Jiří Štěpánek

Das Dirichletsche Problem für die Laplace-Gleichung auf dem geodätischen Kreis einer Fläche

*Časopis pro pěstování matematiky*, Vol. 92 (1967), No. 1, 51--62

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117597`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 92 (1967), Praha

# DAS DIRICHLETSCHE PROBLEM FÜR DIE LAPLACE-GLEICHUNG AUF DEM GEODÄTISCHEN KREIS EINER FLÄCHE

JIŘÍ ŠTĚPÁNEK, Praha

(Eingelangt am 10. Dezember 1965)

In dem Artikel wird das Dirichletsche Problem für die Laplace-Gleichung auf dem geodätische Kreis der Fläche mit dem metrischen Tensor $1, 0, g(r)\, h(\varphi)$ (in den Polarparametern) gelöst. Die Lösung wird mit Hilfe eines verallgemeinerten Poissonintegrales ausgedrückt. Weiter werden da die Fundamentaleigenschaften von harmonischen Funktionen auf Flächen, die mit der Ebene konform sind, angeführt.[1]

## 1. DAS DIRICHLETSCHE PROBLEM AUF EINER FLÄCHE; SEINE EINDEUTIGKEIT UND KORREKTHEIT

**Definition 1.** Eine Funktion $\omega = \omega(\xi^a)$, die in dem Gebiet $s$ der Hyperfläche $\mathscr{S}$ im $E_{n+1}$ stetige partielle Ableitungen 2. Ordnung hat und die im $s$ der Laplace Gleichung

$$g^{ab} \nabla_b \frac{\partial \omega}{\partial \xi^a} = 0 \tag{1}$$

($g^{ab}$ ist der metrische Tensor der Hyperfläche $\mathscr{S}$) genügt[2]), wird harmonisch im Gebiet $s$ genannt. Ist die Funktion $\omega$ ausserdem noch im $\bar{s}$ stetig, wird diese eine stetige harmonische Funktion im $\bar{s}$ genannt.

Es sei auf der Hyperfläche das erste Dirichletsche Problem für die Gleichung (1) gegeben: Es sei auf der Hyperfläche $\mathscr{S}$ ein beschränktes Gebiet $s$ mit der Grenzkurve $\mathscr{C}$: $\xi^a = \xi^a(t)$ gegeben. Es ist eine im $\bar{s}$ stetige harmonische Funktion $\omega = \omega(\xi^a)$ zu finden, die auf $\mathscr{C}$ die gegebenen Werte: $\omega(\xi^a(t)) = f(t)$ annimt.

B e m e r k u n g 1. Unser Problem kann selbstverständlich eine physikalische Interpretation im $E_3$ haben, z.B. als die Aufgabe der Wärmeverteilung (bei einer statio-

[1]) Diese Behandlung knüpft an meine Arbeit: „Poissonsche, Wellen- und Wärmeleitungsgleichung auf Flächen“ an. Im weiteren bezeichnen wir diese kurz I.

[2]) Vgl. I, § 1.

nären Erscheinung) auf einem Gebiet der Fläche, wenn die Temperatur auf der Grenze des Gebietes bekannt ist.

**Satz 1.** *Es sei $\omega$ eine stetige harmonische Funktion im Gebiet $\bar{s}$ einer Fläche im $E_3$ die mit der Ebene lokal konform ist. Dann erreicht die Funktion $\omega$ ihr absolutes Extrem auf der Grenze $\mathscr{C}$ von diesem Gebiet*[3]).

Den Beweis kann man mittels einer Übertragung des Beweises von dem analogischen Satz in der Ebene vollbringen[4]). Wir bezeichnen $\max_{[\xi^a]\in\bar{s}} \omega(\xi^a) = M$, $\max_{[\xi^a]\in\mathscr{C}} \omega(\xi^a) = m$ und setzen voraus, dass ein Punkt $[\xi_0^a] \in s$ existiert so, dass $\omega(\xi_0^a) = M$ ist. Dann erreicht aber die Funktion

$$\omega^*(\xi^a) = \omega(\xi^a) + \frac{M - m}{2d^2}\, \delta_{ab}(\xi^a - \xi_0^a)(\xi^b - \xi_0^b)$$

wo $d$ der Durchmesser des Gebietes $s$ ist, ihr Maximum im Punkte $[\xi_1^a] \in s$. Nachdem die Fläche mit der Ebene lokal konform ist, kann man voraussetzen, dass in der Umgebung des Punktes $[\xi_1^a]$ die Parameter $\xi^a$ isothermisch[5]) sind und also ist $\delta^{ab}(\partial^2\omega/\partial\xi^a\, \partial\xi^b) = 0$, woher

$$\delta^{ab} \frac{\partial^2\omega^*}{\partial\xi^a\, \partial\xi^b} = 2\, \frac{M - m}{d^2} > 0$$

folgt und dieses ist ein Widerspruch.

