Časopis pro pěstování matematiky, roč. 96 (1971), Praha

MITTELWERTSÄTZE DER GITTERPUNKTLEHRE II

Břetislav Novák, Praha

(Eingelangt am 26. November 1970)

Zum Andenken meines Lehrer Prof. Vojtěch Jarník *gewidmet*

1. Einleitung. Sei $r \geqq 2$ eine natürliche Zahl und sei

$$Q(u) = Q(u_j) = \sum_{j,l=1}^{r} a_{jl} u_j u_l \tag{1}$$

eine positiv definite quadratische Form mit einer symmetrischen Koeffizientenmatrix und mit der Determinante D. Es seien weiter

$$M_1 > 0, M_2 > 0, \ldots, M_r > 0\,, \quad b_1, b_2, \ldots, b_r \tag{2}$$

und

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r \tag{3}$$

reelle Zahlen. Bedeute $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$ die Folge aller Werte der Form

$$Q(m_j M_j + b_j) > 0$$

mit ganzen $m_1, m_2, \ldots, m_r$, $\lambda_0 = 0$ und für ein ganzes nichtnegatives m sei mit a_m die Summe

$$\sum \exp \left[2\pi i \sum_{j=1}^{r} \alpha_j (m_j M_j + b_j)\right]$$

bezeichnet, wobei über alle Systeme $m_1, m_2, \ldots, m_r$ ganzer Zahlen, für welche $Q(m_j M_j + b_j) = \lambda_m$ ist, summiert wird.

Für $x \geqq 0$, $\varrho \geqq 0$ legen wir

$$A_\varrho(x) = \frac{1}{\Gamma(\varrho + 1)} \sum_{\lambda_m \leqq x} a_m (x - \lambda_m)^\varrho\,, \quad V_\varrho(x) = \frac{M \exp \left[2\pi i \sum_{j=1}^{r} \alpha_j b_j\right] \delta}{\Gamma(\frac{1}{2} r + \varrho + 1)} x^{r/2 + \varrho}\,,$$

wobei $M = \pi^{r/2}/\sqrt{(D)}\, M_1 M_2 \dots M_r$, $\delta = 1$, wenn alle Zahlen $\alpha_1 M_1, \alpha_2 M_2, \dots, \alpha_r M_r$ ganz sind, sonst $\delta = 0$. Schliesslich sei

$$P_\varrho(x) = A_\varrho(x) - V_\varrho(x) \tag{4}$$

$$M_\varrho(x) = \int_0^x |P_\varrho(t)|^2 \, dt\,. \tag{5}$$

Für $\varrho = 0$ ist die Funktion (4) der bekannte „Gitterrest", welcher in einer Reihe von Arbeiten untersucht worden ist (siehe z. B. [1]–[7] und die in diesen Arbeiten angeführten Hinweise). Die Funktion (4) (für ganze $\varrho \geqq 0$) führte schon Landau ein (vgl. [3], S. 11 und die weiteren) und benützte diese bei seiner Methode. Von den O- und Ω-Abschätzungen der Funktion (4) für ein gewisses (genügend grosses) ϱ können nämlich meistens O- und Ω-Abschätzungen der Funktion $P(x) = P_0(x)$ hergeleitet werden.

Im Jahre 1968 kehrte zu diesen Fragen Jarník in seiner Arbeit [2] zurück und stellte die Frage der Auffindung der besten möglichen O- und Ω-Abschätzungen der Funktion (4) in Abhängigkeit von dem Wert ϱ. Wir führen in gekürzter Form sein bemerkenswertes Ergebnis an:

Die Form (1) besitze ganzzahlige Koeffizienten, sei $\alpha_j = b_j = 0$, $M_j = 1$, $j = 1, 2, \dots, r$. Dann gilt

a) *Wenn $0 \leqq \varrho < r/2 - 2$ ist, dann ist*

$$P_\varrho(x) = O(x^{r/2-1})$$

wenn $\varrho > r/2 - \frac{1}{2}$ ist, dann ist

$$P_\varrho(x) = O(x^{(r-1)/4+\varrho/2})\,.$$

b) *Für $\varrho \geqq 0$ gelten zugleich die folgenden Abschätzungen*

$$P_\varrho(x) = \Omega(x^{r/2-1})\,, \quad P_\varrho(x) = \Omega(x^{(r-1)/4+\varrho/2})\,.$$

Es ist leicht zu sehen, dass für $0 \leqq \varrho < \frac{1}{2}r - 2$ oder $\varrho > \frac{1}{2}(r-1)$ so definitive Ergebnisse erreicht worden sind. Für $\varrho \geqq 0$, $\frac{1}{2}r - 2 \leqq \varrho \leqq \frac{1}{2}(r-1)$ gibt Jarník in der Arbeit [2] auch einige O-Abschätzungen, welche aber nicht definitive Ergebnisse liefern. Für $\varrho = 0$ entspricht dieser Fall dem klassischen Problemkreis $r = 2, 3, 4$. Für allgemeines ϱ bekommt man also eine gewisse „Verschiebung" in das Intervall $2\varrho + 4 \geqq r \geqq 2\varrho + 1$. Die erste Ω-Abschätzung von Jarník ist besser als die zweite für $0 \leqq \varrho < \frac{1}{2}(r-3)$, für $\varrho = \frac{1}{2}(r-3) \geqq 0$ sind beide Abschätzungen gleich, für $\varrho < \frac{1}{2}(r-3)$, $\varrho \geqq 0$ ist wieder die zweite Ω-Abschätzung besser. Es ist also natürlich zu vermuten, dass für $\varrho = \frac{1}{2}(r-3) \geqq 0$ das eine definitive Ergebnis in das andere übergeht.

Die direkte Untersuchung der Funktion (4) ist erheblich schwierig. Deswegen wurde auch für $\varrho = 0$ der Mittelwert der Funktion $P(x)$ untersucht d. h. die Funktion (5) (für $\varrho = 0$), wie man es in den Arbeiten [1], [3] und [7] finden kann. Das Studium der Funktion (5) ist nämlich verhältnismässig einfacher (Nichtnegativität und Monotonie) und man kann zusätzlich von manchen „genügend guten" Ergebnissen für die Funktion (5) auch O- und Ω-Abschätzungen der Funktion (4) herleiten.

