Časopis pro pěstování matematiky

Jiří Štěpánek

Das Dirichletsche Problem für die Wellen- und Wärmeleitungsgleichung auf dem geodätischen Kreis einer Fläche

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 92 (1967), No. 1, 70--80

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117599`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 92 (1967), Praha

DAS DIRICHLETSCHE PROBLEM FÜR DIE WELLEN- UND WÄRMELEITUNGSGLEICHUNG AUF DEM GEODÄTISCHEN KREIS EINER FLÄCHE

JIŘÍ ŠTĚPÁNEK, Praha

(Eingelangt am 10. Dezember 1965)

In der Arbeit werden Randwertaufgaben für die Wellen- und Wärmeleitungsgleichung auf der geodätischen Kreisfläche einer Fläche gelöst. Damit es möglich ist die Sachen zu Ende bringen, war es nötig sich auf Flächen mit dem metrischen Tensor 1, 0, $r^2 h(\varphi)$ zu beschränken.[1])

A. DIE WELLENGLEICHUNG AUF EINER FLÄCHE

1. DAS DIRICHLETSCHE PROBLEM FÜR DIE WELLENGLEICHUNG AUF EINER MIT DER EBENE KONFORMEN FLÄCHE UND DESSEN EINDEUTIGKEIT

Es sei auf der Hyperfläche $\mathscr{S}$ im E_{n+1} das Dirichletsche Problem für die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = g^{ab} \nabla_b \frac{\partial \omega}{\partial \xi^a} \tag{1}$$

gegeben (g^{ab} ist der metrische Tensor der Hyperfläche $\mathscr{S}$)[2]):

Auf der Hyperfläche $\mathscr{S}$ sei ein beschränktes Gebiet s mit der Grenzkurve $\mathscr{C}$: $\xi^a = \xi^a(\tau)$ gegeben. Es ist für $[t, \xi^a] \in \bar{\Omega} = \langle 0, K \rangle \times \bar{s}$ eine stetige Funktion $\omega = \omega(t, \xi^a)$ mit stetigen partiellen Ableitungen 2. Ordnung zu finden, die im Inneren von $\bar{\Omega}$ die Gleichung (1) erfüllt und die der Randbedingung $\omega(t, \xi^a(\tau)) = f(t, \tau)$ und der Anfangsbedingungen $\omega(0, \xi^a) = \psi_0(\xi^a)$, $(\partial \omega / \partial t)(0, \xi^a) = \psi_1(\xi^a)$ genügt.

---

[1]) Diese Behandlung knüpft an meine Arbeiten: „Poissonsche, Wellen- und Wärmeleitungsgleichung auf Flächen", „Das Dirichletsche Problem für die Laplace-Gleichung auf dem geodätischen Kreis einer Fläche", „Das Dirichletsche Problem für die Laplace-Gleichung auf dem Gebiet einer Fläche" an. Diese Arbeiten werden im weiteren kurz I, II, III bezeichnet.

[2]) Siehe I, § 1.

Bemerkung 1. Unser Problem kann man im E_3 z.B. physikalisch als die Aufgabe der Schwingung eines Gebietes einer Fläche, wenn der Anfangsausschwung, die Geschwindigkeit der Schwingungen und die Lage der Grenze des Gebietes bekannt sind, interpretieren.

Satz 1. *Das Dirichletsche Problem für die Wellengleichung* (1) *hat auf der Fläche $\mathscr{S}$ im E_3, die mit der Ebene konform ist, höchstens eine Lösung.*

Beweis. Führt man auf $\mathscr{S}$ die isothermischen Parameter u, v ein, hat die Gleichung (1) die kanonische Form

$$\frac{1}{g}\frac{\partial^2\omega}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\omega}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial v^2}$$

wo $g, 0, g$ der metrische Tensor der Fläche in den Parametern u, v ist.[3]) Es genügt zu zeigen, dass die Funktion ω, die eine Lösung des Problemes bei homogenen Anfangs- und Randbedingungen ist, identisch gleich Null im $\bar{\Omega}$ ist. Wir nehmen das Integral

$$J \equiv \iiint\limits_{\Omega^x} \frac{\partial\omega}{\partial t}\left(\frac{1}{g}\frac{\partial^2\omega}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\omega}{\partial u^2} - \frac{\partial^2\omega}{\partial v^2}\right) \mathrm{d}\Omega^x = 0$$

wo $\bar{\Omega}^x = \langle 0, K^x\rangle \times \bar{s}$, $(K^x \leqq K)$ ist. So wie in der Ebene bekommt man[4])

$$J \equiv \frac{1}{2}\iint\limits_{s}\left[\left(\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\omega}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial v}\right)^2\right]_{t=K^x} \mathrm{d}s$$

woher $\omega(t, u, v) = 0$, $[t, u, v] \in \bar{\Omega}^x$ folgt.

