] , \tag{23}$$

$$\operatorname{Im} \Psi F(z) = \frac{1}{\pi} \left[W_{L''}(z, F) - M_{L'}(z, F) \right] .$$

Zvolíme-li libovolně otevřenou množinu $P \subset D$, $L' \subset \bar{P}$, je podle lemmatu 5 funkce $W_{L'}(z, F)$ stejnoměrně spojitá na P právě když platí (20). Zvolíme okolí $U(L')$ systému křivek L' tak, aby $\operatorname{dist}(U(L'), L'') > 0$. Z lemmatu 4 vyplývá stejnoměrná spojitost $M_{L''}(z, F)$ na $U(L')$. Funkce Re $\Psi F(z)$ je tedy stejnoměrně spojitá pro $z \in P \cap U(L')$ právě když platí (20). Stejnou úvahu můžeme provést i pro Im $\Psi F(z)$ a podmínku (20'). Z poznámky 2 vyplývá, že (21) platí, právě když jsou Re ΨF, Im ΨF stejnoměrně spojité funkce v příslušných okolích L', L'', tj. když existují vlastní limity $\Lambda F(\zeta)$ z (5).

Operátor $W_{L'}$ zobrazuje – viz poznámku 3 – za předpokladu (21) prostor $C(L)$ do prostoru $C(L')$. Provedeme – bez změny označení – následující rozšíření definice operátoru $W_{L'}$:

$$(24) \qquad W_{L'}\, F(\zeta) = W_{L'}(\zeta, F) \text{ pro } \zeta \in L', \quad W_{L'}\, F(\zeta) = 0 \text{ pro } \zeta \in L''.$$

Podobně zavedeme ještě v souhlase s formulí (18)

$$(24) \qquad \begin{aligned} W_{L''}\, F(\zeta) &= W_{L''}(\zeta, F) \text{ pro } \zeta \in L'', & W_{L''}\, F(\zeta) &= 0 \text{ pro } \zeta \in L', \\ M_{L'}\, F(\zeta) &= M_{L'}(\zeta, F) \text{ pro } \zeta \in L'', & M_{L'}\, F(\zeta) &= 0 \text{ pro } \zeta \in L', \\ M_{L''}\, F(\zeta) &= M_{L''}(\zeta, F) \text{ pro } \zeta \in L', & M_{L''}\, F(\zeta) &= 0 \text{ pro } \zeta \in L''. \end{aligned}$$

Takto zavedené operátory $W_{L'}$, $W_{L''}$, $M_{L'}$, $M_{L''}$ zobrazují při platnosti (21) prostor $C(L)$ do prostoru $C(L)$. Vyšetřované limity $\Lambda F(\zeta)$ z (5) lze nyní vyjádřit ve tvaru

$$\Lambda F(\zeta) = \frac{1}{\pi}\,[W_{L'} + M_{L''}]\, F(\zeta) + F(\zeta) \quad \text{pro} \quad \zeta \in L',$$

$$\Lambda F(\zeta) = \frac{1}{\pi}\,[W_{L''} - M_{L'}]\, F(\zeta) + F(\zeta) \quad \text{pro} \quad \zeta \in L'',$$

resp. po úpravě s přihlédnutím k definičním vztahům (24)

$$(25) \qquad \Lambda F(\zeta) = \frac{1}{\pi}\,[(W_{L'} + W_{L''}) + (M_{L''} - M_{L'}) + \pi I]\, F(\zeta), \quad \zeta \in L,$$

kde I značí identický operátor na $C(L)$. Λ je tedy omezeným lineárním operátorem na $C(L)$, právě když platí (21). Omezenost operátorů $M_{L'}$, $M_{L''}$ vyplývá z lemmatu 4, omezenost operátorů typu $W_{L'}$, resp. $W_{L''}$ viz podrobněji v [5].

Nadále budeme předpokládat stále platnost (21).

Pro řešení úlohy 2 je vhodné vyšetřit Fredholmův poloměr operátoru $I - \Lambda = \Gamma$ na $C(L)$, resp. veličinu

$$(26) \qquad \omega\Gamma = \inf_{T} \|\Gamma - T\|,$$

kde T probíhá všechny kompaktní operátory na prostoru $C(L)$; tato veličina je převrácenou hodnotou Fredholmova poloměru operátoru Γ. Stejný význam má symbol ω při použití ve spojení s ostatními zavedenými operátory.