In der Arbeit [6] wurde die Funktion (5) unter der Voraussetzung, dass die Koeffizienten der Form (1) und die Zahlen (2) ganz sind, untersucht. Nach einem der Hauptergebnisse dieser Arbeit (Satz 3 von S. 74) gilt unter den angeführten Voraussetzungen (natürlich setzt man voraus, dass die Funktion (5) nicht identisch Null gleich ist):

$$(6) \qquad K_1 x^{r/2+\varrho+1/2} < M_\varrho(x) < K_2 x^{r-1} \qquad \text{für} \quad 0 \leqq \varrho < \tfrac{1}{2}(r-3),$$

$$(7) \qquad K_1 x^{r/2+\varrho+1/2} < M_\varrho(x) < K_2 x^{r-1} \lg x \qquad \text{für} \quad \varrho = \tfrac{1}{2}(r-3) \geqq 0,$$

$$K_1 x^{r/2+\varrho+1/2} < M_\varrho(x) < K_2 x^{r/2+\varrho+1/2} \qquad \text{für} \quad \varrho > \tfrac{1}{2}(r-3), \quad \varrho \geqq 0,$$

wo $x > K_0$ und K_0, K_1, K_2 sind positive Konstante, welche nur von der Form (1), von ϱ und von den Zahlen (2) und (3) abhängen.

In derselben Arbeit ist gezeigt, dass die unteren Abschätzungen allgemein nicht verbesserbar sind. Wenn nämlich der sogenannte Singularfall vorkommt (siehe § 2 dieser Arbeit), ist für $x > K_0$, $\varrho \geqq 0$ sogar

$$K_1 x^{r/2+\varrho+1/2} < M_\varrho(x) < K_2 x^{r/2+\varrho+1/2}.$$

Das Hauptziel dieser Arbeit ist es zu zeigen, dass auch die angeführten oberen Abschätzungen allgemein nicht verbesserbar sind. Es gilt nämlich der folgende

Hauptsatz 1. *Es seien die Koeffizienten der Form* (1) *und die Zahlen* (2) *ganz und die Zahlen* (3) *seien rational. Es entstehe nicht der Singularfall. Dann gibt es positive Konstanten* K, $\alpha < r - 1$, $\beta < 1$ (*diese hängen nur von* ϱ, *der Form* (1) *und den Zahlen* (2), (3) *ab*) *so dass*

$$(8) \qquad M_\varrho(x) = K x^{r-1} + O(x^\alpha) \qquad \text{für} \quad 0 \leqq \varrho < \tfrac{1}{2}(r-3),$$

$$(9) \qquad M_\varrho(x) = K x^{r-1} \lg x + O(x^{r-1} \lg^\beta x) \qquad \text{für} \quad \varrho = \tfrac{1}{2}(r-3) \geqq 0$$

gilt.

Für $\varrho = 0$ wurde dieser Satz in der Arbeit [7] bewiesen. Dessen Beweis is also eine Verallgemeinerung des in dieser Arbeit benützen Verfahrens d. h. des von Jarník abstammenden Ausdruckes der Funktion $M_0(x)$ mittels eines zweifachen Kurvenintergrales zusammen mit dem Ausnützen der Transformationseigenschaften der zugehörigen Thetafunktion (siehe [1]).

Vom Hauptsatz 1 ergibt sich (nach dem üblichen Widerspruch) sofort der folgende

Hauptsatz 2. *Es seien die Koeffizienten der Form* (1) *und die Zahlen* (2) *ganz, die Zahlen* (3) *seien rational und es entstehe nicht der Singularfall. Dann ist*

$$P_\varrho(x) = \Omega(x^{r/2-1}) \qquad \text{für} \quad 0 \leqq \varrho < \tfrac{1}{2}(r-3),$$
$$P_\varrho(x) = \Omega[x^{r/2-1}\sqrt{(\lg x)}] \quad \text{für} \quad \varrho = \tfrac{1}{2}(r-3) \geqq 0.$$

Diese Resultate verstärken und verallgemeinern Jarníks oben angeführte Ω-Abschätzungen und ebenfalls auch die Ergebnisse des Verfassers von den Arbeiten [7] und [8]. Besonders ist der logarithmische Faktor für $\varrho = \frac{1}{2}(r-3) \geqq 0$ von Interesse. Führen wir noch an, dass die Ω-Methode von Jarník, welche in der Arbeit [2] benützt worden ist, wesentlich an der Voraussetzung $\delta = 1$ beruht und für $\delta = 0$ keine Ergebnisse liefert. Im Spezialfall $\varrho = 0$, $\alpha_j = b_j = 0$, $M_j = 1$, $j = 1, 2, \ldots, r$ wurden beide Sätze von Jarník in der Arbeit [1] bewiesen.

2. Bezeichnungen und Hilfssätze. In der ganzen Arbeit wird vorausgesetzt, dass die Koeffizienten der Form (1) und die Zahlen (2) ganz und dass die Zahlen (3) rational sind. Von unseren Untersuchungen ist der Fall, wenn $A_0(x) = 0$ für alle x ausgeschlossen (nach dem Lemma 5 von der Arbeit [6] ist dann auch die Funktion $P_\varrho(x)$ identisch Null gleich).

Mit dem Buchstaben c werden (allgemein verschiedene) positive Konstanten bezeichnet, welche nur von der Form (1), den Zahlen (2), (3) und von ϱ abhängen. Mit dem Buchstaben H bezeichnen wir den kleinsten gemeinsamen Nenner der Zahlen $\alpha_1 M_1, \alpha_2 M_2, \ldots, \alpha_r M_r$. ϱ bezeichne immer eine nichtnegative Zahl $\varrho \leqq \frac{1}{2}(r-3)$, x sei eine hinreichned grosse positive Zahl, d. h. $x > c$, m, h, p (eventuell mit einem Index usw. versehen) bedeute ganze Zahlen, n und k (wieder mit Index usw.) seien natürliche Zahlen. Falls h und k gemeinsam (in Formeln usw.) auftreten, setzen wir immer voraus, dass $(h, k) = 1$ ist (ähnlich für h', k' usw.).

