Pavel Bartoš; Katarína Pehartzová-Bošanská

K riešeniu diofantickej rovnice $\frac{1}{x} + \frac{1}{/}y + \frac{1}{/}z = \frac{a}{b}$

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 96 (1971), No. 3, 294--299

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117716`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 96 (1971), Praha

K RIEŠENIU DIOFANTICKEJ ROVNICE $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{a}{b}$

PAVEL BARTOŠ, Bratislava, KATARÍNA PEHARTZOVÁ-BOŠANSKÁ, Želiezovce

(Došlo dňa 30. decembra 1969)

V tomto článku odvodíme formuly na určenie všetkých riešení rovnice

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{a}{b}\,, \quad (a,\, b \text{ prirodzené čísla}) \tag{1}$$

v prirodzených číslach x, y, z a dokážeme jednu vetu vyslovujúcu dostačujúce podmienky pre jej riešiteľnosť.

Veta 1. *Všetky riešenia rovnice*

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{b} \tag{2}$$

kde b je prirodzené číslo, v prirodzených číslach x, y, z pre ktoré platí $x \leqq y \leqq z$, dostaneme z formúl

$$x = \frac{\gamma uv}{b}\,, \quad y = \frac{\gamma bv(u+v)}{\gamma uv - b^2}\,, \quad z = \frac{\gamma bu(u+v)}{\gamma uv - b^2} \tag{3}$$

kde γ, u, v sú prirodzené čísla, $u \geqq v$, $(u,v) = 1$, o ktorých platí

$$b^2 < \gamma uv \leqq 3b^2\,, \quad (\gamma uv - b^2)^2 \leqq b^2(b^2 + \gamma v^2) \tag{4}$$

a

$$b \mid \gamma uv\,, \quad \gamma uv - b^2 \mid \gamma b(u+v)\,. \tag{5}$$

Dôkaz. Nech (x, y, z) je riešením rovnice (2) a nech $x \leqq y \leqq z$. Potom $b < x$. Položme $x = b + k$, kde k je prirodzené číslo. Z rovnice (2) máme potom po úprave

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{k}{b(b+k)}\,. \tag{6}$$

Podľa vety 1 z práce [1] vyplýva, že všetky riešenia rovnice (2) dostaneme z formúl

$$y = \frac{b(b+k)+k_1}{k}, \quad z = \frac{b(b+k)+k_2}{k} \tag{7}$$

kde k_1, k_2 sú prirodzené čísla, o ktorých platí

$$k_1 k_2 = b^2(b+k)^2, \quad k \mid b^2 + k_1, \quad b^2 + k_2 \tag{8}$$

(lebo platí $k \mid (b(b+k)+k_1), (b(b+k)+k_2)$).

Všetky riešenia rovnice (2) v prirodzených číslach x, y, z, $x \leqq y \leqq z$ dávajú teda vzorce

$$x = b + k, \quad y = b + \frac{b^2+k_1}{k}, \quad z = b + \frac{b^2+k_2}{k}, \tag{9}$$

pričom $k_1 k_2 = b^2(b+k)^2$, $k \leqq (b^2+k_1)/k$, $k_1 \leqq k_2$,

$$k \mid b^2 + k_1, \quad b^2 + k_2, \quad b < x \leqq 3b\,.^{1})$$

Podla (9) teda existujú prirodzené čísla n, m také, že

$$b^2 + k_1 = nk, \quad b^2 + k_2 = mk, \quad n \leqq m\,. \tag{10}$$

Z (10) vzhľadom na (8) máme po malej úprave

$$k_2^2 - k(m-n)\,k_2 - b^2(b+k)^2 = 0$$

odkiaľ

$$k_2 = \tfrac{1}{2}[(m-n)\,k + \sqrt{((m-n)^2\,k^2 + 4b^2(b+k)^2)}] \tag{11}$$

(odmocnina so záporným znamienkom nevedie k prirodzenému číslu k_2).

Z (11) je zrejmé, že

$$(m-n)^2\,k^2 + 4b^2(b+k)^2 = l^2\,, \quad (l \text{ prirodzené číslo})\,.$$

Ak je $m \neq n$, potom podľa známych vlastností riešení pytagorejskej diofantickej rovnice (pozri napr. [2] str. 38–41) existujú prirodzené čísla γ, u, v, $(u, v) = 1$, $u > v$, že

$$(m-n)\,k = \gamma(u^2 - v^2), \quad 2b(b+k) = \gamma\,.\,2uv\,. \tag{12}$$

---

[1]) Keby bolo $x > 3b$, bolo by $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} < \frac{1}{b}$.