Es sei das Dirichletsche Problem auf der geodätischen Kreisfläche der Fläche im E_3 gegeben und wir führen da die Krummflächenpolarkoordinaten r, φ ein. Der metrische Tensor der Fläche hat die Komponenten $1, 0, G(r, \varphi)$. Die geodätische Kreisfläche mit dem Radius r_0 ist mit der Ungleichung $r \leqq r_0$ gegeben und die Gleichung (1) übergeht in die Gleichung[5])

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\omega}{\partial r^2} + \frac{1}{G}\frac{\partial^2\omega}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial r}\frac{\partial\omega}{\partial r} - \frac{1}{2G^2}\frac{\partial G}{\partial\varphi}\frac{\partial\omega}{\partial\varphi} \tag{2}$$

Bemerkung 2. Wenn die Fläche eine Ebene mit den Gleichungen $x = \xi^1$, $y = \xi^2$, $z = 0$ ist, übergehen die Krummflächenpolarparameter in die gewöhnlichen Polar-

---

[3]) Siehe I, § 2.

[4]) Vgl. [1] (Literaturverzeichnis siehe in I).

[5]) Siehe I, II.

parameter r, φ und die Gleichung (2) übergeht in die Gleichung

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\omega}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\omega}{\partial r}$$

d.h. in die Wellengleichung in der Ebene in den Polarparametern.

Die Aufgabe auf der geodätischen Kreisfläche in den Polarparametern kann man folgenderweise formulieren: Es ist für $[t, r, \varphi] \in \bar{\Omega} = \langle 0, K\rangle \times \langle 0, r_0\rangle \times (-\infty, +\infty)$ eine stetige Funktion $\omega = \omega(t, r, \varphi)$ mit stetigen partiellen Ableitungen 2. Ordnung zu finden, die im Inneren vom $\bar{\Omega}$ die Gleichung (2), die Randbedingung $\omega(t, r_0, \varphi) = f(t, \varphi)$ und die Anfangsbedingungen $\omega(0, r, \varphi) = \psi_0(r, \varphi)$, $(\partial\omega/\partial t)(0, r, \varphi) = \psi_1(r, \varphi)$ erfüllt. Dabei sind die Funktionen $\omega, f, \psi_0, \psi_1$ periodisch mit Bezug auf φ mit der Periode 2π.

2. DIE LÖSUNG DES DIRICHLETSCHEN PROBLEMS AUF DER GEODÄTISCHEN KREISFLÄCHE DER FLÄCHE MIT DEM METRISCHEN TENSOR $1, 0, r^2 h(\varphi)$

Es sei das Dirichletsche Problem auf der geodätischen Kreisfläche der Fläche mit dem metrischen Tensor $1, 0, g(r)\, h(\varphi)$ (d.h. $G(r, \varphi) = g(r)\, h(\varphi)$) gegeben. Diese Flächen sind mit der Ebene konform[6]) und die Lösung des Problemes ist also eindeutig. Wir setzen im weiteren voraus, dass die Randbedingung homogen ist, d.h. dass $f = 0$ ist.

Die Gleichung (2) vom § 1 hat die Form

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\omega}{\partial r^2} + \frac{1}{gh}\frac{\partial^2\omega}{\partial\varphi^2} + \frac{g'}{2g}\frac{\partial\omega}{\partial r} - \frac{h'}{2gh^2}\frac{\partial\omega}{\partial\varphi}$$

Wenn man

$$\omega(t, r, \varphi) = T(t)\, p(r, \varphi)$$

legt, ergibt sich

$$\frac{T''}{T} = \frac{1}{p}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{gh}\frac{\partial^2 p}{\partial\varphi^2} + \frac{g'}{2g}\frac{\partial p}{\partial r} - \frac{h'}{2gh^2}\frac{\partial p}{\partial\varphi}\right)$$

woher

(1) $$T'' + k^2 T = 0$$

(2) $$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{gh}\frac{\partial^2 p}{\partial\varphi^2} + \frac{g'}{2g}\frac{\partial p}{\partial r} - \frac{h'}{2gh^2}\frac{\partial p}{\partial\varphi} + k^2 p = 0$$

---

[6]) Siehe II, § 4.