Wenn $|A| \leqq cB$ ist, schreiben wir kurz $A \ll B$. Mit $A \asymp B$ wird kurz die gleichzeitige Gültigkeit der Beziehungen $A \ll B$, $B \ll A$ bezeichnet. Die Symbole O, o und Ω haben die übliche Bedeutung d. h. sie werden zum Grenzübergang $x \to +\infty$ bezogen und die, in deren Definitionen auftretenden Konstanten sind immer vom „Typ" c.

Unter einem Integral wird das (absolut konvergente) Lebesguesche Integral verstanden. Wenn a eine reelle Zahl ist, sei

$$\int_{(a)} f(s)\,\mathrm{d}s = i\int_{-\infty}^{\infty} f(a + it)\,\mathrm{d}t.$$

Wenn $x > 0$, $-\infty \leqq a \leqq b \leqq +\infty$ und I ein Intervall mit den Endpunkten a und b ist, dann sei

$$\int_I f(s)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f\left(\frac{1}{x} + it\right)\mathrm{d}t.$$

(Die beiden Schreibarten benützen wir natürlich unter der Voraussetzung, das die Integrale auf der rechten Seite existieren.)

Legen wir $M_{\varrho,1}(t) = M_\varrho(t)$ und für jedes n, $t \geqq 0$ definieren wir induktionsweise

$$M_{\varrho,n+1}(t) = \int_0^t M_{\varrho,n}(y)\, \mathrm{d}y\,.$$

Für ein komplexes s, $\operatorname{Re} s > 0$ sei

$$\Theta(s) = \Theta(s; \alpha_j) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m e^{-\lambda_m s} \tag{10}$$

und

$$F(s) = F(s; \alpha_j) = \Theta(s) - \frac{M \exp\left(2\pi i \sum_{j=1}^{k} \alpha_j b_j\right)}{s^{r/2}}\, \delta\,, \quad G(s) = \overline{F(\bar{s})} = F(s; -\alpha_j)\,. \tag{11}$$

Alle diese Funktionen sind offensichtlich in der Halbebene $\operatorname{Re} s > 0$ holomorph und in jeder Mengen der Form $\operatorname{Re} s \geqq \varepsilon > 0$ beschränkt. (Wir bemerken noch, dass in (11) und auch ferner für ein komplexes s, τ positiv, s^τ den Zweig der Funktion s^τ bedeuten wird, für welchen diese Funktion einen positiven Wert für positive s annimmt.)

Zuerst führen wir drei Hilfssätze an.

Lemma 1. *Es sei $a_2 > a_1 > 0$, $b_2 > b_1 > 0$, $\lambda \geqq 1$, $\mu \geqq 1$, $\nu \geqq 1$. Die Funktion $f(s, s')$ sei im Gebiet $a_1 \leqq \operatorname{Re} s \leqq a_2$, $b_1 \leqq \operatorname{Re} s' \leqq b_2$ holomorph und beschränkt. Dann gilt*

$$\int_{(a_1)} \left(\int_{(b_1)} \ldots \mathrm{d}s' \right) \mathrm{d}s = \int_{(a_1)} \left(\int_{(b_2)} \ldots \mathrm{d}s' \right) \mathrm{d}s = \int_{(b_2)} \left(\int_{(a_1)} \ldots \mathrm{d}s \right) \mathrm{d}s' =$$
$$= \int_{(b_2)} \left(\int_{(a_2)} \ldots \mathrm{d}s \right) \mathrm{d}s' = \int_{(a_2)} \left(\int_{(b_2)} \ldots \mathrm{d}s' \right) \mathrm{d}s = \int_{(a_2)} \left(\int_{(b_1)} \ldots \mathrm{d}s' \right) \mathrm{d}s\,,$$

wobei alle Integrale den Integrand

$$\frac{f(s, s')}{s^\lambda s'^\mu (s + s')^\nu}$$

haben und absolut konvergent sind.

Beweis. Siehe [1], Hilfssatz 1.

Lemma 2. *Es sei $a > 0$, $b > 0$. Dann gilt*

$$M_{\varrho,n}(x) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{(a)} \left(\int_{(b)} \frac{F(s)\, G(s')\, e^{x(s+s')}}{s^{\varrho+1} s'^{\varrho+1} (s + s')^n}\, \mathrm{d}s' \right) \mathrm{d}s\,. \tag{12}$$

Beweis. Siehe [6], Lemma 1.

Lemma 3. *Sei $s = 1/x + it$. Ist $t \ll x^{-1/2}$, dann ist*

$$(13) \qquad \frac{F(s)}{s^{\varrho+1}} \ll x^{r/4+\varrho/2+1/2}\,.$$

Wenn $h \neq 0$, $k \leqq \sqrt{x}$ und

$$(14) \qquad \left|t - \frac{2\pi h}{k}\right| \ll \frac{1}{k\sqrt{x}}$$

ist, dann gelten die Beziehungen

$$(15) \qquad F(s) \ll \frac{x^{r/2}}{k^{r/2}\left(1 + x\left|t - \frac{2\pi h}{k}\right|\right)^{r/2}}\,,$$

$$(16) \qquad F(s) - \frac{MS_{h,k}}{k^r\left(s - \frac{2\pi ih}{k}\right)^{r/2}} \ll x^{r/4} \ll \frac{x^{r/2}}{k^{r/2}\left(1 + x\left|t - \frac{2\pi h}{k}\right|\right)^{r/2}}\,,$$

wobei wir $S_{h,k} = 0$ legen, wenn $k \not\equiv 0 \pmod{H}$ ist und

$$S_{h,k} = S_{h,k}(\alpha_j) = \sum_{a_1,a_2,\dots,a_r=1}^{k} \exp\left(-\frac{2\pi ih}{k}\,Q(a_jM_j + b_j) + 2\pi i\sum_{j=1}^{r}\alpha_j(a_jM_j + b_j)\right),$$

wenn $k \equiv 0 \pmod{H}$. Immer ist

$$(17) \qquad S_{h,k} \ll k^{r/2}\,.$$

Beweis. Siehe z. B. [6] Lemma 3, [7] Lemma 4.