Von dem Satz 1 folgen diese Folgerungen:

**Satz 2.** *Das erste Dirichletsche Problem für die Laplace-Gleichung* (1) *auf einer Fläche im $E_3$, die mit der Ebene lokal konform ist, hat höchstens eine Lösung und diese ist korrekt.*

**Satz 3.** *Es konvergiere die Folge stetiger harmonischer Funktionen im Gebiet $\bar{s}$ der Fläche im $E_3$, die mit der Ebene lokal konform ist, gleichmässig auf der Grenze $\mathscr{C}$ von diesem Gebiet, dann ist diese Folge im $\bar{s}$ gleichmässig konvergent.*

Die Beweise der beiden Sätze werden so wie in der Ebene auf Grund des Satzes 1 durchgeführt[6]).

---

[3]) In anderen Zusammenhängen ist es bekannt, dass der Satz vom Maximum sogar für beliebige elliptische Operatoren gilt.

[4]) Vgl. [1] (Literaturverzeichnis siehe in I).

[5]) Siehe I, § 2.

[6]) Vgl. [1].

## 2. DIE LÖSUNG DES DIRICHLETSCHEN PROBLEMES AUF DEM GEODÄTISCHEN KREIS DER FLÄCHE

Der geodätische Kreis mit dem Mittelpunkt $S$ auf der Fläche $\mathcal{S}$ im $E_3$ wird als eine Orthogonaltrajektorie der geodätischen Kurven der Fläche, die durch den Punkt $S$ laufen, definiert.

Wir führen auf der Fläche $\mathcal{S}$ die Krummflächenpolarparametern $r, \varphi$ mit dem Pole $S$ ein; $r$ ist der Bogen der geodätischen Kurve, die mit dem Punkte $S$ inzident ist (von $S$ gemessen), $\varphi$ ist der Winkel dieser Kurve von einer bestimmten Richtung in der Tangentialebene im Punkte $S$ zu der Fläche, gemessen.[7])

In den Polarparametern hat der geodätische Kreis mit dem Mittelpunkt $S$ und dem Radius $r_0$ die Gleichung $r = r_0$. Der metrische Tensor der Fläche hat in diesen Parametern die Komponenten $g_{11} = 1, g_{12} = 0, g_{22} = G(r, \varphi)$, wo $G$ eine periodische Funktion in $\varphi$ mit der Periode $2\pi$ ist.[8])

Die Laplace-Gleichung auf der Fläche in den Parametern $r, \varphi$ hat die Form

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{G}\frac{\partial^2 \omega}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial r}\frac{\partial \omega}{\partial r} - \frac{1}{2G^2}\frac{\partial G}{\partial \varphi}\frac{\partial \omega}{\partial \varphi} = 0 . \tag{1}$$

B e m e r k u n g 1. Ist die Fläche eine Ebene mit den Gleichungen $x = \xi^1$, $y = \xi^2$, $z = 0$, dann übergehen die Krummflächenpolarkoordinaten in die gewöhnlichen Polarkoordinaten. Der metrische Tensor der Ebene hat die Komponenten $g_{11} = 1$, $g_{12} = 0, g_{22} = r^2$ und die Gleichung (1) übergeht in die Gleichung

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \omega}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \omega}{\partial r} = 0$$

d.h. in die Laplace-Gleichung auf der Ebene in den Polarkoordinaten.

Die Dirichletsche Aufgabe auf der geodätischen Kreisfläche der Fläche kann man in den Polarparametern auf so eine Weise formulieren: Es ist für $r \leqq r_0$ eine stetige Funktion $\omega = \omega(r, \varphi)$ zu finden (die in Bezug auf $\varphi$ periodisch mit der Periode $2\pi$ ist), die für $r < r_0$ stetige partielle Ableitungen 2. Ordnung besitzt und der Gleichung (1) genügt, wobei $\omega(r_0, \varphi) = f(\varphi)$ ist ($f$ ist periodisch mit der Periode $2\pi$).

Wir lösen diese Aufgabe für Flächen mit dem metrischen Tensor $1, 0, g(r)\, h(\varphi)$ wo $g(r) > 0$, $h(\varphi) > 0$ ist.