(k = konst.) folgt. Die Lösung der Gleichung (2) wird in der Form $p(r, \varphi) = R(r)\,\Phi(\varphi)$ gesucht und wir haben

$$-\left(g\,\frac{R''}{R} + \tfrac{1}{2}g'\,\frac{R'}{R} + gh^2\right) = \frac{1}{h}\frac{\Phi''}{\Phi} - \frac{h'}{2h^2}\frac{\Phi'}{\Phi}$$

d.h.

$$R'' + \frac{1}{2}\frac{g'}{g}R' + \left(k^2 - \frac{\lambda^2}{g}\right)R = 0 \tag{3}$$

$$\frac{1}{h}\Phi'' - \frac{1}{2}\frac{h'}{h^2}\Phi' + \lambda^2\Phi = 0 \tag{4}$$

($\lambda \geqq 0$ konst).

Wenn man in (4) die Substitution $\Phi'/\Phi = z$ einführt, dann ergibt sich für z die Gleichung

$$\frac{1}{h}z' - \frac{1}{2}\frac{h'}{h^2}z = -\lambda^2 - \frac{1}{h}z^2$$

Da die Funktion $z = \overset{+}{(-)}\, i\lambda\sqrt{h}$ die beiden Seiten anulliert, folgt davon die Lösung

$$\Phi = \exp\left(\overset{+}{(-)}\, i\lambda \int_0^{\varphi}\sqrt{[h(\psi)]}\,\mathrm{d}\psi\right) = \cos\gamma \int_0^{\varphi}\sqrt{[h(\psi)]}\,\mathrm{d}\psi \overset{+}{(-)}\, i\sin\lambda \int_0^{\varphi}\sqrt{[h(\psi)]}\,\mathrm{d}\psi$$

Für die Funktion $\int_0^{\varphi}\sqrt{[h(\psi)]}\,\mathrm{d}\psi$ aber gilt[7])

$$\int_0^{\varphi}\sqrt{[h(\psi)]}\,\mathrm{d}\psi = H(\varphi) + c\varphi$$

wobei H periodisch mit der Periode 2π ist und $c = \frac{1}{2}\pi^{-1}\int_0^{2\pi}\sqrt{[h(\psi)]}\,\mathrm{d}\psi$ und also ist notwendig $\lambda = n/c$ ($n \geqq 0$ ganz). Für $n > 0$ bekommen wir die allgemeine Lösung der Gleichung für Φ:

$$\Phi = a_n \cos\frac{n}{c}\int_0^{\varphi}\sqrt{[h(\psi)}\,\mathrm{d}\psi + b_n \sin\frac{n}{c}\int_0^{\varphi}\sqrt{[h(\psi)]}\,\mathrm{d}\psi$$

Für $n = 0$ haben wir die Gleichung

$$\Phi'' - \frac{1}{2}\frac{h'}{h}\Phi' = 0$$

deren Lösung

$$\Phi = a_0 + b_0\int_0^{\varphi}\sqrt{[h(\psi)]}\,\mathrm{d}\psi$$

[7]) Siehe II, § 2.

ist. Nachdem $\int_0^\varphi \sqrt{[h(\psi)]}\, d\psi$ nicht eine periodische Funktion ist, muss $b_0 = 0$ sein. Durch einsetzen von $\lambda = n/c$ in die Gleichung (3) bekommt man

$$R'' + \frac{1}{2}\frac{g'}{g} R' + \left(k^2 - \frac{n^2}{c^2 g}\right) R = 0 \tag{5}$$

Um die Sachen bis zu einem Ende zu bringen, beschränken wir uns im weiteren auf Flächen, für die $g(r) = r^2$ ist. In diesem Fall ist (5) die Besselsche Gleichung

$$R'' + \frac{1}{r} R' + \left(k^2 - \frac{n^2}{c^2 r^2}\right) R = 0 \tag{6}$$

Durch die Substitution $\varrho = kr$ ergibt sich von (6)

$$\varrho^2 R'' + \varrho R' + \left(\varrho^2 - \frac{n^2}{c^2}\right) R = 0$$

So wie auch in der Ebene[8]) bekommen wir die Lösung $R = J_\nu(\varrho)$, wo J_ν die Besselfunktion erster Art und $\nu = (n/c)$-ter Ordnung ist. Bezeichnet man $kr_0 = {}^0\varrho$, folgt von der Randbedingung $J_\nu({}^0\varrho) = 0$. Diese Gleichung hat unendlich viele positive Wurzeln ${}^0\varrho_\mu^{(\nu)}$ $(\mu = 1, 2, \ldots)$, denen die Eigenwerte $k_{\nu\mu} = {}^0\varrho_\mu^{(\nu)}/r_0$ entsprechen und zu denen die Funktionen $R_{\nu\mu} = J_\nu({}^0\varrho_\mu^{(\nu)} r/r_0)$ gehören. Kehrt man nun zu der Gleichung für die Funktion p zurück, dann ergibt sich, dass dem Eigenwert $\lambda_{\nu\mu}$ zwei (linear unabhängige) Eigenfunktionen