Prípad $m = n$ sem zahrnieme pripustiac $u = v = 1$. Z (11) máme potom $k_2 = \frac{1}{2}[\gamma(u^2 - v^2) + \gamma(u^2 + v^2)] = \gamma u^2$ a podľa (12) $k = (\gamma uv - b^2)/b$. Z (10) vyplýva potom $k_2 - k_1 = (m - n) k$, teda $k_1 = k_2 - (m - n) k$, čo dá $k_1 = \gamma u^2 - \gamma(u^2 - v^2) = \gamma v^2$. Ak tieto hodnoty dosadíme do (9) dostaneme (3) s podmienkami (4), (5).[2])

Ešte treba dokázať, že (3) skutočne dáva riešenie rovnice (2) v prirodzených číslach $x \leqq y \leqq z$, ak sú splnené podmienky (4) a (5). Dosadiac (3) do (2) zistíme ľahko, že rovnica je identicky splnená. Podmienky (4) zaručujú, že $x \leqq y \leqq z$ a podmienky (5), že x, y, z sú čísla prirodzené.

Tým je veta dokázaná.

Veta 2. *Všetky riešenia rovnice* (1) *v prirodzených číslach* x, y, z, $(x \leqq y \leqq z)$ *dostaneme zo vzťahov*

$$(13) \qquad x = \frac{\gamma uv}{ab}, \quad y = \frac{\gamma bv(u + v)}{a(\gamma uv - b^2)}, \quad z = \frac{\gamma bu(u + v)}{a(\gamma uv - b^2)}$$

kde γ, u, v, $u \geqq v$, $(u, v) = 1$ *sú prirodzené čísla, ktoré splňujú následujúce podmienky*:

$$(14) \qquad b^2 < \gamma uv \leqq 3b^2\,, \quad (\gamma uv - b^2)^2 \leqq b^2(b^2 + \gamma v^2)$$

a

$$(15) \qquad ab \mid \gamma uv\,, \quad a(\gamma uv - b^2) \mid \gamma b(u + v)\,.$$

Dôkaz. Podľa vety 12 z článku [3] dostaneme z riešení (x', y', z') rovnice (2) všetky riešenia $(x'/a, y'/a, z'/a)$ rovnice (1) v prirodzených číslach. Na základe tejto vety vyplýva teda veta 2 ihneď z vety 1.

Príklad. Riešiť rovnicu $1/x + 1/y + 1/z = a/3$ v prirodzených číslach x, y, z pre $a = 1$ a $a = 2$.

Najprv nájdeme všetky riešenia rovnice $1/x + 1/y + 1/z = 1/3$ podľa vety 1. Keďže podľa (8) $3 \mid \gamma uv$ a podľa (7) $9 < \gamma uv \leqq 27$, prichádzajú do povahy len hodnoty

$$\gamma uv = 12, 15, 18, 21, 24, 27\,.$$

Pri riešení sa o ďalšie podmienky (7) a (8) nestaráme, ale vylúčime výsledky, v ktorých neplatí $x \leqq y \leqq z$, alebo v ktorých x, y, z nie sú prirodzené čísla. Postup výpočtu a výsledky obsahujú následujúce tabuľky.

---

[2]) Keďže $(u, v) = 1$, platí

$$\gamma uv - b^2 \mid \gamma bv(u + v),\ \gamma bu(u + v) \Leftrightarrow \gamma uv - b^2 \mid \gamma b(u + v)\,.$$

	$\gamma uv = 12$								$\gamma uv = 15$				
γ	1	1	2	2	3	4	6	12	1	1	3	5	15
u	12	4	6	3	4	3	2	1	15	5	5	3	1
v	1	3	1	2	1	1	1	1	1	3	1	1	1
x	4	4	4	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5
y	13	21	14	20	15	16	18	24	8	12	9	10	15
z	156	28	84	30	60	48	36	24	120	20	45	30	15

	$\gamma uv = 18$								$\gamma uv = 21$				
γ	1	1	2	3	3	6	9	18	1	1	3	7	21
u	18	9	9	6	3	3	2	1	21	7	7	3	1
v	1	2	1	1	2	1	1	1	1	3	1	1	1
x	6	6	6	6	6	6	6	6	7	7	7	7	7
y	$\frac{19}{3}$	$\frac{22}{3}$	$\frac{20}{3}$	7	10	8	9	12	$\frac{11}{2}$	$\frac{15}{2}$	6	7	$\frac{21}{2}$
z	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	42	15	24	18	12	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	21	$\emptyset$

	$\gamma uv = 24$											$\gamma uv = 27$			
γ	1	1	2	2	3	4	4	6	8	12	24	1	3	9	27
u	24	8	12	4	8	6	3	4	3	2	1	27	9	3	1
v	1	3	1	3	1	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1
x	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	9	9	9	9
y	5	$\frac{33}{5}$	$\frac{26}{5}$	$\frac{42}{5}$	$\frac{27}{5}$	$\frac{28}{5}$	8	6	$\frac{32}{5}$	$\frac{36}{5}$	$\frac{48}{5}$	$\frac{14}{3}$	5	6	9
z	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	12	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	9

Z nájdených riešení rovnice $1/x + 1/y + 1/z = 1/3$ ľahko určíme všetky riešenia rovnice $1/x + 1/y + 1/z = 2/3$ vyhľadajúc medzi nimi riešenia so spoločným deliteľom $a = 2$, ktorým ich delíme. Tak máme

x	2	2	2	2	2	3	3	4
y	7	10	8	9	12	4	6	4
z	42	15	24	18	12	12	6	6

Ak máme riešiť len rovnicu $1/x + 1/y + 1/z = 2/3$, je veľmi výhodné postupovať pomocou vety 2. V tomto prípade totiž $6 | \gamma uv$, a teda sú možné len prípady $\gamma uv = 12, 18, 24$.