B e m e r k u n g 2. In die Klasse der Flächen mit diesem metrischen Tensor gehören z.B. Flächen mit einem konstanten Gaussschen Mass der Krümmung (speziell die Ebene). Da ist $G(r, \varphi) = (1/K) \sin^2 \sqrt{[K]}\, r$ (für $K = 0$ ist $G(r, \varphi) = r^2$). Flächen mit einer konstanten Krümmung sind genau die, welche man geodätisch auf die Ebene abbilden kann.[9])

---

[7]) Siehe [3].

[8]) Siehe [3].

[9]) Durch diese Abbildung bekommt man in der Ebene eine nichteuklidische Metrik (Vgl. [3]).

Die Gleichung (1) hat die Form

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{gh}\frac{\partial^2 \omega}{\partial \varphi^2} + \frac{g'}{2g}\frac{\partial \omega}{\partial r} - \frac{h'}{2gh^2}\frac{\partial \omega}{\partial \varphi} = 0 . \tag{2}$$

Nach der Fouriermethode suchen wir eine Lösung

$$\omega(r, \varphi) = R(r)\,\Phi(\varphi) .$$

Wir bekommen

$$-g\frac{R''}{R} - \tfrac{1}{2}g'\frac{R'}{R} = \frac{1}{h}\frac{\Phi''}{\Phi} - \frac{h'}{2h^2}\frac{\Phi'}{\Phi}$$

daher folgt

$$-g\frac{R''}{R} - \tfrac{1}{2}g'\frac{R'}{R} = \lambda , \quad \frac{1}{h}\frac{\Phi''}{\Phi} - \frac{h'}{2h^2}\frac{\Phi'}{\Phi} = \lambda$$

wo $\lambda$ eine Konstante ist. Für die Funktionen $R$, $\Phi$ bekommen wir so die Gleichungen

$$gR'' + \tfrac{1}{2}g'R' + \lambda R = 0 \tag{3}$$

$$\Phi'' - \frac{h'}{2h}\Phi' - \lambda h \Phi = 0 . \tag{4}$$

Legt man in (4) die Substitution $z = \Phi'/\Phi$, dann ergibt sich

$$z' - \frac{h'}{2h}z = \lambda h - z^2 .$$

Da die Funktion $z = {}_{(-)}^{+}\sqrt{\lambda}\sqrt{h}$ die beiden Seiten anulliert, folgt daher die Lösung

$$\Phi = \exp\left({}_{(-)}^{+}\sqrt{\lambda}\int_0^{\varphi}\sqrt{[h(\psi)]}\,\mathrm{d}\psi\right). \tag{5}$$

**Lemma.** *Es ist*

$$\int_0^{\varphi}\sqrt{[h(\psi)]}\,\mathrm{d}\psi = H(\varphi) + c\varphi \tag{6}$$

*wo $H$ eine periodische Funktion mit der Periode $2\pi$ ist, und*

$$c = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sqrt{[h(\psi)]}\,\mathrm{d}\psi . \tag{7}$$

**Beweis.** Es gibt eine positive Konstante $c$ so, dass

$$\int_0^{2\pi}(\sqrt{[h(\psi)]} - c)\,\mathrm{d}\psi = 0$$

gilt. Es ist nämlich

$$\int_0^{2\pi} (\sqrt{[h(\psi)]} - c)\,\mathrm{d}\psi = \int_0^{2\pi} \sqrt{[h(\psi)]}\,\mathrm{d}\psi - 2\pi c$$

und also ist für das durch (7) bestimmte $c$ die Gleichung erfüllt. Bezeichnet man nun $\sqrt{[h(\psi)]} - c = p(\psi)$, $J(\varphi) = \int_0^\varphi p(\psi)\,\mathrm{d}\psi$, ist

$$J(\varphi + 2\pi) = \int_0^{2\pi+\varphi} p(\psi)\,\mathrm{d}\psi = \int_{2\pi}^{2\pi+\varphi} p(\psi)\,\mathrm{d}\psi$$

und mittels der Substitution $\psi = 2\pi + t$ erhält man

$$\int_{2\pi}^{2\pi+\varphi} p(\psi)\,\mathrm{d}\psi = \int_0^{\varphi} p(2\pi + t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\varphi} p(t)\,\mathrm{d}t = J(\varphi)$$