Wir bemerken, dass in der Arbeit [6] die Zahlen $S_{h,k}$ in einer etwas anderen Weise definiert worden sind. In der ganzen Arbeit werden wir voraussetzen, dass der sogenannte Singulärfall nicht entsteht, d. h. es existieren h und k derartig, dass $S_{h,k} \neq 0$ ist.

3. Beweis des Hauptsatzes 1. Der Beweis des Hauptsatzes 1 ist im Grunde dem Beweis des analogischen Satzes von der Arbeit [7] ähnlich. Wir gehen von dem Ausdruck (12) aus und beweisen, dass für ein gewisses n ($n = c$ und hinreichend gross) ür $0 \leqq \varrho < \frac{1}{2}(r-3)$ die Beziehung

$$M_{\varrho,n}(x) = Kx^{r+n-2} + O(x^{\alpha})\,, \quad K = c\,, \quad \alpha < r + n - 2$$

gilt. Nach der Benützung der Ungleichungen $(0 < \lambda < \frac{1}{2})$

$$\lambda x\, M_{\varrho,n}(x) \leqq \int_x^{x(1+\lambda)} M_{\varrho,n}(t)\,\mathrm{d}t\,, \quad \lambda x\, M_{\varrho,n}(x) \geqq \int_{x(1-\lambda)}^{x} M_{\varrho,n}(t)\,\mathrm{d}t$$

und der rekurrenten Definition der Funktion $M_{\varrho,n}(x)$ kann einfach hergeleitet werden, dass eine ähnliche Beziehung schon für alle n gilt. Ähnlicherweise kann man auch im Fall $\varrho = \frac{1}{2}(r-3) \geqq 0$ fortschreiten. Da treten nur gewisse Schwierigkeiten technischen Charakters zu, welche der logarithmische Faktor im Hauptglied verursacht.

Setzen wir also voraus, dass die Zahl n hinreichend gross ist, $n = c$. Zuerst erinnern wir noch an die Fundamentaleigenschaften der Fareybrüche, welche wir ferner gebrauchen werden. Erwägen wir die Fareybrüche, welche zu der Zahl $\sqrt{x}$ gehören, d. h. Brüche der Form h/k, wo $k \leqq \sqrt{x}$ ist. Wenn $h'/k' < h/k < h''/k''$ drei solche nacheinander folgende Brüche sind (d. h. zwischen h'/k' und h''/k'' liegt genau ein zu $\sqrt{x}$ gehörender Fareybruch – nämlich h/k), dann ist notwendig (vgl. z. B. [3], S. 249–250) $hk' - h'k = 1$, $h''k - hk'' = 1$, $k + k' > \sqrt{x}$, $k + k'' > \sqrt{x}$. Wenn man in diesem Fall

$$\mathfrak{B}_{h,k} = \left(2\pi \frac{h + h'}{k + k'},\ 2\pi \frac{h + h''}{k + k''}\right]$$

legt (wir bemerken, dass dieses Intervall eindeutig durch die Zahl $\sqrt{x}$ und das Paar h, k, $k \leqq \sqrt{x}$ bestimmt ist), dann ist ($\pi < \vartheta_1, \vartheta_2 \leqq 2\pi$)

$$\mathfrak{B}_{h,k} = \left(2\pi \frac{h}{k} - \frac{\vartheta_1}{k\sqrt{x}},\ 2\pi \frac{h}{k} + \frac{\vartheta_2}{k\sqrt{x}}\right]. \tag{18}$$

Die Intervalle $\mathfrak{B}_{h,k}$ sind offensichtlich punktfremd und bedecken die ganze reelle Achse. Wenn man

$$w = \frac{2\pi}{[\sqrt{(x)}] + 1}$$

bezeichnet, ist offenbar $w \asymp x^{-1/2}$ und $\mathfrak{B}_{0,1} = (-w, w]$. Bezeichnen wir noch der Einfachheit wegen ($k, k' \leqq \sqrt{x}$)

$$\beta = 2\pi \frac{h}{k}, \quad \beta' = 2\pi \frac{h'}{k'}, \quad \mathfrak{B} = +\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_{h,k}, \quad -\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_{-h,k},$$

$$\mathfrak{B}' = +\mathfrak{B}' = \mathfrak{B}_{h',k'}, \quad -\mathfrak{B}' = \mathfrak{B}_{-h',k'}.$$

Immer sei $s = 1/x + it$, $s' = 1/x + it'$ und bezeichne man noch

$$H(t, t'; \alpha_j) = \frac{F(s)\, G(s')\, e^{x(s+s')}}{s^{\varrho+1} s'^{\varrho+1} (s + s')^n}. \tag{19}$$

Leicht ist zu sehen, dass

$$H(-t, -t'; \alpha_j) = \overline{H(t, t'; -\alpha_j)}, \quad H(t, t'; \alpha_j) = H(t', t; -\alpha_j) \tag{20}$$

gilt. Wir führen noch einige einfache Abschätzungen an, welche wir immer benützen werden. Es gilt

$$\frac{1}{s + s'} \ll \frac{x}{1 + x|t + t'|} \tag{21}$$

und für $0 \leqq u \leqq x$ ist

$$e^{u(s+s')} \ll 1 . \tag{22}$$

Wenn $|t - 2\pi h/k| \ll 1/k\sqrt{x}$ (insbesondere also nach (18) für $t \in \mathfrak{B}_{h,k}$), $h \neq 0$ ist, dann ist

$$|s| \asymp |t| \asymp \frac{|h|}{k} . \tag{23}$$

Nach (12) (wo $a = b = 1/x$) gelegt wird) ergibt sich

$$4\pi^2 M_{\varrho,n}(x) = \sum \int_{\mathfrak{B}} \left(\int_{\mathfrak{B}'} \ldots \, dt \right) dt' , \tag{24}$$

wo über alle solche h, k, h', k' summiert wird, für welche $k \leqq \sqrt{x}$, $k' \leqq \sqrt{x}$ ist (im Sinne unserer Verabredung ist auch $(h, k) = 1$, $(h', k') = 1$). Die rechte Seite von (24) zerlegen wir nun in einige Teile. Sei

