Karel Šindelář

Reálné cyklické korelace v S_r

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 95 (1970), No. 1, 86--92

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117676`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 95 (1970), Praha

REÁLNÉ CYKLICKÉ KORELACE V S_r

KAREL ŠINDELÁŘ, Žilina

(Došlo dne 10. září 1969)

Věnováno památce akademika BOHUMILA BYDŽOVSKÉHO

V článku jsou rozšířeny výsledky práce [3] v tom smyslu, že jsou nalezeny všechny typy reálných cyklických korelací v r-rozměrném projektivním prostoru S_r a jsou vyjádřeny soustavami rovnic.

Tak jako ve [2] a ve [3] se budeme v celém tomto článku zabývat jen reálnými korelacemi a kolineacemi v r-rozměrném projektivním prostoru S_r nad tělesem reálných čísel. Přitom však – tak jako tam – nebudeme ze svých úvah vylučovat korelace s přidruženými kolineacemi, jejichž samodružné prvky leží v S_r nad tělesem čísel komplexních.

Cyklickou korelaci n-tého stupně v r-rozměrném projektivním prostoru S_r budeme definovat tak, že se přidržíme definice 1 v práci [3]. Potom zůstávají v platnosti i oba důsledky této definice a následující věta 1. Pro $r = 1$ platí pak i věta 2 a věta 3. K větě 4, která je ve [3] vyslovena přímo pro S_r dodejme, že případ II nemůže nikdy vést k novému výsledku, což se již v práci [3] objevilo, ale jen když bylo $r = 2$ nebo $r = 3$, to je v projektivní rovině a v projektivním prostoru trojrozměrném. Dokažme tedy, že tomu tak je i v S_r, kde r je libovolné přirozené číslo. Přitom se omezíme na $r > 3$.

D ů k a z. Nechť reálná samodružná přímka l přidružené kolineace $H = K^2$ a $(r-2)$-rozměrný lineární prostor $\mathbf{L}$, který jí korelací K involutorně odpovídá, mají společný právě jeden bod S, ve kterém se protínají. Podle [3] věty 4 vytváří přidružená kolineace $H = K^2$ na přímce l reálnou cyklickou projektivnost P, která nemůže být eliptická, tedy může být jen buď identická nebo involutorní hyperbolická, takže vedle reálného samodružného bodu S obsahuje vždy ještě aspoň jeden další reálný samodružný bod T.

Bodu T odpovídá korelací K involutorně nějaká nadrovina τ procházející bodem S, nikoli však bodem T. Přitom τ je reálný lineární prostor $(r-1)$-rozměrný obsahující $\mathbf{L}$ a oba tyto prostory jsou samodružné prostory přidružené kolineace $H = K^2$ (tak jako bod T a přímka l). V nich tedy kolineace H vytváří reálné cyklické kolineace nejvýše polovičního stupně se samodružným bodem S. Ukážeme, že kromě bodu S leží v nadrovině τ ještě aspoň jeden další (od S různý) reálný samodružný bod kolineace H, který označíme R.

Je-li $r > 3$, je $r - 1 > 2$ a $r - 2 > 1$, takže kolineace vytvořená přidruženou kolineací H jak v τ tak v $\boldsymbol{L}$ má kromě S ještě další samodružné body. Je-li r liché, je $r - 2$ rovněž liché, takže počet samodružných bodů v $\boldsymbol{L}$ je sudý, pokud je konečný. Ale jeden z nich S je reálný; je tedy v případě konečného počtu samodružných bodů v $\boldsymbol{L}$ reálný ještě aspoň jeden další samodružný bod V různý od S. Je-li r sudé, je $r - 1$ liché a počet obdobných samodružných bodů v nadrovině τ je sudý, pokud je konečný. Ale jeden z nich S je reálný; je tedy v případě konečného počtu samodružných bodů v τ reálný ještě aspoň jeden další samodružný bod W různý od S. A je-li uvedených samodružných bodů v $\boldsymbol{L}$ nebo v τ nekonečně mnoho, lze mezi nimi tím spíše nalézt další reálný samodružný bod různý od S, neboť podle [2] není pak možné, aby reálná cyklická kolineace jak v τ tak v $\boldsymbol{L}$ měla zároveň právě jen jeden reálný samodružný bod. V každém případě leží tedy v nadrovině τ (nebo dokonce už v prostoru $\boldsymbol{L}$, který nadrovina τ obsahuje) ještě aspoň jeden další reálný samodružný bod přidružené kolineace $H = K^2$, který označíme R.