O diofantickú rovnicu (1) je v literatúre záujem (pozri napr. [2], [4], [5], [6]). V [4] a [6] sa uvádza viac problémov o nej, dosiaľ úplne neriešených. Ich obťažnosť sa nám v svetle vety 2 z tohto článku javí odôvodnenou. Ide totiž pri riešení týchto rovníc o rozklad na činitele a konštatovanie deliteľnosti, avšak všetky možné prípady týchto okolností nemožno pri numericky neudaných číslach súčasne brať do počtu.

Nakoniec dokážeme vetu, ktorou sa v istom zmysle rozširuje veta R. OBLÁTHA (pozri [4] 1.3 str. 16), ktorá hovorí, že číslo $4/b$ je číslom A_3 (tj. rovnica (1) pre $a = 4$ má riešenie), ak $b + 1$ má deliteľa tvaru $4t + 3$.

Veta 3. *Číslo a/b, $(a, b) = 1$ je číslom A_3, ak buď b, buď $b + 1$ má deliteľa tvaru $at - r$, $t \geqq 1$, kde $b \equiv r \pmod a$, $0 < r < a$.*

Dôkaz. K riešeniu rovnice podľa vety 2 položme $yuv = b(b + at - r)$ pričom buď $at - r \mid b$, buď $at - r \mid b + 1$. Ľahko zistíme, že $b^2 < yuv \leqq 3b^2$. Voľme

$$y = b + at - r\,, \quad u = b\,, \quad v = 1\,.$$

Splnenie ostatných podmienok (14) a (15) budeme konštatovať dodatočne z okolnosti, že nájdené rišenia tvoria prirodzené čísla $x \leqq y \leqq z$. Podľa (13) po malej úprave dostaneme

$$x = \frac{b + at - r}{a}\,, \quad y = \frac{(b + at - r)(b + 1)}{a(at - r)}\,, \quad z = \frac{(b + at - r)b(b + 1)}{a(at - r)}\,.$$

Pretože buď 1) b, a teda aj $b + at - r$, buď 2) $b + 1$ má podla predpokladu deliteľe $at - r$ a pretože $(at - r, a) = 1$, platí v prípade 1) $a(at - r) \mid b + at - r$ a v prípade 2) $a \mid b + at - r$, $at - r \mid b + 1$, a teda x, y, z, sú prirodzené a tvoria riešenia rovnice (1), o ktorom sa ľahko dokáže, že $x \leqq y \leqq z$.

Tým je veta dokázaná.

Poznámka. Zdá sa, že by bolo hodno študovať vlastnosti čísel b, ktoré nespĺňajú predpoklady vety 3. Pre $a = 4$, $r = 1$ sa zdá, že sú to práve párne mocniny tých nepárnych čísel, ktoré nemajú deliteľa tvaru $4t - 1$.

Literatúra

[1] *Bartoš P.:* Poznámka k počtu riešení rovnice $1/x + 1/y = b/a$ v prirodzených číslach. Časopis pro pěstování matematiky *95* (1970), 411—415.

[2] *Sierpiński, W.:* Elementary theory of numbers, Warszawa 1964.

[3] *Bartoš, P.:* O prolongabilných riešeniach optickej rovnice. Časopis pro pěstování matematiky, *95* (1970), 278—289.

[4] *Sierpiński, W.:* O rozkładach liczb wymiernych na ułamky proste. Warszawa 1957.

[5] *Palama, G.:* Si una congettura di Sierpiński relativa alla possibilita in numeri naturali della $5/n = 1/x + 1/y + 1/z$. Boll. Un. Mat. Ital. (3), *13*, 1958, str. 65—72.

[6] *Erdös, P.:* Az $1/x_1 + 1/x_2 + \ldots + 1/x_n = a/b$ egyenlet egészszámú megoldásairól. Mat. Lapok I, (1949), str. 192—210, Budapest.

Adresa autora: Pavel Bartoš, Bratislava, Sibírska 9, *Katarína Pehartzová-Bošanská,* Želiezovce, o. Levice, Fučíkova 27.

Zusammenfassung

ZUR LÖSUNG DER DIOPHANTISCHEN GLEICHUNG $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{a}{b}$

PAVOL BARTOŠ, Bratislava, KATARÍNA PEHARTZOVÁ-BOŠANSKÁ, Želiezovce

In der Arbeit werden Beziehungen (13) für die Lösung der Gleichung $1/x + 1/y + 1/z = a/b$ in natürlichen Zahlen hergeleitet und es sind (im Satz 3) hinreichende Bedingungen für deren Lösbarkeit angegeben.