$$S_1 = \iint_{\mathfrak{A}} \ldots \, dt \, dt' , \tag{25}$$

wo $\mathfrak{A}$ das Gebiet $\min(|t|, |t'|) \leqq w$ ist. Für

$$h > 0 , \quad k \leqq \sqrt{x} \tag{26}$$

und

$$h' > 0 , \quad k' \leqq \sqrt{x} , \quad h'k \neq hk' \tag{27}$$

bezeichnen wir

$$M(h, k, h', k') = \int_{\mathfrak{B}} \int_{\mathfrak{B}'} \ldots \, dt' \, dt + \int_{\mathfrak{B}} \int_{-\mathfrak{B}'} \ldots \, dt' \, dt + \tag{28}$$

$$+ \int_{-\mathfrak{B}} \int_{\mathfrak{B}'} \ldots \, dt' \, dt + \int_{-\mathfrak{B}} \int_{-\mathfrak{B}'} \ldots \, dt' \, dt ,$$

$$N(h, k) = N(h, k; \alpha_j) = \int_{\mathfrak{B}} \int_{-\mathfrak{B}} \ldots \, dt' \, dt , \tag{29}$$

$$P(h, k) = P(h, k; \alpha_j) = \int_{\mathfrak{B}} \int_{\mathfrak{B}} \ldots \, dt' \, dt$$

(die Integranden in (24), (25), (28) und (29) sind $H(t, t'; \alpha_j)$). Endlich sei

$$S_2 = \Sigma M(h, k, h', k') \tag{30}$$

(das Summierungsgebiet (26) und (27)) und

$$S_3(\alpha_j) = \Sigma P(h, k; \alpha_j) , \quad S_4(\alpha_j) = \Sigma N(h, k; \alpha_j) \tag{31}$$

(das Summierungsgebiet (26)). Nach (24)–(31) und (20) ergibt sich

$$(32) \qquad 4\pi^2 M_{\varrho,n}(x) = S_1 + S_2 + S_3(\alpha_j) + \overline{S_3(-\alpha_j)} + S_4(\alpha_j) + S_4(-\alpha_j)\,.$$

Wir untersuchen ferner die einzelnen Glieder von der rechten Seite dieser Beziehung.

Behauptung 1.

$$(33) \qquad S_1 \ll x^{r/2+\varrho+n-1/2}\,.$$

Beweis. Nach (20) kann offenbar

$$S_1 \ll \int_{-2w}^{2w}\int_{-2w}^{2w} \ldots\, dt'\, dt + \int_{-w}^{w}\left(\int_{2w}^{\infty} \ldots\, dt' + \int_{-\infty}^{-2w} \ldots\, dt'\right) dt = T_1 + T_2$$

mit den Integranden $|H(t, t'; \alpha_j)|$ geschrieben werden. Die Abschätzung $T_1 + T_2 \ll \ll x^{r/2+\varrho+n-1/2}$ ist nun in [6], S. 66–67 (Beziehungen (22) und (24)) angeführt.

Behauptung 2.

$$(34) \qquad S_3(\alpha_j) + \overline{S_3(-\alpha_j)} \ll x^{r/2-1/2+\varrho+n/2}\,.$$

Beweis. In $P(h, k)$ (siehe (29)) ist nach (23) offenbar $\min(|s|, |s'|, |s + s'|) \gg h/k$. Wenn man nun die Beziehung (15) vom Lemma 3 auf die Funktion $F(s)$ und die gleiche Abschätzung (siehe (11)) für die Funktion $G(s')$ benützt, erhält man

$$S_3(\alpha_j) + \overline{S_3(-\alpha_j)} \ll$$
$$\ll \sum_{k \leqq \sqrt{x}} \sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{k}{h}\right)^{2(\varrho+1)+n} \frac{x^{r-2}}{k^r} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\, dt\, x\, dt'}{(1 + x|t - \beta|)^{r/2}(1 + x|t' - \beta|)^{r/2}} \ll$$
$$\ll x^{r-2} \sum_{k \leqq \sqrt{x}} k^{2(\varrho+1)+n-r} \ll x^{r/2-1/2+\varrho+n/2}\,.$$

Behauptung 3.

$$(35) \quad S_4(\alpha_j) = \frac{M^2 x^{r-2+n}\, \Gamma(r-1)}{(2\pi)^{2\varrho}\, \Gamma(r+n-1)\, \Gamma^2(r/2)} \sum_{k \leqq \sqrt{x}} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{|S_{h,k}|^2}{h^{2(\varrho+1)} k^{2r-2\varrho-2}} + O(g(x))\,,$$

wo $g(x) = \max\left(x^{r/2+\varrho+n-1/2}, x^{r+n-3}\right)$.

Beweis. Wähle man (26) erfüllende h und k, und bezeichne man

$$(36) \quad f_1(s) = \frac{F(s)}{s^{\varrho+1}} - \frac{M S_{h,k}}{s^{\varrho+1} k^r (s - i\beta)^{r/2}}\,, \quad f_2(s) = \frac{M S_{h,k}}{k^r (s - i\beta)^{r/2}} \left(\frac{1}{s^{\varrho+1}} - \frac{1}{(i\beta)^{\varrho+1}}\right),$$

$$f_3(s) = \frac{1}{(i\beta)^{\varrho+1}} \frac{M S_{h,k}}{k^r (s - i\beta)^{r/2}}\,, \qquad g_j(s) = \overline{f_j(\bar{s})}\,, \quad j = 1, 2, 3\,.$$

Es gilt also

$$(37)\qquad \frac{F(s)}{s^{\varrho+1}} = f_1(s) + f_2(s) + f_3(s), \quad \frac{G(s)}{s^{\varrho+1}} = g_1(s) + g_2(s) + g_3(s).$$

Für $t \in \mathfrak{B}$ ergeben sich nach (15)–(17) und (23) die Abschätzungen

$$(38)\qquad f_1(s) \ll x^{r/4}\left(\frac{k}{h}\right)^{\varrho+1},$$

$$f_2(s) \ll \frac{x^{r/2-1}}{k^{r/2}(1 + x|t - \beta|)^{r/2-1}}\left(\frac{k}{h}\right)^{\varrho+2},$$

$$f_3(s) \ll \frac{x^{r/2}}{k^{r/2}(1 + x|t - \beta|)^{r/2}}\left(\frac{k}{h}\right)^{\varrho+1}.$$