Reálná přímka n spojující bod S s bodem R je tedy samodružnou přímkou přidružené kolineace $H = K^2$ a jí tedy korelací K odpovídá involutorně reálný $(r - 2)$-rozměrný lineární prostor $\boldsymbol{N}$. Je to společný prostor (průsek) nadroviny σ odpovídající korelací K involutorně bodu S a nadroviny ϱ odpovídající korelací K involutorně bodu R. A mohou nastat dvě různé alternativy:

1. Buď bod R nadroviny τ leží mimo nadrovinu σ odpovídající korelací K involutorně bodu S; ale pak leží bod R i mimo prostor $\boldsymbol{L}$, který je částí nadroviny σ. A protože i nadrovina ϱ odpovídá korelací K involutorně bodu R, leží i bod S mimo nadrovinu ϱ. Přímka n je tedy proťata nadrovinou σ (s níž není incidentní) v bodě S a nadrovinou ϱ (s níž rovněž není incidentní, neboť ϱ neprochází bodem S) mimo bod S. Prostor $\boldsymbol{N}$, v němž se obě nadroviny ϱ a σ protínají, nemá tedy s přímkou n žádný společný bod; je tedy s přímkou n, s níž si korelací K involutorně odpovídá, mimoběžný.

2. Nebo bod R nadroviny τ leží i v nadrovině σ, odpovídající korelací K involutorně bodu S, tedy i v prostoru $\boldsymbol{L}$, který je průsekem nadrovin σ a τ. Potom i bod S leží v nadrovině ϱ odpovídající korelací K involutorně bodu R. A podle [2] má reálná přidružená kolineace $H = K^2$ vedle samodružné nadroviny σ ještě aspoň jeden reálný samodružný bod A ležící mimo nadrovinu σ. Čtveřicí bodů A, S, R, T, z nichž žádné tři neleží v přímce, prochází jediný trojrozměrný projektivní prostor Π, samodružný prostor přidružené kolineace $H = K^2$. V něm tedy tato kolineace vytváří rovněž reálnou cyklickou kolineaci H'. A protože prostor Π neleží v žádné nadrovině odpovídající korelací K kterémukoli jeho bodu (stačí ukázat, že to platí o bodech A, R, S, T), vytváří v něm i korelace K reálnou cyklickou korelaci K', která je regulární. Touto korelací odpovídá přímce n jako řadě bodové svazek rovin s osou v přímce l. Protože pak bodu S odpovídá korelací K' rovina σ' obsahující obě přímky l i n,

tedy procházející bodem R, nemůže regulární korelací K' odpovídat i bodu R tatáž rovina σ', nýbrž nějaká jiná rovina ϱ', která prochází přímkou l, ale bod R již neobsahuje. A protože rovina ϱ' je průsekem nadroviny ϱ, odpovídající původní korelací K bodu R, s prostorem Π, neprochází ani nadrovina ϱ bodem R, takže přímku n protíná jen v bodě S. Přímce n odpovídá pak korelací K involutorně $(r - 2)$-rozměrný lineární prostor $\mathbf{N}$, ve kterém se protínají nadroviny σ a ϱ, z nichž ϱ neprochází bodem R. Bod R přímky n není tedy bodem prostoru $\mathbf{N}$, takže přímka n není s prostorem $\mathbf{N}$ incidentní.

Reálná přímka m spojující bod R s bodem T je samodružnou přímkou kolineace $H = K^2$ a tato přímka m je potom tedy proťata nadrovinou ϱ v jediném bodě T a nadrovinou τ v jediném bodě R. Přímce m odpovídá tedy korelací K involutorně prostor $\mathbf{M}$, ve kterém se protínají nadroviny ϱ a τ. Ale tento prostor nemá žádný společný bod s přímkou m, neboť takový bod by pak musel být společným bodem přímky m, nadroviny ϱ i nadroviny τ.