Es ist also $J(\varphi + 2\pi) = J(\varphi)$, daher folgt, dass $J(\varphi + 2k\pi) = J(\varphi)$ ($k$ ganz) ist. Nachdem $h$ die Periode $2\pi$ hat, hat auch die Funktion

$$\int_0^{\varphi} (\sqrt{[h(\psi)]} - c)\,\mathrm{d}\psi = \int_0^{\varphi} \sqrt{[h(\psi)]}\,\mathrm{d}\psi - c\varphi$$

dieselbe Periode und man kann schreiben $\int_0^\varphi \sqrt{[h(\psi)]}\,\mathrm{d}\psi = \int_0^\varphi \sqrt{[h(\psi)]}\,\mathrm{d}\psi - c\varphi + {}$ $+ c\varphi$, d.h. $\int_0^\varphi \sqrt{[h(\psi)]}\,\mathrm{d}\psi = H(\varphi) + c\varphi$, wo $H(\varphi) = \int_0^\varphi \sqrt{[h(\psi)]}\,\mathrm{d}\psi - c\varphi$.

Von dem Lemma folgt, dass $\lambda \leqq 0$ ist (da $\Phi$ periodisch sein muss). Für $\lambda < 0$ bekommen wir

$$\Phi = \cos\sqrt{-\lambda}\int_0^{\varphi} \sqrt{[h(\psi)]}\,\mathrm{d}\psi \overset{+}{\underset{(-)}{}}\, i\sin\sqrt{-\lambda}\int_0^{\varphi} \sqrt{[h(\psi)]}\,\mathrm{d}\psi\,.$$

Damit $\Phi$ die Periode $2\pi$ hat, muss $-\lambda = n^2/c^2$ ($n$ natürlich, $c$ durch die Formel (7) bestimmt) sein. Es ist nämlich laut dem Lemma

$$\cos\sqrt{(-\lambda)}\int_0^{\varphi} \sqrt{[h(\psi)]}\,\mathrm{d}\psi =$$
$$= \cos\sqrt{(-\lambda)}\,H\,.\,\cos\sqrt{(-\lambda)}\,c\varphi - \sin\sqrt{(-\lambda)}\,H\,.\,\sin\sqrt{(-\lambda)}\,c\varphi$$

und also ist $\sqrt{(-\lambda)}\,c = n$.

Für die Gleichung (4) bekommen wir die allgemeine Lösung

$$\Phi = a_n \cos\frac{n}{c}\int_0^{\varphi} \sqrt{[h(\psi)]}\,\mathrm{d}\psi + b_n \sin\frac{n}{c}\int_0^{\varphi} \sqrt{[h(\psi)]}\,\mathrm{d}\psi\,.$$

Für $\lambda = 0$ haben wir die Gleichung

$$\Phi'' - \frac{1}{2}\frac{h'}{h}\,\Phi' = 0$$

deren Lösung

$$\Phi = a_0 + b_0 \int_0^{\varphi} \sqrt{[h(\psi)]}\, d\psi$$

ist. Daher ist notwendig $b_0 = 0$.

Für die Funktion $R$ ergibt sich in dem Falle $\lambda < 0$ die Gleichung

$$gR'' + \tfrac{1}{2}g'R' - \frac{n^2}{c^2} R = 0\,.$$

Mit Hilfe der Substitution $y = R'/R$ bekommen wir

$$y' + \frac{1}{2}\frac{g'}{g} y = \frac{n^2}{c^2 g} - y^2\,.$$

Diese Gleichung hat die Lösung $y = \overset{+}{(-)}(n/c\sqrt{g})$, daher folgt

$$R = \exp\left(\overset{+}{(-)}\int_{r_0}^{r} \frac{n}{c\sqrt{[g(\varrho)]}}\, d\varrho\right).$$

Die allgemeine Lösung der Gleichung für $R$ ist also

$$R = c_1 \exp\left(\int_{r_0}^{r} \frac{n}{c\sqrt{[g(\varrho)]}}\, d\varrho\right) + c_2 \exp\left(-\int_{r_0}^{r} \frac{n}{c\sqrt{[g(\varrho)]}}\, d\varrho\right).$$

In Analogie mit der Ebene setzen wir voraus, dass

$$\text{(8)} \qquad \int_{r_0}^{0} \frac{1}{\sqrt{[g(\varrho)]}}\, d\varrho = -\infty$$

ist.[10]) Mit Rücksicht auf (8) muss also $c_2 = 0$ sein. Für $\lambda = 0$ hat die zugehörige Gleichung

$$R'' + \frac{1}{2}\frac{g'}{g} R' = 0$$

eine Lösung

$$R = d_1 + d_2 \int_{r_0}^{r} \frac{1}{\sqrt{[g(\varrho)]}}\, d\varrho\,.$$

Mit Rücksicht auf (8) ist notwendig $d_2 = 0$.