Ähnliche Beziehungen ($+\beta$ anstatt $-\beta$) gelten für die Funktionen $g_j(s)$, $j = 1, 2, 3$ unter der Voraussetzung $t \in -\mathfrak{B}$ (siehe (36) und (11)). Daher bekommen wir nach Benützung von (18) sofort

$$(39)\qquad |f_1(s)| + |f_2(s)| + |f_3(s)| \ll \frac{x^{r/2}}{k^{r/2}}\left(\frac{k}{h}\right)^{\varrho+1}\frac{1}{(1 + x|t - \beta|)^{r/2}}$$

(für $t \in \mathfrak{B}$) und

$$(40)\qquad |g_1(s)| + |g_2(s)| + |g_3(s)| \ll \frac{x^{r/2}}{k^{r/2}}\left(\frac{k}{h}\right)^{\varrho+1}\frac{1}{(1 + x|t + \beta|)^{r/2}}$$

(für $t \in -\mathfrak{B}$). Wir bezeichnen

$$V(h, k) = \int_{\mathfrak{B}}\int_{-\mathfrak{B}} f_3(s)\, g_3(s')\, \frac{e^{x(s+s')}}{(s + s')^n}\, dt\, dt',$$

$$W(h, k) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_3(s)\, g_3(s')\, \frac{e^{x(s+s')}}{(s + s')^n}\, dt\, dt'$$

und schätzen die Differenz $N(h, k) - W(h, k)$ ab (dabei wir t' statt $-t'$ geschrieben und also $\mathfrak{B}$ statt $-\mathfrak{B}$). Nachdem

$$\frac{F(s)\, G(s')}{s^{\varrho+1} s'^{\varrho+1}} - f_3(s)\, g_3(s') \ll$$

$$\ll (|f_1(s)| + |f_2(s)|)(|g_1(s')| + |g_2(s')| + |g_3(s')|) + |f_3(s)|(|g_1(s')| + |g_2(s')|)$$

ist, bekommt man nach (38) (und nach den analogischen Beziehungen für die Funktionen $g_j(s')$, $j = 1, 2, 3$), (39) und (40)

$$N(h, k) - V(h, k) \ll \int_{\mathfrak{B}} \int_{\mathfrak{B}} \left(\frac{k}{h}\right)^{\varrho+1} \frac{x^{r/2+n}}{k^{r/2}(1 + x|t' - \beta|)^{1/2}} \frac{1}{(1 + x|t - t'|)^n} \cdot$$

$$\cdot \left[x^{r/4} \left(\frac{k}{h}\right)^{\varrho+1} + \left(\frac{k}{h}\right)^{\varrho+2} \frac{x^{r/2-1}}{k^{r/2}(1 + x|t - \beta|)^{r/2}} \right] \mathrm{d}t' \, \mathrm{d}t \ll$$

$$\ll x^{r/2+n} \frac{k^{2(\varrho+1)-r/2}}{h^{2(\varrho+1)}} \int_{\mathfrak{B}} \int_{\mathfrak{B}} \frac{1}{(1 + x|t' - \beta|)^{r/2} (1 + x|t - t'|)^n} \cdot$$

$$\cdot \left(x^{r/4} + \frac{k^{1-r/2}}{h} \frac{x^{r/2-1}}{(1 + x|t - \beta|)^{r/2}} \right) \mathrm{d}t' \, \mathrm{d}t \ll$$

$$\ll \frac{x^{r/2+n-2} k^{2(\varrho+1)-r/2}}{h^{2(\varrho+1)}} \left[x^{r/4} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^{\infty} \frac{x \, \mathrm{d}v}{(1 + xv)^n} \right) \frac{x \, \mathrm{d}t'}{(1 + x|t' - \beta|)^{r/2}} + \right.$$

$$+ \frac{x^{r/2-1}}{hk^{r/2-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{x}{(1 + x|t - t'|)^{qn}} + \frac{x}{(1 + x|t - \beta|)^{q'(r/2-1)}} \right) \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \frac{\mathrm{d}t \, x \, \mathrm{d}t'}{(1 + x|t' - \beta|)^{r/2}} \right] \ll$$

(es wurde dabei die Ungleichung $|ab| \leqq |a|^q/q + |b|^q/q'$, $q > 1$, $q' = q/(q - 1)$ benützt z. B. für $q = \frac{3}{2}$). Daher bekommen wir

$$(41) \quad S_4(\alpha_j) - \sum_{k \leqq \sqrt{x}} \sum_{h=1}^{\infty} V(h, k) \ll x^{3r/4+n-2} \sum_{k \leqq \sqrt{x}} \left(k^{2\varrho+2-r/2} + x^{r/4-1} k^{2\varrho+3-r}\right) \ll$$

$$\ll \begin{cases} x^{r/2+\varrho+n-1/2} & \text{für } \ \frac{1}{2}(r - 5) \leqq \varrho \leqq \frac{1}{2}(r - 3)\,, \\ x^{r+n-3} & \text{für } \ 0 \leqq \varrho \leqq \frac{1}{2}(r - 5)\,. \end{cases}$$

Für die Abschätzung der Differenz $V(h, k) - W(h, k)$ bedenken wir, dass nach (38) (und nach den analogen Beziehungen für $g_3(s')$), nach (21)–(23) und (17)

$$(42) \qquad V(h, k) - W(h, k) \ll \left(\frac{k^{\varrho+1}}{h^{\varrho+1} k^{r/2}}\right)^2 x^{r+n-2}(I_1 + I_2)\,,$$

ist, wo

$$I_1 = \int_{\mathfrak{B}} \left(\int_{\mathfrak{N}} \frac{x \, \mathrm{d}t'}{(1 + x|t - \beta|)^{r/2} (1 + x|t' - \beta|^{r/2} (1 + x|t - t'|)^n} \right) x \, \mathrm{d}t\,,$$

$$I_2 = \int_{\mathfrak{N}} \left(\int_{\mathfrak{N}} \ldots \mathrm{d}t' \right) \mathrm{d}t$$