$$J_\nu\left(\frac{{}^0\varrho_\mu^{(\nu)}}{r_0} r\right) \cos \frac{n}{c} \int_0^\varphi \sqrt{[h(\psi)]}\, d\psi \,, \quad J_\nu\left(\frac{{}^0\varrho_\mu^{(\nu)}}{r_0} r\right) \sin \frac{n}{c} \int_0^\varphi \sqrt{[h(\psi)}\, d\psi$$

entsprechen. Daher folgt, dass die Funktionen, die allen Bedingungen ausser den Anfangsbedingungen genügen, die Form

$$\omega_{\nu\mu}(t, r, \varphi) = \left[\left(a_{\nu\mu} \cos \frac{{}^0\varrho_\mu^{(\nu)}}{r_0} t + b_{\nu\mu} \sin \frac{{}^0\varrho_\mu^{(\nu)}}{r_0} t\right) \cos \nu \int_0^\varphi \sqrt{[h(\psi)]}\, d\psi + \right.$$
$$\left. + \left(c_{\nu\mu} \cos \frac{{}^0\varrho_\mu^{(\nu)}}{r_0} t + d_{\nu\mu} \sin \frac{{}^0\varrho_\mu^{(\nu)}}{r_0} t\right) \sin \nu \int_0^\varphi \sqrt{[h(\psi)]}\, d\psi\right] . \, J_\nu\left(\frac{{}^0\varrho_\mu^{(\nu)}}{r_0} r\right)$$

haben. Zu dem Erfüllen der Anfangsbedingungen stellen wir die Reihe

$$\omega(t, r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\left(a_{nm} \cos \frac{{}^0\varrho_m^{(n/c)}}{r_0} t + b_{nm} \sin \frac{{}^0\varrho_m^{(n/c)}}{r_0} t\right) \cos \frac{n}{c} \int_0^\varphi \sqrt{[h(\psi)]}\, d\psi + \right. \tag{7}$$
$$\left. + \left(c_{nm} \cos \frac{{}^0\varrho_m^{(n/c)}}{r_0} t + d_{nm} \sin \frac{{}^0\varrho_m^{(n/c)}}{r_0} t\right) \sin \frac{n}{c} \int_0^\varphi \sqrt{[h(\psi)]}\, d\psi\right] . \, J_{n/c}\left(\frac{{}^0\varrho_m^{(n/c)}}{r_0} r\right)$$

[8]) Siehe [2].

zusammen, woher für $t = 0$ man

(8)

$$\psi_0(r, \varphi) = \sum_{m=1}^{\infty} a_{0m} J_0\left(\frac{{}^0\varrho_m^{(0)}}{r_0} r\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} J_{n/c}\left(\frac{{}^0\varrho_m^{(n/c)}}{r_0} r\right)\right) \cos\frac{n}{c}\int_0^{\varphi}\sqrt{[h(\psi)]}\, d\psi +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty} c_{nm} J_{n/c}\left(\frac{{}^0\varrho_m^{(n/c)}}{r_0} r\right)\right) \sin\frac{n}{c}\int_0^{\varphi}\sqrt{[h(\psi)]}\, d\psi$$

(9) $$\psi_1(r, \varphi) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{{}^0\varrho_m^{(0)}}{r_0} b_{0m} J_0\left(\frac{{}^0\varrho_m^{(0)}}{r_0} r\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{{}^0\varrho_m^{(n/c)}}{r_0} b_{nm} J_{n/c}\left(\frac{{}^0\varrho_m^{(n/c)}}{r_0} r\right)\right) .$$
$$. \cos\frac{n}{c}\int_0^{\varphi}\sqrt{[h(\psi)]}\, d\psi + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{{}^0\varrho_m^{(n/c)}}{r_0} d_{nm} J_{n/c}\left(\frac{{}^0\varrho_m^{(n/c)}}{r_0} r\right)\right) \sin\frac{n}{c}\int_0^{\varphi}\sqrt{[h(\psi)]}\, d\psi$$

bekommt. Da die Entwicklungen (8) und (9) nicht Entwicklungen laut Orthogonalfunktionen sind, bestimmen wir die Koeffizienten folgenderweise: Wir führen auf der Fläche isothermische Parameter u, v mit der Transformation

(10) $$u = \log\frac{r}{r_0}, \quad v = \int_0^{\varphi}\sqrt{[h(\psi)]}\, d\psi$$