Tímto důkazem jsme chtěli ukázat, že případ II nemůže nikdy vést k novému výsledku ani v S_r. Ale sestrojením přímky n a jí korelací K involutorně odpovídajícího mimoběžného $(r - 2)$-rozměrného lineárního prostoru $\mathbf{N}$, nastává-li 1. alternativa, nebo obdobné přímky m a s ní mimoběžného prostoru $\mathbf{M}$, nastává-li 2. alternativa, jsme dokázali ještě více, což budeme později potřebovat. Označíme-li vždy písmenem m sestrojenou přímku, která je mimoběžná s $(r - 2)$-rozměrným lineárním prostorem $\mathbf{M}$, jenž jí korelací K involutorně odpovídá, dostaneme důležitý výsledek, který vyslovíme touto pomocnou větou:

Lemma. *Nechť reálná cyklická korelace K n-tého stupně v S_r k přímce l, reálné samodružné přímce přidružené kolineace $H = K^2$, jako řadě bodové přiřazuje svazek nadrovin, jehož „osa" $\mathbf{L}$, což je lineární projektivní prostor $(r - 2)$-rozměrný, má s přímkou l právě jeden společný bod (tj. nastává případ II). Potom existuje v S_r reálná přímka m, samodružná vzhledem k přidružené kolineaci $H = K^2$, k níž jako řadě bodové přiřazuje korelace K svazek nadrovin, jehož „osa" $\mathbf{M}$, což je lineární projektivní prostor $(r - 2)$-rozměrný, nemá s přímkou m žádný společný bod, je s přímkou m mimoběžný (tj. nastává případ I).*

Uvedená pomocná věta nám dává už možnost dokázat úplný výsledek, ke kterému jsme chtěli dojít.

Věta. *Je-li K cyklická korelace v r-rozměrném projektivním prostoru nad tělesem reálných čísel S_r, lze soustavu souřadnic v S_r zvolit tak, že soustava rovnic korelace K podle* [1]

$$
\begin{aligned}
x_0 &= c_{00}\xi'_0 + c_{01}\xi'_1 + \ldots + c_{0r}\xi'_r, \\
x_1 &= c_{10}\xi'_0 + c_{11}\xi'_1 + \ldots + c_{1r}\xi'_r, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_r &= c_{r0}\xi'_0 + c_{r1}\xi'_1 + \ldots + c_{rr}\xi'_r,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

je určena maticí koeficientů na pravých stranách $\|c_{ik}\|$, *jejíž prvky jsou samé nuly kromě prvků nebo dvojřadých nebo čtyřřadých bloků její hlavní diagonály, které mají některé z tvarů*:

a) *prvky hlavní diagonály jsou čísla buď* 1 *nebo* -1;

b) *dvojřadé bloky ležící v hlavní diagonále mají některý z tvarů buď*

$$(2) \qquad \alpha) \quad \begin{matrix} 0, & -1, \\ 1, & 0, \end{matrix} \quad \textit{po případě} \quad \begin{matrix} 0, & 1, \\ -1, & 0, \end{matrix}$$

nebo

$$(3) \qquad \beta) \quad \begin{matrix} 0, & 1, \\ 1, & 0, \end{matrix} \quad \textit{po případě} \quad \begin{matrix} 0, & -1, \\ -1, & 0, \end{matrix}$$

nebo

$$(4) \qquad \gamma) \quad \begin{matrix} \sin\alpha, & -\cos\alpha, \\ \cos\alpha, & \sin\alpha, \end{matrix}$$

přičemž $\alpha = p\pi/2n$ *a čísla* p *a* $2n$ *jsou nesoudělná čísla* (*a* p *je přitom možno zvolit tak, že je* $0 < p < 4n$),

c) *čtyřřadé bloky ležící v hlavní diagonále mají tvar*

$$(5) \qquad \begin{matrix} 0, & 0, & a\,.\sin\varphi, & -a\,.\cos\varphi, \\ 0, & 0, & a\,.\cos\varphi, & a\,.\sin\varphi, \\ b\,.\sin\psi, & -b\,.\cos\psi, & 0, & 0, \\ b\,.\cos\psi, & b\,.\sin\psi, & 0, & 0, \end{matrix}$$

ve kterých je $|a| = |b| = 1$ *a součet úhlů* $\varphi + \psi$ *je racionální násobek čísla* π.