(mit dem gleichen Integrand, $\mathfrak{N} = E_1 - \mathfrak{B}$). Ist $t \in \mathfrak{B}$, dann ist nach (18) $|t - \beta| \ll 1/k\sqrt{x}$, für $t \in \mathfrak{N}$ ist wieder nach (18) $|t - \beta| \gg 1/k\sqrt{x}$. Also ist

$$(43) \quad I_2 \ll \left(\frac{k}{\sqrt{x}}\right)^{r/2} \int_{\mathfrak{N}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,dt}{(1 + x|t - t'|)^n (1 + x|t' - \beta|)^{r/2}} \right) x\,dt' \ll \left(\frac{k}{\sqrt{x}}\right)^{r-1}.$$

Für die Abschätzung von I_1 bedenke man, dass für $t \in \mathfrak{B}$, $t' \in \mathfrak{N}$ ist $|t - \beta| \leqq 2\pi/k\sqrt{x}$ und $|t' - \beta| \geqq \pi/k\sqrt{x}$; also ist entweder $|t - \beta| > \pi/2k\sqrt{x}$ oder $|t - t'| > \pi/2k\sqrt{x}$ d. h.

$$(1 + x|t - \beta|)(1 + x|t - t'|) \gg \frac{\sqrt{x}}{k}$$

und also für I_1 erhalten wir die Abschätzung

(44)

$$c\left(\frac{k}{\sqrt{x}}\right)^{r/2-3/2} \int_{\mathfrak{B}} \left(\int_{\mathfrak{N}} \frac{x\,dt'}{(1 + x|t - \beta|)^{3/2} (1 + x|t' - \beta|)^{r/2} (1 + x|t - t'|)^{n - r/2 + 3/2}} \right) x\,dt \ll$$

$$\ll \left(\frac{k}{\sqrt{x}}\right)^{r-3/2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,dt\,x\,dt'}{(1 + x|t - t'|)^2 (1 + x|t - \beta|)^{3/2}} \ll \left(\frac{k}{\sqrt{x}}\right)^{r-3/2}.$$

Nach (42)—(44) erhalten wir

$$\sum_{k \leqq \sqrt{x}} \sum_{h=1}^{\infty} (V(h, k) - W(h, k)) \ll x^{r/2+n-5/4} \sum_{k \leqq \sqrt{x}} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{k^{2\varrho+1/2}}{h^{2(\varrho+1)}} \ll x^{r/2+\varrho+n-1/2}$$

und also nach (41) auch

$$(45) \quad S_4(\alpha_j) - \sum_{k \leqq \sqrt{x}} \sum_{h=1}^{\infty} W(h, k) \ll \begin{cases} x^{r/2+\varrho+n-1/2} & \text{für } \tfrac{1}{2}(r-5) \leqq \varrho \leqq \tfrac{1}{2}(r-3), \\ x^{r+n-3} & \text{für } 0 \leqq \varrho \leqq \tfrac{1}{2}(r-5). \end{cases}$$

Ferner ist

$$(46) \quad W(h, k) = \frac{M^2 |S_{h,k}|^2}{(2\pi)^{2\varrho+2} k^{2r-2\varrho-2} h^{2(\varrho+1)}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{x(s+s')}}{s^{r/2} s'^{r/2} (s + s')^n} \,dt\,dt'.$$

Um das letzte Integral zu berechnen, erwäge man, dass $(a, u > 0)$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(a)} \frac{e^{us}}{s^{r/2}} \,ds = \frac{u^{r/2-1}}{\Gamma(r/2)}$$

ist und also

$$(47) \quad -\frac{1}{4\pi^2} \int_{(a)} \int_{(a)} \frac{e^{u(s+s')}}{s^{r/2} s'^{r/2}} \,ds\,ds' = \frac{u^{r/2}}{\Gamma^2(r/2)}.$$

Nach dem Lemma 1 ist zu sehen, dass das Integral

$$\int_{(a)} \left(\int_{(a)} \frac{ds}{s^{r/2} s'^{r/2} (s + s')^n} \right) ds'$$

von a nicht abhängt und also (nach dem Grenzübergang $a \to +\infty$) Null gleich ist. Nach der gliedweisen Integration der Beziehung (47) bekommen wir so, dass das Integral in (46) den Wert

$$-4\pi^2 \frac{x^{r+n-2}\, \Gamma(r-1)}{\Gamma(r+n-1)\, \Gamma^2(r/2)}$$

hat. Daher, von (46) und (45) ergibt sich schon sofort die Behauptung.

Wir untersuchen nun die Summe in (35).

Behauptung 4. *Sei*

(48) $$T(x) = T(x; \alpha_j) = \sum_{k \leqq \sqrt{x}} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{|S_{h,k}|^2}{k^{2r-2\varrho-2} h^{2(\varrho+1)}}, \quad S(x) = T(x; \alpha_j) + T(x; -\alpha_j).$$

Ist $0 \leqq \varrho < \frac{1}{2}(r-3)$, *dann ist*

(49) $$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{h \neq 0} \frac{|S_{h,k}|^2}{k^{2r-2\varrho-2} |h|^{2(\varrho+1)}} + O(x^{3/2+\varrho-r/2}),$$

wobei die Reihe in (49) *konvergent ist. Ist* $\varrho = \frac{1}{2}(r-3) \geqq 0$ *dann ist*

(50) $$S(x) = K \lg x + O(1)$$

mit einer passenden Konstante $K = c$.