(die gemeinsam eindeutig ist)[9]) ein. In diesen Parametern ist die geodätische Kreisfläche durch die Ungleichung $u \leqq 0$ gegeben, wobei die Funktionen ω, ψ_0, ψ_1 in Bezug auf v die Periode $v_0 = \int_0^{2\pi}\sqrt{[h(\varphi)]}\, d\varphi$ haben und die Gleichungen (7), (8), (9) haben die Form

(11) $$\omega(t, u, v) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left[\left(a_{nm}\cos\frac{{}^0\varrho_m^{(n/c)}}{r_0} t + b_{nm}\sin\frac{{}^0\varrho_m^{(n/c)}}{r_0} t\right)\cos\frac{n}{c} v +\right.$$
$$\left. + \left(c_{nm}\cos\frac{{}^0\varrho_m^{(n/c)}}{r_0} t + d_{nm}\sin\frac{{}^0\varrho_m^{(n/c)}}{r_0} t\right)\sin\frac{n}{c} v\right] . J_{n/c}({}^0\varrho_m^{(n/c)} e^u)$$

(12) $$\psi_0(u, v) = \sum_{m=1}^{\infty} a_{0m} J_0({}^0\varrho_m^{(0)} e^u) +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} J_{n/c}({}^0\varrho_m^{(n/c)} e^u)\right)\cos\frac{n}{c} v + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty} c_{nm} J_{n/c}({}^0\varrho_m^{(n/c)} e^u)\right)\sin\frac{n}{c} v$$

(13) $$\psi_1(u, v) = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{{}^0\varrho_m^{(0)}}{r_0} b_{0m} J_0({}^0\varrho_m^{(0)} e^u) +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{{}^0\varrho_m^{(n/c)}}{r_0} b_{nm} J_{n/c}({}^0\varrho_m^{(n/c)} e^u)\right)\cos\frac{n}{c} v + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{{}^0\varrho_m^{(n/c)}}{r_0} d_{nm} J_{n/c}({}^0\varrho_m^{(n/c)} e^u)\right)\sin\frac{n}{c} v$$

[9]) Siehe I, II.

Von (12) folgt

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_{0m} J_0({}^0\varrho_m^{(0)} e^u) = \frac{1}{2\pi c} \int_0^{2\pi c} \psi_0(u, v) \, dv$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} J_{n/c}({}^0\varrho_m^{(n/c)} e^u) = \frac{1}{\pi c} \int_0^{2\pi c} \psi_0(u, v) \cos \frac{n}{c} v \, dv$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} c_{nm} J_{n/c}({}^0\varrho_m^{(n/c)} e^u) = \frac{1}{\pi c} \int_0^{2\pi c} \psi_0(u, v) \sin \frac{n}{c} v \, dv$$

woher wir (schon in den Polarparametern)

$$a_{0m} = \frac{2}{\pi c r_0^2 J_{1/c}^2({}^0\varrho_m^{(0)})} \int_0^{r_0} \left(\int_0^{2\pi} \psi_0(r, \varphi) \sqrt{[h(\varphi)]} \, d\varphi \right) J_0 \left(\frac{{}^0\varrho_m^{(0)}}{r_0} r \right) r \, dr$$

$$a_{nm} =$$

$$= \frac{2}{\pi c r_0^2 J_{n+1/b}({}^0\varrho_m^{(n/c)})} \int_0^{r_0} \left(\int_0^{2\pi} \psi_0(r, \varphi) \cos \frac{n}{c} \int_0^{\varphi} \sqrt{[h(\psi)]} \, d\psi \sqrt{[h(\varphi)]} \, d\varphi \right) J_{n/c}({}^0\varrho_{(m)}^{(n/c)} r/r_0) \, r \, dr$$

$$c_{nm} =$$

$$= \frac{2}{\pi c r_0^2 J_{(n+1)c}({}^0\varrho_m^{(n/c)})} \int_0^{r_0} \left(\int_0^{2\pi} \psi_0(r, \varphi) \sin \frac{n}{c} \int_0^{\varphi} \sqrt{[h(\psi)]} \, d\psi \sqrt{[h(\varphi)]} \, d\varphi \right) J_{n/c}({}^0\varrho_{(m)}^{(n/c)} r/r_0) \, r \, dr$$

bekommen. Analogisch berechnen wir mit Hilfe (13) die Koefficienten b_{nm}, d_{nm}. Ähnlich wie in der Ebene kann man unter bestimmten Zusatzvoraussetzungen beweisen, dass die Reihe (7), die Lösung unseren Problemes ist.