Důkaz. Zvolme soustavu souřadnic tak, aby určitá reálná samodružná přímka přidružené kolineace $H = K^2$ ležela v ose soustavy souřadnic o_{01} a jí korelací K involutorně odpovídající mimoběžná „osa“ svazku nadrovin procházela vrcholy souřadnicové soustavy $O_2, O_3, \ldots, O_r$. Vytváří-li pak korelace K na ose o_{01} projektivnost identickou, lze její první dvě rovnice zapsat ve tvaru

$$(6) \qquad \begin{matrix} x_0 = -\xi_1', \\ x_1 = \xi_0', \end{matrix} \quad \text{po případě} \quad \begin{matrix} x_0 = \xi_1', \\ x_1 = -\xi_0'. \end{matrix}$$

V případě involutorní projektivnosti hyperbolické na ose o_{01} lze vhodným umístěním vrcholů O_0 a O_1 dát prvním dvěma rovnicím korelace tvar

$$(7) \qquad x_0 = \xi_1', \quad \text{po případě} \quad x_0 = -\xi_1',$$
$$x_1 = \xi_0' \qquad\qquad x_1 = -\xi_0'.$$

A konečně v případě cyklické projektivnosti n-tého stupně eliptické je možno vrcholy O_0 a O_1 umístit tak, aby tyto první dvě rovnice korelace K měly tvar

$$(8) \qquad x_0 = \xi_0' \,.\, \sin\alpha - \xi_1' \,.\, \cos\alpha\,,$$
$$x_1 = \xi_0' \,.\, \cos\alpha + \xi_1' \,.\, \sin\alpha\,,$$

kde $\alpha = p\pi/2n$ a čísla p a $2n$ jsou nesoudělná (a číslo p je přitom možno zvolit tak, že je $0 < p < 4n$).

Ve společném $(r - 2)$-rozměrném prostoru všech nadrovin odpovídajících jednotlivým bodům osy o_{01} (který je samodružným prostorem přidružené kolineace $H = K^2$) vytváří původní korelace K opět reálnou cyklickou korelaci K'. Z reálných samodružných přímek její přidružené kolineace $H' = K'^2$ vybreme opět takovou přímku l', jež je mimoběžná s „osou" svazku, který jí v tomto prostoru odpovídá, a zvolíme ji za další osu o_{23} soustavy souřadnic. Další dvě rovnice korelace K (tj. její třetí a čtvrtá rovnice) budou mít pak (až na indexy) analogický tvar rovnicím buď (6) nebo (7) nebo (8), přičemž v posledních bude číslo n opět udávat stupeň eliptické cyklické projektivnosti, kterou korelace K vytváří na své další samodružné přímce ose o_{23} soustavy souřadnic.

Tento postup lze opakovat tak dlouho, dokud nebudou vyčerpány všechny reálné samodružné přímky l přidružené kolineace $H = K^2$, k nimž danou korelací K je involutorně přiřazený prostor $\mathbf{L}$ s příslušnou přímkou l mimoběžný. Protože r je přirozené, tedy konečné číslo, je i těchto přímek zvolených za osy soustavy souřadnic jen konečný počet k, neboť platí $0 \leqq k \leqq \frac{1}{2}(r + 1)$. A protože nelze vyloučit ani možnost, že je $k = 0$, nemusí soustava rovnic korelace žádnou z uvedených dvojic rovnic vůbec obsahovat.

Ve společném $(r - 2k)$-rozměrném projektivním prostoru S_{r-2k} všech nadrovin odpovídajících korelací K jednotlivým bodům os $o_{01}, o_{23}, \ldots, o_{2k-2,2k-1}$ soustavy souřadnic neexistuje již samodružná přímka l přidružené kolineace $H = K^2$, které by korelací K odpovídal involutorně prostor $\mathbf{L}$ s ní mimoběžný. Avšak v tomto prostoru S_{r-2k} neexistuje ani taková samodružná přímka přidružené kolineace, které by korelací K odpovídal prostor mající s ní jediný společný bod, neboť podle pomocné věty by v něm pak existovala i samodružná přímka s odpovídajícím prostorem mimoběžným, což jsme vyloučili. Protože však podle [2] existuje samodružná reálná přímka přidružené kolineace i v prostoru S_{r-2k}, pokud platí $r - 2k > 2$, přiřazuje pak korelace K takové přímce svazek nadrovin s osou incidentní právě s touto přímkou. Vyberme dále za osy souřadnic v S_{r-2k} dvě takové samodružné přímky l_1 a l_2, že korelace K přiřazuje ke každé z nich svazek nadrovin s „osou", která je mimoběžná se zbývající z obou těchto přímek. Potom další čtyři rovnice uvedené korelace budou