Zavedeme další označení. Nechť K je opět rektifikovatelná Jordanova křivka, vytvořená funkcí ψ s vlastnostmi (6). Pro libovolné $\zeta \in K$ zvolíme $t_0 \in \psi^{-1}(\zeta)$. Za předpokladu (13) existují vlastní limity

$$\lim_{t \to t_0+} \frac{\psi(t) - \zeta}{|\psi(t) - \zeta|} = \tau_K^+(\zeta), \quad \lim_{t \to t_0-} \frac{\psi(t) - \zeta}{|\psi(t) - \zeta|} = -\tau_K^-(\zeta). \tag{27}$$

Stejně jako v [8] nechť $\alpha_K(\zeta)$ značí radiální míru neorientovaného úhlu vektorů $\tau_K^+(\zeta)$, $\tau_K^-(\zeta)$. Podle [8] platí vztah

$$\alpha_K(\zeta) = |\vartheta_\zeta(t_0) - \vartheta_\zeta(t_0-)| \tag{28}$$

mezi zavedenou měrou $\alpha_K(\zeta)$ a funkcí $\vartheta_\zeta(t)$ zavedenou výše (viz text před vztahem (15)). V [8] je určena veličina ωW_K pro operátor

$$W_K F(\zeta) = \lim_{\substack{z \to \zeta \\ z \in \operatorname{Int} K}} W_K(z, F) - \pi F(\zeta)$$

Platí

$$\omega W_K = \lim_{R \to 0+} \sup_{\zeta \in K} (v_R^K(\zeta) + \alpha_K(\zeta)) = \lim_{R \to 0+} \sup_{\zeta \in K} v_R^K(\zeta). \tag{29}$$

Poznámka 4. Ze vztahu (29) vyplývá, že W_K může být kompaktní pouze tehdy, je-li $\alpha_K(\zeta) = 0$ pro všechna $\zeta \in K$. To nastane tehdy, když křivka K neobsahuje žádné úhlové body, tj. body ζ, pro něž jest $\alpha_K(\zeta) > 0$.

Dále jest v [8] zaveden operátor W_L na prostoru $C(L)$ určený vztahy

$$\begin{aligned} W_L(z, F) &= \sum_{j=0}^{q} W_{K_j}(z, F), \quad z \in E_2 - L, \\ W_L F(\zeta) &= \lim_{\substack{z \to \zeta \\ z \in D}} W_L(z, F) - \pi F(\zeta), \quad \zeta \in L, \quad F \in C(L), \end{aligned} \tag{30}$$

který za předpokladu (21) jest omezeným lineárním operátorem z prostoru $C(L)$ do $C(L)$. Jemu odpovídající hodnota ωW_L je vypočtena a vyjádřena ve tvaru

$$\omega W_L = \lim_{R \to 0+} \sup_{\zeta \in L} v_R^L(\zeta). \tag{31}$$

Přistupme k výpočtu veličiny $\omega\Gamma$. Nejprve dokážeme pomocné tvrzení:

Lemma 6. *Operátory definované na prostoru $C(L)$ předpisem*

$$T_1 = (W_{L'} + W_{L''} - W_L), \quad T_2 = (M_{L''} - M_{L'})$$

jsou na prostoru $C(L)$ kompaktní.

Důkaz. Použijeme vztahů (24) a (30) a zjistíme pro $F \in C(L)$ rozepsáním

$$(32) \quad T_1 F(\zeta) = -W_{L''}(\zeta, F) \text{ pro } \zeta \in L', \quad T_1 F(\zeta) = -W_{L'}(\zeta, F) \text{ pro } \zeta \in L'',$$
$$T_2 F(\zeta) = M_{L''} F(\zeta) \quad \text{pro } \zeta \in L', \quad T_2 F(\zeta) = -M_{L'} F(\zeta) \text{ pro } \zeta \in L''.$$

Vzhledem k dist $(L', L'') > 0$ jsou operátory T_1, T_2 podle lemmatu 4 a věty Arzelovy kompaktní.

Věta 2. *Převrácená hodnota Fredholmova poloměru operátoru Γ je rovna výrazu*

$$(33) \qquad \omega\Gamma = \frac{1}{\pi} \lim_{R \to 0_+} \sup_{\zeta \in L} v_R^L(\zeta).$$

Důkaz. Probíhá-li T všechny kompaktní operátory na prostoru $C(L)$, platí následující vztahy

$$\omega\Gamma = \frac{1}{\pi} \inf_T \|(W_{L'} + W_{L''}) + (M_{L''} - M_{L'}) - T\| =$$
$$= \frac{1}{\pi} \inf_T \|(W_{L'} + W_{L''}) - T_1 + (M_{L''} - M_{L'}) - T_2 - T\| =$$
$$= \frac{1}{\pi} \inf_T \|W_L - T\| = \frac{1}{\pi} \omega W_L.$$

Odtud již plyne za pomoci (31) formule (33).