B. DIE WÄRMELEITUNGSGLEICHUNG AUF EINER FLÄCHE

1. DAS DIRICHLETSCHE PROBLEM AUF EINER FLÄCHE, DIE MIT DER EBENE LOKAL KONFORM IST, UND DESSEN EINDEUTIGKEIT

Es sei auf einer Hyperfläche $\mathcal{S}$ im E_{n+1} das Dirichletsche Problem für die Wärmeleitungsgleichung

$$\text{(1)} \qquad \frac{\partial \omega}{\partial t} = g^{ab} \nabla_b \frac{\partial \omega}{\partial \xi^a}$$

(g^{ab} ist der metrische Tensor der Hyperfläche $\mathcal{S}$) gegeben[10]):

[10]) Siehe I, § 1.

Auf der Hyperfläche $\mathcal{S}$ sei ein beschränktes Gebiet s mit der Grenzkurve $\mathscr{C}$: $\xi^a = \xi^a(\tau)$ gegeben. Es ist für $[t, \xi^a] \in \bar{\Omega} = \langle 0, K \rangle \times \bar{s}$ eine stetige Funktion $\omega = \omega(t, \xi^a)$ zu finden, die im Inneren von $\bar{\Omega}$ stetige partielle Ableitungen 2. Ordnung hat, die Gleichung (1) erfüllt und die Randbedingung $\omega(t, \xi^a(\tau)) = f(t, \tau)$ und Anfangsbedingung $\omega(0, \xi^a) = \psi_0(\xi^a)$ erfüllt.

Bemerkung 1. Unser Problem kann man physikalisch im E_3 als z.B. die Aufgabe der Wärmeleitung in einem Gebiet einer Fläche interpretieren, wenn uns der Anfangswärmezustand des Gebietes und die Temperatur seiner Grenze bekannt ist.

Satz 1. *Es sei die Funktion $\omega = \omega(t, \xi^a)$ auf der Menge $\bar{\Omega} = \langle 0, K \rangle \times \bar{s}$ stetig und sie erfülle im Inneren von $\bar{\Omega}$ die Gleichung* (1) *auf einer Fläche im E_3, die mit der Ebene lokal konform ist. Dann erreicht ihr absolutes Extrem entweder auf der „unteren Grundfläche“ $\bar{Z}$ oder auf dem „Mantel“ $\bar{P}$ des „Zylinders“ $\bar{\Omega}$.*

Den Beweis kann man durch eine Übertragung des Beweises für die Ebene[11]) erhalten. Wir bezeichnen $\max\limits_{[t,\xi^a] \in \bar{\Omega}} \omega(t, \xi^a) = M$, $\max\limits_{[t,\xi^a] \in \bar{Z} \cup \bar{P}} (t, \xi^a) = m$ und setzen voraus, dass ein Punkt $[t_0, \xi_0^a] \in \bar{\Omega} - (\bar{Z} \cup \bar{P})$ existiert so, dass $\omega(t_0, \xi_0^a) = M$ ist. Dann erreicht aber die Funktion $\omega^x(t, \xi^a) = \omega(t, \xi^a) + (M - m/6d^2)\, \delta_{ab}(\xi^a - \xi_0^a)(\xi^b - \xi_0^b)$, wo d der Durchmesser des Gebietes s ist, ihr Maximum in dem Punkte $[t_1, \xi_1^a] \in \bar{\Omega} - (\bar{Z} \cup \bar{P})$. Daher folgt für jedes $g > 0$:

$$\frac{\partial \omega^x}{\partial t}(t_1, \xi_1^c) - g\delta^{ab} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^a \, \partial \xi^b}(t_1, \xi_1^c) \geqq 0 \tag{2}$$

Anderseits bekommen wir, dass die linke Seite dieser Ungleichung

$$\frac{\partial \omega}{\partial t}(t_1, \xi_1^c) - g\delta^{ab} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^a \, \partial \xi^b}(t_1, \xi_1^c) - \frac{1}{gd^2}(M - m) \tag{3}$$

gleich ist. Da die Fläche mit der Ebene lokal konform ist, kann man voraussetzen, dass in der Umgebung des Punktes $[t_1, \xi_1^c]$ die Parameter ξ^c isothermisch sind und die Gleichung (1) hat also in diesen die kanonische Form[12])

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \delta^{ab} g \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^a \, \partial \xi^b}$$

($g(\xi^c)$, 0, $g(\xi^c)$ ist der metrische Tensor der Fläche). Von (2) und (3) folgt dann

$$\frac{\partial \omega^x}{\partial t}(t_1, \xi_1^c) - g\delta^{ab} \frac{\partial^2 \omega^x}{\partial \xi^a \, \partial \xi^b}(t_1, \xi_1^c) = -\frac{1}{gd^2}(M - m) < 0$$

was ein Widerspruch mit (2) ist.