$$\begin{aligned}
(9)\quad x_{2k} &= & a \,.\, \xi'_{2k+2} \sin \varphi - a \,.\, \xi'_{2k+3} \cos \varphi\,,\\
x_{2k+1} &= & a \,.\, \xi'_{2k+2} \cos \varphi + a \,.\, \xi'_{2k+3} \sin \varphi\,,\\
x_{2k+2} &= b \,.\, \xi'_{2k} \sin \psi - b \,.\, \xi'_{2k+1} \cos \psi\,, &\\
x_{2k+3} &= b \,.\, \xi'_{2k} \cos \psi + b \,.\, \xi'_{2k+1} \sin \psi\,, &
\end{aligned}$$

kde $|a| = |b| = 1$ a součet $\varphi + \psi$ je rovný nějakému racionálnímu násobku čísla π.

Obdobný tvar až na indexy a úhly φ a ψ a čísla a, b lze dát i dalším čtyřem rovnicím korelace a tento postup opakovat tak dlouho, dokud všechny rovnice korelace nebudou buď vyčerpány, což nastane v případě lichého r (tedy sudého počtu homogenních souřadnic $r + 1$), kdežto v případě sudého r (tedy lichého počtu homogenních souřadnic $r + 1$) zbude ještě poslední rovnice tvaru

$$(10)\qquad x_r = \pm \xi'_r\,.$$

Tím je důkaz ukončen.

Poznámka 1. Dvojřadý blok α) je zřejmé zvláštním případem dvojřadého bloku γ), ve kterém je $p = 0$ nebo $p = 2n$ nebo $p = 4n$. Naproti tomu se dvojřadý blok γ) rozpadá na dva jednořadové, když v něm je $p = n$ nebo $p = 3n$.

Poznámka 2. Stupeň cyklické korelace K je rovný čtyřnásobku (nebo ve zvláštních případech i dvojnásobku) nejmenšího společného násobku stupňů všech cyklických projektivností, které její přidružená kolineace vytváří na jednotlivých samodružných přímkách, osách o_{01}, o_{23}, ... soustavy souřadnic.

Poznámka 3. Nejnižší možný stupeň cyklické korelace je, jak známo, 2. A tento případ nastává právě tehdy, když matice koeficientů pravých stran rovnic korelace je buď souměrná nebo polosouměrná.

Literatura

[1] *B. Bydžovský:* Úvod do algebraické geometrie. Praha 1948.

[2] *K. Šindelář:* The Real Cyclic Collineations. Sborník sjezdu československých a polských matematiků v Praze 1949, 263—267.

[3] *K. Šindelář:* Reálné cyklické korelace v rovině a trojrozměrném prostoru. Časopis pro pěstování matematiky, roč. *86* (1961), Praha, 93—102.

Adresa autora: Moyzesova 20, Žilina (Vysoká škola dopravní).

Résumé

LES RÉCIPROCITÉS CYCLIQUES RÉELLES DANS S_r

KAREL ŠINDELÁŘ, Žilina

On démontre une généralisation du résultat du travail [3] aux espaces projectifs à r dimensions S_r sur le corps des nombres réels. D'après le théorème résultant, on peut toujours choisir un système de coordonnées, tel que les équations (1) d'une réciprocité cyclique réelle dans S_r aient une matrice $\|c_{ik}\|$ aux coefficients nuls à l'exception des élements de la diagonale principale qui sont 1 ou -1, des blocs de rang 2 de cette diagonale de forme (2), (3) ou (4) où $\alpha = p\pi/2n$ et les nombres p et $2n$ sont primes entre eux, et des blocs de rang 4 de cette diagonale de forme (5), dans laquelle on a $|a| = |b| = 1$ et la somme $\varphi + \psi$ est un multiple rationnel du nombre π.