---

[10]) Für die Ebene ist $g(r) = r^2$ und also $\int_{r_0}^{0}(1/r)\, dr = -\infty$. Die gegebene Voraussetzung ist auch für Flächen mit einer konstanten Krümmung gültig.

Für die Funktion $\omega$ bekommen wir so die Reihenentwicklung

$$\omega(r,\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\exp\left(\frac{n}{c}\int_{r_0}^{r} \frac{1}{\sqrt{[g(\varrho)]}}\,\mathrm{d}\varrho\right)\right) . \tag{9}$$

$$. \left(a_n \cos\frac{n}{c}\int_0^{\varphi}\sqrt{[h(\psi)]}\,\mathrm{d}\psi + b_n \sin\frac{n}{c}\int_0^{\varphi}\sqrt{[h(\psi)]}\,\mathrm{d}\psi\right) .$$

Von der Randbedingung folgt

$$f(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n}{c}\int_0^{\varphi}\sqrt{[h(\psi)]}\,\mathrm{d}\psi + b_n \sin\frac{n}{c}\int_0^{\varphi}\sqrt{[h(\psi)]}\,\mathrm{d}\psi\right) . \tag{10}$$

Nachdem (10) nicht eine Entwicklung nach Orthogonalfunktionen ist, bestimmen wir ihre Koeffizienten mittels der Einführung der Parameter $u, v$ durch die Transformation

$$u = \int_{r_0}^{r} \frac{\mathrm{d}\varrho}{\sqrt{[g(\varrho)]}}, \quad v = \int_0^{\varphi}\sqrt{[h(\psi)]}\,\mathrm{d}\psi \tag{11}$$

die gegenseitig eindeutig ist. In den Parametern $u, v$ ist die geodätische Kreisfläche mit dem Radius $r_0$ durch die Ungleichung $u \leqq 0$ gegeben, wobei die Funktionen $\omega, f$ in Bezug auf $v$ die Periode $v_0 = \int_0^{2\pi} h(\psi)\,\mathrm{d}\psi$ haben.

Die Gleichungen (9) und (10) haben die Form

$$\omega(u,v) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\exp\left(\frac{2\pi n}{v_0}u\right)\right)\left(a_n \cos\frac{2\pi n}{v_0}v + b_n \sin\frac{2\pi n}{v_0}v\right) \tag{12}$$

$$f(v) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{2\pi n}{v_0}v + b_n \sin\frac{2\pi n}{v_0}v\right) .$$

Daher folgen für die Koeffizienten $a_n$, $b_n$ die Formeln

$$a_n = \frac{2}{v_0}\int_0^{v_0} f(v)\cos\frac{2\pi n}{v_0}v\,\mathrm{d}v \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{13}$$

$$b_n = \frac{2}{v_0}\int_0^{v_0} f(v)\sin\frac{2\pi n}{v_0}v\,\mathrm{d}v \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

Kehrt man nun wieder zu den Polarparametern zurück, ergibt sich für die Koeffizienten der Entwicklung (9) folgendes:

$$a_n = \frac{1}{\pi c}\int_0^{2\pi} f\left(\int_0^{\varphi}\sqrt{[h(\psi)]}\,\mathrm{d}\psi\right)\cos\frac{n}{c}\int_0^{\varphi}\sqrt{[h(\psi)]}\,\mathrm{d}\psi \, . \sqrt{[h(\varphi)]}\,\mathrm{d}\varphi \tag{14}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi c}\int_0^{2\pi} f\left(\int_0^{\varphi}\sqrt{[h(\psi)]}\,\mathrm{d}\psi\right)\sin\frac{n}{c}\int_0^{\varphi}\sqrt{[h(\psi)]}\,\mathrm{d}\psi \, . \sqrt{[h(\varphi)]}\,\mathrm{d}\varphi$$

wo $c = v_0/2\pi = \frac{1}{2}\pi^{-1}\int_0^{2\pi}\sqrt{[h(\psi)]}\,\mathrm{d}\psi$ ist.