Nyní lze přistoupit k řešení úloh 1 a 2. Vzhledem ke vztahu $\Lambda = I - \Gamma$ je nutné k řešení úlohy 2 určit k funkci $G \in C(L)$ funkci $F \in C(L)$ tak, aby platilo: $\Lambda F - G = (I - \Gamma) F - G \in Q$ (symboly Q a Q_0 byly definovány na počátku článku před formulací úlohy 1). Ukazuje se vhodným nalézti funkci $F \in C(L)$ tak, aby platilo

$$(34) \qquad (I - \Gamma) F - G \in Q_0.$$

Zavedeme pro libovolnou funkci $G \in C(L)$ toto označení: Symbol $\mathbf{D}G$ označuje možinu všech funkcí $F \in C(L)$, pro které platí vztah (34). Stejně jako v [8] nebo v [1] zavedeme nyní lineární operátor T_0 na prostoru $C(L)$, splňující vztahy

$$(35) \qquad T_0 C(L) \subset Q_0,$$

$$(36) \qquad T_0 Q_0 = Q_0.$$

Jeden z možných tvarů takového operátoru viz např. v 3.7 článku [8]. Platí následující lemma, jehož důkaz vyplyne jednoduše z později uvedeného lemmatu 9:

Lemma 7. *Nechť Φ_1, Φ_2 jsou řešení úlohy* 1, *mající tvar* (4); *nechť v souhlase s označením ve znění úlohy platí $\tilde{\Phi}_1 - \tilde{\Phi}_2 \in Q_0$. Potom $\Phi_1 = \Phi_2$.*

Z tohoto lemmatu a z následujícího pro každé $G \in C(L)$ platného vztahu

$$\{F;\, F \in C(L),\, (I - \Gamma + T_0) F = G\} \subset \mathbf{D}G \tag{37}$$

plyne, že pro existenci řešení úlohy 1 stačí dokázat existenci řešení rovnice pro libo-

$$(I - \Gamma + T_0) F = G \tag{38}$$

volnou funkci $G \in C(L)$. Vztah (37) vyplývá z formule (35) a z definice $\mathbf{D}G$ (viz vztah (34) a text za ním následující). K důkazu existence řešení rovnice (38) použijeme Riesz-Schauderovy teorie. Budeme předpokládat, že $\omega\Gamma < 1$, tj.

$$\lim_{R \to 0+} \sup_{\zeta \in L} v_R^L(\zeta) < \pi \tag{39}$$

Pak platí Fredholmova alternativa pro (38) a k existenci a unicitě řešení (38) pro libovolnou funkci $G \in C(L)$ stačí ověřit implikaci:

$$(F_0 \in C(L),\, (I - \Gamma + T_0) F_0 = 0) \Rightarrow F_0 = 0\,. \tag{40}$$

Operátor T_0 je rovněž kompaktní na prostoru $C(L)$, neboť Q_0 má konečnou dimenzi. K důkazu platnosti vztahu (40) budeme potřebovat několik pomocných tvrzení, která dokážeme dříve.

Poznámka 5. Budeme říkat, že Jordanova křivka K odděluje množiny $M_1 \subset E_2$, $M_2 \subset E_2$, jestliže tyto množiny leží v různých komponentách $E_2 - K$.

Lemma 8. *Nechť K je Jordanova křivka v E_2, D_K některá z komponent množiny $E_2 - K$. Pak ke každé uzavřené množině $M \subset D_K$ existuje po částech regulární Jordanova křivka K', $K' \subset D_K$, která odděluje množiny M a K.*

Poznámka 6. Význam pojmu po částech regulární křivky je zde chápán ve stejném smyslu, jak je vyložen v § 16 kap. I v [3].