---

[11]) Vgl. [1].

[12]) Siehe I, § 2.

Der Satz 1 hat diese Folgerung:

Satz 2. *Das Dirichletsche Problem für die Gleichung* (1) *auf einer Fläche im E_3, die mit der Ebene lokal koform ist, hat höchstens eine Lösung und diese ist korrekt.*

Wir sollen das Dirichletsche Problem auf der geodätischen Kreisfläche der Fläche im E_3 in den Polarparametern r, φ lösen. Die Gleichung (1) hat die Form

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{G}\frac{\partial^2 \omega}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial r}\frac{\partial \omega}{\partial r} - \frac{1}{2G^2}\frac{\partial G}{\partial \varphi}\frac{\partial \omega}{\partial \varphi} \tag{4}$$

Bemerkung 2. Für die Ebene hat die Gleichung (4) die bekannte Form

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \omega}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \omega}{\partial r}$$

Die Aufgabe auf der geodätischen Kreisfläche mit dem Radius r_0 kann man in den Parametern r, φ so ausdrücken: Es ist für $[t, r, \varphi] \in \bar{\Omega} = \langle 0, K\rangle \times \langle 0, r_0\rangle \times (-\infty, +\infty)$ eine stetige Funktion $\omega = \omega(t, r, \varphi)$ zu finden, die im Inneren von $\bar{\Omega}$ stetige partielle Ableitungen 2. Ordnung hat, die Gleichung (4) erfüllt, wobei diese der Randbedingung $\omega(t, r_0, \varphi) = f(t, \varphi)$ und der Anfangsbedingung $\omega(0, r, \varphi) = \psi_0(r, \varphi)$ genügt. (Die Funktionen ω, f, ψ_0 sind in Bezug auf φ periodisch mit der Periode 2π.)

So wie im Kapitel A lösen wir unser Problem auf der Fläche mit dem metrischen Tensor $1, 0, g(r)\,h(\varphi)$ bei der homogenen Randbedingung. Die Gleichung (4) hat die Form

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{gh}\frac{\partial^2 \omega}{\partial \varphi^2} + \frac{g'}{2g}\frac{\partial \omega}{\partial r} - \frac{h'}{2gh^2}\frac{\partial \omega}{\partial \varphi}$$

Legt man $\omega(t, r, \varphi) = T(t)\,p(r, \varphi)$, dann ist

$$T' + k^2 T = 0$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{gh}\frac{\partial^2 p}{\partial \varphi^2} + \frac{g'}{2g}\frac{\partial p}{\partial r} - \frac{h'}{2gh^2}\frac{\partial p}{\partial \varphi} + k^2 p = 0$$

(k = konst.) Die Gleichung für p ist der Gleichung (2) im Kap. A, § 2 gleich. Wenn wir uns wieder auf Flächen mit $g(r) = r^2$ beschränken, so bekommen wir für die Lösung ω die Reihe[13])

$$\omega(t, r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(a_{nm}\cos\frac{n}{c}\int_0^{\varphi}\sqrt{[h(\psi)]}\,\mathrm{d}\psi + b_{nm}\sin\frac{n}{c}\int_0^{\varphi}\sqrt{[h(\psi)]}\,\mathrm{d}\psi\right) . \tag{5}$$
$$. \, J_{n/c}\left(\frac{{}^0\varrho_m^{(n/c)}}{r_0}\,r\right)\exp\left(-\left(\frac{{}^0\varrho_m^{(n/c)}}{r_0}\right)^2 t\right)$$

---

[13]) Die Symbole haben denselben Sinn wie im Kap. A, § 2.

Für $t = 0$ haben wir

(6)

$$\psi_0(r, \varphi) = \sum_{m=1}^{\infty} a_{0m} J_0\left(\frac{{}^0\varrho_m^{(0)}}{r_0} r\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} J_{n/c}\left(\frac{{}^0\varrho_m^{(n/c)}}{r_0} r\right)\right) \cos \frac{n}{c} \int_0^{\varphi} \sqrt{[h(\psi)]}\, d\psi +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} b_{nm} J_{n/c}\left(\frac{{}^0\varrho_m^{(n/c)}}{r_0} r\right)\right) \sin \frac{n}{c} \int_0^{\varphi} \sqrt{[h(\psi)]}\, d\psi$$