So wie auch in der Ebene kann man auf dem Grunde des Satzes 3 im § 1 beweisen, dass die Reihe (9), deren Koeffizienten durch die Formeln (14) gegeben sind, die Lösung unserer Aufgabe ist.[11])

**Bemerkung** 3. Wenn wir uns auf die Klasse der Flächen, für die $h = 1$ ist, (zu dieser gehören z.B. Flächen mit einer konstanten Krümmung) beschränken würden, dann möchten wir anstatt der Reihe (9) die Reihe

$$\omega(r, \varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \exp \left( \int_{r_0}^{r} \frac{n}{\sqrt{[g(\varrho)]}} \, d\varrho \right) \right) (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi)$$

bekommen (nachdem $c = 1$ ist), deren Koeffizienten man von der Randbedingung

$$f(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi)$$

bestimmen kann. Daher folgt

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) \cos n\psi \, d\psi \,, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) \sin n\psi \, d\psi \,.$$

### 3. DER VERALLGEMEINERTE POISSONINTEGRAL

Auf dem Grunde der Formeln (12) und (13) vom § 2 drücken wir so wie auch in der Ebene[12]) die Lösung der Dirichletschen Aufgabe auf der geodätischen Kreisfläche der Fläche in der Form des verallgemeinerten Poissonintegrales aus. In den Parametern $u$, $v$ ist

$$\omega(u, v) = \frac{1}{v_0} \int_0^{v_0} f(\nu) \, d\nu + \frac{2}{v_0} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \exp \left( \frac{2\pi n}{v_0} u \right) \right) \left( \int_0^{v_0} f(\nu) \cos \frac{2\pi n}{v_0} \nu \, d\nu \,.\, \cos \frac{2\pi n}{v_0} v + \right.$$

$$\left. + \int_0^{v_0} f(\nu) \sin \frac{2\pi n}{v_0} \nu \, d\nu \,.\, \sin \frac{2\pi n}{v_0} v \right) =$$

$$= \frac{1}{v_0} \int_0^{v_0} f(\nu) \left( 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left( \exp \left( \frac{2\pi n}{v_0} u \right) \right) . \cos \frac{2\pi n}{v_0} (\nu - v) \right) d\nu \,.$$

Legt man da $(2\pi/v_0)(\nu - v) = t$, ist der Kern des letzten Integrales gleich

$$-1 + 2 \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \exp \left( \frac{2\pi n}{v_0} u + it \right) \right)^n$$

[11]) Vgl. [1].
[12]) Vgl. [1].

Ist also

$$\left|\exp\left(\frac{2\pi}{v_0}u + it\right)\right| = \exp\left(\frac{2\pi}{v_0}u\right) < 1$$

d.h. $u < 0$, bekommen wir für den Kern:

$$-1 + 2\,\mathrm{Re}\,\frac{1}{1 - \exp\left(\frac{2\pi}{v_0}u + it\right)} = -1 + 2\,\mathrm{Re}\,\frac{1}{1 - \left(\exp\left(\frac{2\pi}{v_0}u\right)\right)(\cos t + i\sin t)} =$$

$$= -1 + 2\,\mathrm{Re}\,\frac{1 - \left(\exp\left(\frac{2\pi}{v_0}u\right)\right).\cos t + i\left(\exp\left(\frac{2\pi}{v_0}u\right)\right).\sin t}{\left(1 - \left(\exp\left(\frac{2\pi}{v_0}u\right)\right).\cos t\right)^2 + \left(\exp\left(\frac{4\pi}{v_0}u\right)\right).\sin^2 t} =$$

$$= \frac{1 - \exp\left(\frac{4\pi}{v_0}u\right)}{1 + \exp\left(\frac{4\pi}{v_0}u\right) - 2\left(\exp\left(\frac{2\pi}{v_0}u\right)\right).\cos t}.$$

Für $u < 0$ ist also

$$(1)\quad \omega(u, v) = \frac{1}{v_0}\int_0^{v_0} f(\nu)\,\frac{1 - \exp\left(\frac{4\pi}{v_0}u\right)}{1 + \exp\left(\frac{4\pi}{v_0}u\right) - 2\left(\exp\left(\frac{2\pi}{v_0}u\right)\right).\cos\frac{2\pi}{v_0}(\nu - v)}\,\mathrm{d}\nu$$