Důkaz lemmatu 8 stručně naznačíme. K dané množině $M \subset D_K$ lze metodou, popsanou v Úvodu [3], § 10 najít vždy uzavřenou souvislou množinu M' tak, že platí $M \subset M' \subset D_K$. Předpokládejme nejprve, že $D_K = \operatorname{Int} K$. Podle vět 10.2 a 10.3 tamtéž existuje konečný počet Jordanových polygonálních křivek $\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2, \ldots, \mathscr{L}_m$ takových, že platí $M' \subset \bigcup_{j=1}^{m} \operatorname{Int} \mathscr{L}_j$. Ze souvislosti množiny M' plyne, že $M' \subset \operatorname{Int} \mathscr{L}_n$ pro jisté $n \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Tato křivka jest již hledanou po částech regulární křivkou s požadovanými vlastnostmi a proto položíme $\mathscr{L}_n = K'$. Pro případ $D_K = \operatorname{Ext} K$ můžeme použít transformace pomocí kruhové inverze se středem $z_0 \in \operatorname{Int} K$ a dostatečně malým poloměrem příslušné kružnice. Touto transformací převedeme řešenou situaci na předchozí případ a nalezenou polygonální křivku $\mathscr{L}_n$ převedeme novou aplikací této transformace na hledanou po částech regulární křivku K'. Tohoto tvrzení užijeme pro důkaz následujícího lemmatu:

Lemma 9. Nechť Φ jest jednoznačná analytická funkce v oblasti D taková, že pro $\tilde{\Phi}$ z úlohy 1 platí vztah $\tilde{\Phi} \in Q$. Potom funkce Φ je konstantní v oblasti D.

Důkaz tohoto tvrzení provedeme nepřímo. Nechť tedy Φ je nekonstantní jednoznačná analytická funkce v D, splňující uvedené požadavky. Zobrazení funkcí Φ provádí oblast D v oblast $\Phi(D)$. Označíme hodnoty funkce $\tilde{\Phi}$ na komponentách K_j hranice L postupně a_j, $j = 0, 1, \ldots, q$. Dále označíme $\mathscr{K}_j$, $j = 0, 1, \ldots, q$ množiny bodů přímek

$$\mathscr{K}_j = \{z;\ z \in E_2,\ \operatorname{Re} z = a_j\}\,, \quad j = 0, 1, \ldots, p-1\,,$$
$$\mathscr{K}_j = \{z;\ z \in E_2,\ \operatorname{Im} z = a_j\}\,, \quad j = p, \ldots, q$$

a

$$P = \bigcup_{j=0}^{q} \mathscr{K}_j\,.$$

Pro libovolnou množinu $A \subset E_2$ definujeme množinu $\mathscr{U}_\varepsilon(A)$ předpisem

$$\mathscr{U}_\varepsilon(A) = \{z;\ z \in E_2,\ \operatorname{dist}(z, A) < \varepsilon\}\,.$$

Pro hranici $H(\Phi(D))$ množiny $\Phi(D)$ platí podle podmínky $\tilde{\Phi} \in Q$

$$H(\Phi(D)) \subset P \tag{41}$$

Definujeme funkci $l(z)$ vztahem

$$l(z) = \operatorname{Re} \Phi(z) - a_j \quad \text{pro} \quad z \in \mathscr{U}_r(K_j) \cap D\,, \quad j = 0, 1, \ldots, p-1\,,$$
$$l(z) = \operatorname{Im} \Phi(z) - a_j \quad \text{pro} \quad z \in \mathscr{U}_r(K_j) \cap D\,, \quad j = p, \ldots, q\,,$$

při čemž volíme $r > 0$ dostatečně malé tak, aby $\mathscr{U}_r(K_j) \cap \mathscr{U}_r(K_i) = \emptyset$ pro $i \neq j$. Nyní lze k libovolnému $\varepsilon > 0$ nalézti $\delta > 0$ tak, že platí

$$z \in \mathscr{U}_\delta(L) \cap D \Rightarrow |l(z)| < \varepsilon\,.$$

Položíme $M = D - \mathscr{U}_\delta(L)$ a užitím lemmatu 8 sestrojíme systém Jordanových po částech regulárních křivek K'_j, $j = 0, 1, \ldots, q$, oddělujících množiny M a K_j pro všechna j. Je-li $D^\varepsilon_j = \operatorname{Int} K'_j$, položíme analogicky (3)

$$D^\varepsilon = D^\varepsilon_0 - \bigcup_{j=1}^{q} \bar{D}^\varepsilon_j\,.$$

Zřejmě platí $M \subset D^\varepsilon \subset D$. Oblast $\Phi(D^\varepsilon)$ je omezená pro libovolné $\varepsilon > 0$. Zvolíme-li ε dostatečně malé, lze v každé neomezené komponentě množiny $E_2 - P$ nalézti bod z_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ (k přirozené, $k \leqq 2(q+1)$) tak, že platí

$$z_i \notin \Phi(D^\varepsilon)\,, \quad \operatorname{dist}(z_i, P) > \varepsilon\,, \quad i = 1, 2, \ldots, k\,.$$