Mit Hilfe der isothermischen Parameter u, v, die die Transformation (10) im Kap. A, § 2 angibt, überführen wir die Reihe (6) zu der Form

$$\psi_0(u, v) = \sum_{m=1}^{\infty} a_{0m} J_0({}^0\varrho_m^{(0)} e^u) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} J_{n/c}({}^0\varrho_m^{(n/c)} e^u)\right) \cos \frac{n}{c} v + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} b_{nm} J_{n/c}({}^0\varrho_m^{(n/c)} e^u)\right) \sin \frac{n}{c} v$$

woher wir wie im Kap. A die Formeln für die Koeffizienten a_{nm}, b_{nm} bekommen. Unter bestimmten weiteren Voraussetzungen kann man so wie auch in der Ebene beweisen, dass die Reihe (5) die Lösung des gegebenen Problemes ist.

Anschrift des Verfassers: Praha 1, Malostranské nám. 25 (Matematicko-fyzikální fakulta KU).

Výtah

DIRICHLETŮV PROBLÉM PRO ROVNICI VLNOVOU A VEDENÍ TEPLA NA GEODETICKÉM KRUHU PLOCHY

JIŘÍ ŠTĚPÁNEK, Praha

V první části článku je řešen Dirichletův problém pro vlnovou rovnici na geodetickém kruhu plochy s metrickým tensorem 1, 0, $r^2 h(\varphi)$. Řešení je nalezeno (podobně jako v rovině) ve tvaru řady

$$\omega(t, r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\left(a_{nm} \cos \frac{{}^0\varrho_m^{(n/c)}}{r_0} t + b_{nm} \sin \frac{{}^0\varrho_m^{(n/c)}}{r_0} t\right) \cos \frac{n}{c} \int_0^{\varphi} \sqrt{[h(\psi)}\, d\psi +\right.$$

$$\left. + \left(c_{nm} \cos \frac{{}^0\varrho_m^{(n/c)}}{r_0} t + d_{nm} \sin \frac{{}^0\varrho_m^{(n/c)}}{r_0} t\right) \sin \frac{n}{c} \int_0^{\varphi} \sqrt{[h(\psi)]}\, d\psi\right] . J_{n/c}\left(\frac{{}^0\varrho_m^{(n/c)}}{r_0} r\right)$$

kde $J_{n/c}$ je Besselova funkce prvního rodu a n/c-tého řádu ($c = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} \sqrt{[h(\varphi)]}\, d\varphi$) a ${}^0\varrho_m^{(n/c)}$ jsou kořeny rovnice $J_{n/c}({}^0\varrho) = 0$. Koeficienty jsou nalezeny pomocí isotermických parametrů v explicitním integrálním tvaru.

Ve druhé části článku je podobně řešen tentýž problém pro rovnici vedení tepla na ploše.

Резюме

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВОЛНОВОГО И РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТЕПЛА НА ГЕОДЕЗИЧЕСКОМ КРУГЕ ПОВЕРХНОСТИ

ЙИРЖИ ШТЕПАНЕК (Jiří Štěpánek), Прага

В первой части стаьи решается задача Дирихле для волнового уравнения на геодезическом круге поверхности с метрическим тензором 1, 0, $r^2\,h(\varphi)$. Решение представлено (подобно тому, как в плоскости) в виде ряда

$$\omega(t, r, \omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\left(a_{nm} \cos \frac{{}^0\varrho_m^{(n/c)}}{r_0} t + b_{nm} \sin \frac{{}^0\varrho_m^{(n/c)}}{r_0} t \right) \cos \frac{n}{c} \int_0^{\varphi} \sqrt{[h(\psi)]}\, \mathrm{d}\psi + \right.$$

$$\left. + \left(c_{nm} \cos \frac{{}^0\varrho_m^{(n/c)}}{r_0} t + d_{nm} \sin \frac{{}^0\varrho_m^{(n/c)}}{r_0} t \right) \sin \frac{n}{c} \int_0^{\varphi} \sqrt{[h(\psi)]}\, \mathrm{d}\psi \right] . J_{n/c}\left(\frac{{}^0\varrho_m^{(n/c)}}{r_0} r \right)$$

где $J_{n/c}$ — функция Бесселя первого рода и n/c-ого порядка $(c = (2\pi)^{-1} . \int_0^{2\pi} \sqrt{[h(\varphi)]}\, \mathrm{d}\varphi)$ и ${}^0\varrho_m^{(n/c)}$ суть корни уравнения $J_{n/c}({}^0\varrho) = 0$. Коэффициенты найдены при помощи изотермических параметров в явном интегральном виде.

Во второй части статьи исследуется аналогичным образом та же проблема для уравнения распространения тепла на поверхности.