Daher folgt

**Satz 1.** *Die Lösung der Dirichletschen Aufgabe auf der geodätischen Kreisfläche mit dem Radius $r_0$ der Fläche mit dem metrischen Tensor $1, 0, g(r)\,h(\varphi)$ ist durch die Formel*

$$(2)\quad \omega(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi c}\int_0^{2\pi} f\left(\int_0^{\psi}\sqrt{[h(t)]}\,\mathrm{d}t\right).\left(1 - \exp\left(\frac{2}{c}\int_{r_0}^{r}\frac{1}{\sqrt{[g(\varrho)]}}\,\mathrm{d}\varrho\right)\right)\sqrt{[h(\psi)]}\,.$$

$$.\left[1 + \exp\left(\frac{2}{c}\int_{r_0}^{r}\frac{1}{\sqrt{[g(\varrho)]}}\,\mathrm{d}\varrho\right) -\right.$$

$$\left. - 2\left(\exp\left(\frac{1}{c}\int_{r_0}^{r}\frac{1}{\sqrt{[g(\varrho)]}}\,\mathrm{d}\varrho\right)\right).\cos\frac{1}{c}\left(\int_0^{\psi}\sqrt{[h(t)]}\,\mathrm{d}t - \int_0^{\varphi}\sqrt{[h(t)]}\,\mathrm{d}t\right)\right]^{-1}\mathrm{d}\psi$$

*gegeben, wo $c = \frac{1}{2}\pi^{-1}\int_0^{2\pi}\sqrt{[h(\psi)]}\,\mathrm{d}\psi$ ist.*

**Beweis.** Die Formel (2) folgt sofort von (1) durch die Transformation (11) von § 2. Mit Hilfe des Satzes 3 im § 1 beweist man so wie auch in der Ebene, dass die Funktion (2) sich an der Grenze des geodätischen Kreisfläche stetig den Randwerten $f(\varphi)$ anschliesst.[13]

**Bemerkung 1.** Das Integral in der Formel (2) ist eine Verallgemeinerung des Poissonintegrales für harmonische Funktionen auf einer ebenen Kreisfläche. Für $g(r) = r^2$, $h(\varphi) = 1$ bekommt man nämlich

$$\omega(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) \frac{r_0^2 - r^2}{r_0^2 + r^2 - 2rr_0 \cos(\psi - \varphi)} \, d\psi$$

**Beispiel.** Es sei die Dirichletsche Aufgabe auf der geodätischen Kreisfläche (mit dem Radius $r_0$) einer Fläche mit konstanter positiver Gaussschen Krümmung $K$ gegeben. Da ist $g(r) = (1/K) \sin^2 \sqrt{(K)}\, r$ und die Laplace-Gleichung hat die Form

$$2 \sin^2 \sqrt{(K)}\, r \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + 2K \frac{\partial^2 \omega}{\partial \varphi^2} + \sqrt{(K)} \sin 2 \sqrt{(K)}\, r \frac{\partial \omega}{\partial r} = 0 \, .$$

Weiter ist

$$\int_{r_0}^{r} \frac{1}{\sqrt{[g(\varrho)]}} \, d\varrho = \int_{r_0}^{r} \frac{\sqrt{K}}{\sin \sqrt{(K)}\, \varrho} \, d\varrho = \log \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \sqrt{(K)}\, r}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \sqrt{(K)}\, r_0}$$

wobei

$$\lim_{r \to 0} \log \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \sqrt{(K)}\, r}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \sqrt{(K)}\, r_0} = -\infty$$

ist, so dass die Bedingung (8) vom § 2 erfüllt ist. Die Lösung dieser Aufgabe gibt dann die Formel

$$\omega(r, \varphi) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) \frac{(\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \sqrt{(K)}\, r_0 - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \sqrt{(K)}\, r) \, d\psi}{\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \sqrt{(K)}\, r_0 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \sqrt{(K)}\, r - 2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \sqrt{(K)}\, r \, . \operatorname{tg} \frac{1}{2} \sqrt{(K)}\, r_0 \, . \cos(\psi - \varphi)}$$

an.

## 4. DIE EIGENSCHAFTEN HARMONISCHER FUNKTIONEN AUF FLÄCHEN

Die Fundamentaleigenschaften harmonischer Funktionen auf Flächen mit dem metrischen Tensor 1, 0, $g(r)\, h(\varphi)$ kann man so wie auch in der Ebene davon herleiten, dass jede solche Funktion in der Form eines verallgemeinerten Poissonintegrales auf der geodätischen Kreisfläche der Fläche ausdrückbar ist.

[13]) Vgl. [1].