Položíme $D_1 = D - D^\varepsilon$; pro libovolný bod $z \in \Phi(D_1)$ platí $\operatorname{dist}(z, P) < \varepsilon$, z čehož plyne $z_i \notin \Phi(D_1)$, $i = 1, \ldots, k$. Jelikož $D = D^\varepsilon \cup D_1$, platí též $z_i \notin \Phi(D)$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Komponenty množiny $E_2 - P$ jsou otevřené konvexní množiny. Z předpokladu, že v některé z těchto komponent $E_2 - P$ leží dvojice bodů z_1, z_2 taková, že platí

$$z_1 \notin \Phi(D), \quad z_2 \in \Phi(D),$$

vyplývá existence bodu z^* na úsečce $\overline{z_1, z_2}$, $z^* \in E_2 - P$, $z^* \in H(\Phi(D))$; to jest však ve sporu se vztahem (41). Proto žádná z neomezených komponent $E_2 - P$ neobsahuje body z $\Phi(D)$ a $\Phi(D)$ jest omezená. Obsahuje-li některá z omezených komponent $E_2 - P$ bod z $\Phi(D)$, je celá částí $\Phi(D)$. Případ $\Phi(D) \subset P$ nemůže nastat, a proto alespoň jedna taková komponenta existuje. Vybereme nyní z přímek $\mathscr{K}_j$, $j = 0, 1, \ldots, q$ takovou, aby platilo – označme ji $\mathscr{K}_{j_0}$ –

$$\overline{\Phi(D)} \cap \mathscr{K}_{j_0} \neq \emptyset$$

a současně oblast $\Phi(D)$ ležela celá v jedné z polorovin, vyťatých přímkou $\mathscr{K}_{j_0}$. Pak křivka $K_{j_0} \subset D$ se zobrazí tak, že platí

$$\operatorname{dist}\left(\Phi(K'_{j_0}),\ \mathscr{K}_{j_0}\right) = 4\eta > 0$$

Sestrojíme nyní přímku $\mathscr{K}'_{j_0}$ rovnoběžnou s $\mathscr{K}_{j_0}$ a protínající $\Phi(D)$ tak, aby platilo $\operatorname{dist}(\mathscr{K}_{j_0}, \mathscr{K}'_{j_0}) = 2\eta$. K číslu $\eta > 0$ sestrojíme analogickým postupem oblast D^η, ohraničenou systémem křivek K''_j, oddělujících množiny K_j a K'_j pro $j = 0, 1, \ldots, q$. Vyšetříme obraz oblasti $D_2 \subset D$, omezené křivkami K'_{j_0} a K''_{j_0}. Obraz $\Phi(D_2)$ oblasti D_2 je opět oblast. Na přímce $\mathscr{K}'_{j_0}$ leží tedy bod z $\Phi(D_2)$ a tedy i bod $z^* \in H(\Phi(D_2))$. Poněvadž ale $\Phi(K'_{j_0}) \cap \mathscr{K}'_{j_0} = \emptyset$, $\Phi(K''_{j_0}) \cap \mathscr{K}'_{j_0} = \emptyset$, musí být z^* obrazem vnitřního bodu oblasti D_2, což je opět ve sporu s tím, že Φ je nekonstantní holomorfní funkce v D.

Lemma 10. *Nechť platí vztah* (39). *Pak platí*

(42) $$(F \in C(L),\ (I - \Gamma) F \in Q) \Rightarrow F \in Q\,.$$

Důkaz. Z předešlého lemmatu vyplývá, že funkce ΨF je konstantní v oblasti D. Stačí tedy dokázat implikaci $(\Psi F = \text{konst.}) \Rightarrow F \in Q$. Předpis (4) pro ΨF určuje ΨF jakožto analytickou funkci v $E_2 - L$ pro libovolnou funkci $F \in C(L)$. Zvolme pevně j, $0 \leqq j \leqq p - 1$ a utvořme funkci $\Psi_j(z)$, definovanou pro $z \in E_2 - L$:

(43) $$\Psi_j(z) = \Psi F(z) - \frac{1}{\pi i} \Psi_{K_j} F(z)$$

(viz předešlé definiční vztahy (4) a (8)). Označme A_j, B_j komponenty množiny $E_2 - K_j$ tak, že pro oblasti A_j, B_j platí $D \subset A_j$, $D \cap B_j = \emptyset$. Pro funkci $\Psi_j(z)$, $z \in E_2 - L$ platí podle lemmatu 4

(44) $$\lim_{\substack{z \to \zeta \\ z \in A_j}} \Psi_j(z) = \lim_{\substack{z \to \zeta \\ z \in B_j}} \Psi_j(z)\,.$$

Dále za uvedených předpokladů (viz vztah (61) v [8], věta 2.3) platí

$$\lim_{\substack{z\to\zeta\\ z\in A_j}} M_{Kj}(z, F) = \lim_{\substack{z\to\zeta\\ z\in B_j}} M_{Kj}(z, F)\,. \tag{45}$$

Vynásobením (45) faktorem $-\pi^{-1}$ a sečtením takto získaného vztahu s imaginární částí vztahu (44) obdržíme

$$\lim_{\substack{z\to\zeta\\ z\in A_j}} \operatorname{Im} \Psi\, F(z) = \lim_{\substack{z\to\zeta\\ z\in B_j}} \operatorname{Im} \Psi\, F(z) = \text{konst.} \tag{46}$$

Odtud však z vlastností harmonických funkcí vyplývá, že funkce $\operatorname{Im} \Psi F$ je konstantní funkcí v B_j, tudíž i funkce $\operatorname{Re} \Psi F$ je konstantní v B_j a funkce

$$F(\zeta) = \tfrac{1}{2}\big(\lim_{\substack{z\to\zeta\\ z\in A_j}} \operatorname{Re} \Psi\, F(z) - \lim_{\substack{z\to\zeta\\ z\in B_j}} \operatorname{Re} \Psi\, F(z)\big) \tag{47}$$

je konstantní na křivce K_j. Analogicky při pevném j, $p \leqq j \leqq q$ položíme

$$\Psi_j(z) = \Psi\, F(z) - \frac{1}{\pi}\, \Psi_{Kj}\, F(z)$$

a podobným postupem dospějeme k vyjádření funkce F na křivce K_j vztahem

$$F(\zeta) = \tfrac{1}{2}\big(\lim_{\substack{z\to\zeta\\ z\in A_i}} \operatorname{Im} \Psi\, F(z) - \lim_{\substack{z\to\zeta\\ z\in B_j}} \operatorname{Im} \Psi\, F(z)\big)\,,$$

z něhož vyplývá, že funkce F je konstantní na křivce K_j. Je tedy funkce $F \in C(L)$ konstantní na každé komponentě L a tedy platí $F \in Q$.

Lemma 11. *Nechť platí* (39). *Pak platí vztahy*:

$$(F \in C(L),\ (I - \Gamma)\, F \in Q_0) \Rightarrow F \in Q_0\,, \tag{48}$$

$$(F \in Q_0) \Rightarrow (I - \Gamma)\, F = 0\,. \tag{49}$$

Důkaz. Nechť $F \in Q$, $F(\zeta) = a_0(F)$ pro libovolné $\zeta \in K_0$. Z Cauchyovy věty plyne pro libovolné $\zeta \in L$

$$(I - \Gamma)\, F = 2\pi\, a_0(F)\,. \tag{50}$$

Je-li $F \in Q_0$, jest $a_0(F) = 0$ a platí (49). Je-li dále $(I - \Gamma)\, F \in Q_0$, je též $F \in Q$ a podle (50) platí $F \in Q_0$.

Lemma 12. Nechť platí vztah (39). Pro funkci $0 \in C(L)$ platí $Q_0 = \mathbf{D}0$.

Důkaz. Z definice $\mathbf{D}G$ a vztahu (48) a (49) vyplývá

$$F \in \mathbf{D}0 \Leftrightarrow (I - \Gamma)\, F \in Q_0 \Rightarrow F \in Q_0\,,$$

$$F \in Q_0 \Rightarrow (I - \Gamma)\, F = 0 \Rightarrow F \in \mathbf{D}0\,.$$

Následující věta 3 nám umožňuje řešit vyšetřované úlohy 1 a 2.

Věta 3. *Nechť platí vztah* (39). *Potom pro libovolnou funkci* $G \in C(L)$ *platí* $\mathbf{D}G \neq \emptyset$. *Je-li* $F \in \mathbf{D}G$, $G \in C(L)$, *platí*

$$\mathbf{D}G = F + Q_0 = \{F + H;\ H \in Q_0\}.$$

Důkaz. Je-li $F_0 \in C(L)$, $(I - \Gamma + T_0) F_0 = 0$, pak $(I - \Gamma) F_0 = -T_0 F_0 \in Q_0$ podle vztahu (35). Podle vztahu (48) vyplývá odtud $F_0 \in Q_0$, z čehož podle vztahu (49) plyne $(I - \Gamma) F_0 = 0 = -T_0 F_0$. Odtud pak podle (36), (35) vyplývá $F_0 = 0$, neboť Q_0 má konečnou dimenzi. Vztah (40) je tedy ověřen a proto $\mathbf{D}G \neq \emptyset$ pro libovolnou $G \in C(L)$. Druhá část tvrzení věty 3 je důsledkem lemmatu 12. Uvedené věty umožňují řešení vyšetřované smíšené Dirichletovy úlohy pro třídu hraničních podmínek, vyjádřených funkcemi z prostoru $C(L)$.

Poznámka 7. S malými úpravami bylo by možno řešit podobně úlohu 1 i v případě $K_0 = \emptyset$. Pak je podmínka, vyjadřující chování hledané funkce Φ v okolí K_0 nahrazena podmínkou, charakterizující chování funkce Φ v nevlastním bodě E_2 tvaru $\lim\limits_{|z| \to +\infty} \operatorname{Re} \Phi(z) = a_0$.

Literatura

[1] *Мусхелишвили Н. И.:* Об основной смешанной краевой задаче теории логарифмического потенциала для многосвязных областей. Сообщения Академии наук Грузинской ССР, Т. *II*, № 4 (1941), 309—313.

[2] *Jacob C.:* Sur le probleme de Dirichlet dans un domaine plan multiplement connexe et ses applications a l'Hydrodynamique. Journ. de Math., 9^e sér., T. *18* (1939), str. 363—383.

[3] *Saks S., Zygmund A.:* Analytic Functions. Warszawa—Wroclaw 1952.

[4] *Л. В. Канторович - Г. П. Акилов:* Функциональный анализ и нормированных пространствах. ГИФМЛ, Москва 1959

[5] *Král J.:* On the logarithmic potential of the double distribution. Czech. math. J., T. *14* (*89*), (1964), str. 306—321.

[6] *Král J.:* Some inequalities concerning the cylic and radial variations of a plane path-curve. Czech. math. J., T. *14* (*89*), (1964), str. 271—279.

[7] *Král J.:* Non-tangential limits of the logarithmic potential. Czech. mat. J., T. *14* (*89*), (1964), str. 455—482.

[8] *Král J.:* The Fredholm radius of an operator in potential theory — Czech. math. J. T. *15* (*90*), (1964), str. 454—473, 565—588.

Adresa autora: Praha 1, Malostranské nám. 25 (Matematicko-fyzikální fakulta KU).

Резюме

ОБ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

ЙИРЖИ ВЕСЕЛЫ (Jiří Veselý), Прага

В статье решается следующая задача:

Пусть D — связная часть плоскости E_2, ограниченная замкнутыми простыми контурами K_j, $j = 0, 1, \dots, q$, непересекающими друг друга, из которых K_0 охватывает все остальные. Обозначим $L' = \bigcup_{j=0}^{p-1} K_j$, $L'' = \bigcup_{j=p}^{q} K_j$, $0 < p \leqq q$, $L = L' \cup L''$. Следует найти однозначную аналитическую функцию Φ в D такую, что

$$\lim_{\substack{z\to\zeta\\ z\in D}} \operatorname{Re} \Phi(z) = G(\zeta) + h(\zeta),\ \zeta \in L',$$

$$\lim_{\substack{z\to\zeta\\ z\in D}} \operatorname{Im} \Phi(z) = G(\zeta) + h(\zeta),\ \zeta \in L'',$$

где G — заданная непрерывная действительная функция на L и h — любая действительная функция на L, постоянная на произвольном контуре K_j, $j = 0, 1, \dots, q$.

Обыкновенно решается эта задача для достаточно гладких контуров K_j, $j = 0, 1, \dots, q$. Здесь произведено решение этой задачи при отсутствии этого предположения.