So z.B. kann man den Satz über den arithmetischen Mittelwert auf so eine Weise bekommen: Die Länge des geodätischen Kreises $r = r_0$ ist durch das Integral

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{[g(r_0)\, h(\varphi)]}\, d\varphi$$

gegeben, oder in den Parametern $u, v$, die durch die Transformation (11) im § 2 gegeben sind:

$$l = \int_0^{v_0} \sqrt{[g(0)]}\, dv = \sqrt{[g(0)]}\, v_0 \,.$$

Wenn man auf der Fläche die Parameter ${}^{x}u$, ${}^{x}v$ durch die Gleichungen ${}^{x}u = \sqrt{[g(0)]}\, u$, ${}^{x}v = \sqrt{[g(0)]}\, v$ angibt, hat der Parameter ${}^{x}v$ die Bedeutung der Länge des Bogens des geodätischen Kreises. In den Parametern ${}^{x}u$, ${}^{x}v$ behält die Formel (1) vom § 3 dieselbe Form (dabei bedeutet ${}^{x}v_0$ die Länge des geodätischen Kreises). Von der Bedingung (8) im § 2 bekommen wir daher sofort

$$\omega(S) = \frac{1}{{}^{x}v_0} \int_0^{{}^{x}v_0} f(v)\, dv \,.$$

Auch weitere Eigenschaften wäre es möglich mit Hilfe des verallgemeinerten Poissonintegrales zu erhalten. Dieses würde sicher eine interessante Vergleichung der Beweise mit der Ebene liefern. Es möchte sich zeigen, dass die Beweise man analogisch wie auch in der Ebene (mit einer Benützung des Satzes 3 vom § 1) führen kann. Eine wichtige Rolle würde da die harmonische Funktion, die das Integral $\int_{r_0}^{r} g^{-\frac{1}{2}}(\varrho)\, d\varrho$ angibt, spielen, da diese ein Analogon des logarithmischen Potentiales ist. Diese Eigenschaften kann man aber leichter bekommen. Auf unseren Flächen haben nämlich die Minimalkurven in den Polarparametern die Gleichung

$$dr^2 + g(r)\, h(\varphi)\, d\varphi^2 = 0$$

oder

$$\int_{r_0}^{r} \frac{d\varrho}{\sqrt{[g(\varrho)]}} \overset{-}{(+)}\, i \int_0^{\varphi} \sqrt{[h(\psi)]}\, d\psi = 0 \,.$$

Daher, auf dem Grunde von I, § 2 (die Formeln (4) und (5)), sehen wir, dass die Parameter $u, v$, die die Transformation

$$u = \int_{r_0}^{r} \frac{d\varrho}{\sqrt{[g(\varrho)]}}\,, \quad v = \int_0^{\varphi} \sqrt{[h(\psi)]}\, d\psi$$

angibt, isothermisch sind und die Laplace-Gleichung hat in denen die kanonische Form $\partial^2\omega/\partial u^2 + \partial^2\omega/\partial v^2 = 0$ [14]). Von dem folgt, das die harmonischen Funktionen

[14]) Siehe I.

auf Flächen, die mit der Ebene konform sind, dieselbe Eigenschaften wie auch die harmonischen Funktionen auf der Ebene haben. Speziell gelten der erste und zweite Satz von Harnack, der Satz von Liouville, der Satz über die entfernbare Singularität und der Satz über die Analytizität der harmonischen Funktion (in den isothermischen Parametern).

*Anschrift des Verfassers:* Praha 1, Malostranské nám. 25 (Matematicko-fyzikální fakulta).

## Výtah

# DIRICHLETŮV PROBLÉM PRO LAPLACEOVU ROVNICI NA GEODETICKÉM KRUHU PLOCHY

JIŘÍ ŠTĚPÁNEK, Praha

V článku je řešen Dirichletův problém pro Laplaceovu rovnici na geodetickém kruhu plochy s metrickým tensorem 1, 0, $g(r)$ $h(\varphi)$ (v polárních parametrech). Řešení je vyjádřeno zobecněným Poissonovým integrálem (2), § 3.

Dále jsou uvedeny základní vlastnosti harmonických funkcí na plochách konformních s rovinou.

## Резюме

# ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА НА ГЕОДЕЗИЧЕСКОМ КРУГЕ ПОВЕРХНОСТИ

ЙИРЖИ ШТЕПАНЕК (Jiří Štěpánek), Прага

В статье решается задача Дирихле для уравнения Лапласа на геодезическом круге с метрическим тензором 1, 0, $g(r)$ $h(\varphi)$ (в полярных параметрах). Решение представлено обобщенным интегралом Пуассона (2), глава 3.

Затем приведены основные свойства гармонических функций на поверхностях, конформных плоскости.