Чтобы найти решение этой задачи в виде суммы интегралов типа Коши, решаются следующие вопросы:

пусть (α) $$\Psi F(z) = \frac{1}{\pi i}\int_{L'} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta + \frac{1}{\pi}\int_{L''} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta$$

(a) требуется: найти к действительной непрерывной функции G на L аналитическую однозначную функцию Φ в D так, чтобы существовали конечные пределы

$$\lim_{\substack{z\to\zeta\\ z\in D}} \operatorname{Re} \Phi(z) = \tilde{\Phi}(\zeta),\ \zeta \in L' \quad \text{и} \quad \lim_{\substack{z\to\zeta\\ z\in D}} \operatorname{Im} \Phi(z) = \tilde{\Phi}(\zeta),\ \zeta \in L''$$

и чтобы разность функций $\tilde{\Phi}$ и G являлась непрерывной функцией на L и постоянной на любом контуре K_j, $j = 0, 1, \dots, q$.

(б) найти к действительной непрерывной функции G на L непрерывную действительную функцию F, чтобы функция ΨF, определенная в D при помощи (α), являлась решением (a).

(в) пусть ΨF определена при помощи (α); найти необходимые и достаточные условия для существования конечных пределов

$$\lim_{\substack{z \to \zeta \\ z \in D}} \operatorname{Re} \Psi F(z), \ \zeta \in L' \quad \text{и} \quad \lim_{\substack{z \to \zeta \\ z \in D}} \operatorname{Im} \Psi F(z), \ \zeta \in L''$$

для произвольной непрерывной функции F на L.

Для решения (б) введен соответствующий линейный оператор Γ и вычислен его радиус Фредгольма.

Summary

ON THE MIXED BOUNDARY PROBLEM OF THE THEORY OF ANALYTIC FUNCTIONS

JIŘÍ VESELÝ, Praha

In this paper the following problem is solved:

Let D be a region in the plane E_2 bounded by closed simple non-intersecting curves K_j, $j = 0, 1, \ldots, q$ and let K_j, $j = 1, \ldots, q$ lie inside K_0. Set $L' = \bigcup_{j=0}^{p-1} K_j$, $L'' = \bigcup_{j=p}^{q} K_j$, $0 < p \leqq q$, $L = L' \cup L''$. Find an analytic single-valued function Φ in D which fulfils these conditions

$$\lim_{\substack{z \to \zeta \\ z \in D}} \operatorname{Re} \Phi(z) = G(\zeta) + h(\zeta), \quad \zeta \in L',$$

$$\lim_{\substack{z \to \zeta \\ z \in D}} \operatorname{Im} \Phi(z) = G(\zeta) + h(\zeta), \quad \zeta \in L'',$$

where G is a given, real-valued continuous function on L and h is a realvalued function constant on every curve K_j, $j = 0, 1, \ldots, q$.

It is usually assumed the curves K_j, $j = 0, 1, \ldots, q$ are sufficienthy smooth. Here this problem is studied without this assumption.

To find the solution of this problem as a sum of Cauchy integrals, the following problems are solved. Let

$$(\alpha) \qquad \Psi F(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{L'} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta + \frac{1}{\pi} \int_{L''} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta .$$

(a) Find an analytic single-valued function Φ in D to a given real-valued continuous function G on L such that the finite limits

$$\lim_{\substack{z \to \xi \\ z \in D}} \operatorname{Re} \Phi(z) = \tilde{\Phi}(\zeta), \ \zeta \in L' \quad \text{and} \quad \lim_{\substack{z \to \xi \\ z \in D}} \operatorname{Im} \Phi(z) = \tilde{\Phi}(\zeta), \ \zeta \in L''$$

exist and that the difference of the functions $\tilde{\Phi}$ and G is constant on K_j, $j = 0, 1, \ldots, q$.

(b) Find a real-valued continuous function F to a given real-valued continuous function G on L such that the function ΨF defined by (α) is a solution of (a).

(c) Let the function ΨF be defined by (α). Find nessesary and sufficient conditions for the existence of finite limits

$$\lim_{\substack{z\to\zeta \\ z\in D}} \operatorname{Re} \Psi F(z), \ \zeta \in L' \quad \text{and} \quad \lim_{\substack{z\to\zeta \\ z\in D}} \operatorname{Im} \Psi F(z), \ \zeta \in L''$$

for every continuous F on L.

For the solution of (b) a convenient operator Γ is introduced and its Fredholm radius is expressed.