Ferner ist für $0 \leqq \varrho \leqq \frac{1}{2}(r-3)$

(51) $$S(x) - S\left(\frac{x}{2}\right) \ll x^{\varrho+3/2-r/2},$$

(52) $$S(x) \ll \lg^{\varepsilon} x,$$

wo $\varepsilon = 1$ *für* $\varrho = \frac{1}{2}(r-3) \geqq 0$, $\varepsilon = 0$ *für* $0 \leqq \varrho < \frac{1}{2}(r-3)$ *ist.*

Beweis. Wenn wir (17) und die Tatsache, dass offenbar

$$\bar{S}_{h,k}(\alpha_j) = S_{-h,k}(-\alpha_j)$$

ist, benützen, dann bekommen wir sofort die Konvergenz der Reihe in (49) und die Abschätzung

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{h \neq 0} \frac{|S_{h,k}|^2}{k^{2r-2\varrho-2} |h|^{2(\varrho+1)}} - S(x) \ll \sum_{k > \sqrt{x}} \frac{1}{k^{r-2\varrho-2}} \ll x^{3/2+\varrho-r/2}$$

(für $0 \leqq \varrho < \frac{1}{2}(r-3)$). Wenn $\varrho = \frac{1}{2}(r-3) \geqq 0$ ist, hat $T(x)$ die Form

$$\sum_{k \leqq \sqrt{x}} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{|S_{h,k}|^2}{k^{r+1} h^{2(\varrho+1)}} = \sum_{k \leqq \sqrt{x}} \sum_{h=1}^{k} \frac{|S_{h,k}|^2}{k^{r+1} h^{2(\varrho+1)}} + O(1)$$

und der Beweis der Beziehung (50) verläuft ganz so wie der Beweis vom Lemma 8 in [7] (für den Fall $r = 3$, $\varrho = 0$). Es genügt überall anstatt h^2 den Ausdruck $h^{2(\varrho+1)}$ zu schreiben. Schliesslich ist nach (17)

$$S(x) - S(x/2) \ll \sum_{\sqrt{(x/2)} < k \leqq x} k^{2\varrho+2-r} \ll \sqrt{(x)}\, x^{(2\varrho+2-r)/2} = x^{3/2+\varrho-r/2}$$

und

$$S(x) \ll \sum_{k \leqq \sqrt{x}} \frac{1}{k^{r-2\varrho-2}} \ll \begin{cases} 1 & \text{für} \quad 0 \leqq \varrho < \frac{1}{2}(r-3)\,, \\ \lg x & \text{für} \quad 0 \leqq \varrho = \frac{1}{2}(r-3)\,. \end{cases}$$

Behauptung 5.

$$S_2 \ll x^{r/2+\varrho+n-1/2}\,. \tag{53}$$

Beweis. Die Benützung von (15), (28), (30), (21)–(23) liefert

$$S_2 \ll x^{r-2} \sum \left(\frac{kk'}{hh'}\right)^{\varrho+1} \int_{\mathfrak{B}} \left(\int_{\mathfrak{B}'} \frac{x\, dt'}{k'^{r/2}(1 + x|t' - \beta'|)^{r/2} (1/x + |t - t'|)^n} \right) \cdot \frac{x\, dt}{k^{r/2}(1 + x|t - \beta|)^{r/2}}\,, \tag{54}$$

wo über alle (26) und (27) erfüllende h, k, h', k' summiert wird. Mit Rücksicht zur Symmetrie der Fälle beschränken wir uns nur auf den Fall $k' \geqq k$. Die Summe in (54) zerlegen wir in zwei Teile: in T_1 seien alle Glieder mit $0 < |h'/k' - h/k| \leqq 4/k\sqrt{x}$ enthalten, T_2 enthalte alle übrigen Glieder d. h. Glieder in welchen $|h'/k' - h/k| > > 4/k\sqrt{x}$ ist. Es ist also

$$S_2 \ll T_1 + T_2\,. \tag{55}$$

In T_1 haben wir offenbar

$$\frac{1}{kk'} \leqq \left|\frac{h'}{k'} - \frac{h}{k}\right| \leqq \frac{4}{k\sqrt{x}} \tag{56}$$

und also nach (27) ist $\frac{1}{4}\sqrt{x} \leqq k' \leqq \sqrt{x}$ und $h'/k' \geqq h/k - 4/k\sqrt{x} \gg h/k$. Von (56) folgt ferner $|hk' - h'k| \leqq 4$. Wählt man also h und k, dann sind für k' höchstens c Möglichkeiten mod k vorhanden und also insgesamt $c(\sqrt{x}/k)$ Möglichkeiten. Wählt man h, k, k', dann sind für h' höchstens c Möglichkeiten vorhanden. Bedenken wir noch, dass nach (56) ist

$$(1 + x|t - \beta|)(1 + x|t' - \beta'|)(1 + x|t - t'|) >$$
$$> x(|\beta - t| + |t - t'| + |\beta' - t'|) \geqq x|\beta - \beta'| \gg \frac{\sqrt{x}}{k}.$$

Wählt man $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, $\varepsilon = c$, dann kann man schreiben

$$T_1 \ll x^{r+n-2} \sum \left(\frac{kk'}{hh'}\right)^{\varrho+1} \left(\frac{k}{\sqrt{x}}\right)^{r/2-1-\varepsilon} \frac{1}{(kk')^{r/2}} \cdot$$
$$\cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,dt'\,x\,dt}{(1 + x|t - \beta|)^{1+\varepsilon}(1 + x|t' - \beta'|)^{1+\varepsilon}} \ll$$
$$\ll x^{r+n-2} \sum_{k \leqq \sqrt{x}} \sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{k}{h}\right)^{2(\varrho+1)} \left(\frac{k}{\sqrt{x}}\right)^{r/2-1-\varepsilon} \frac{1}{k^{r/2}} \frac{\sqrt{x}}{k} \frac{1}{x^{r/4}} \ll$$
$$\ll x^{r/2+n-1+\varepsilon/2} \sum_{k \leqq \sqrt{x}} k^{2\varrho-\varepsilon} \ll x^{r/2+\varrho+n-1/2},$$

nachdem $2\varrho - \varepsilon > -\frac{1}{2}$, d. h. es gilt

(57) $$T_1 \ll x^{r/2+\varrho+n-1/2}.$$

In der Summe T_2 ist $|h'/k' - h/k| > 4/k\sqrt{x}$ und also $(k' \geqq k)$

(58) $$|\beta - \beta'| \leqq \frac{8\pi}{k\sqrt{x}} \geqq 2\left(\frac{2\pi}{k\sqrt{x}} + \frac{2\pi}{k'\sqrt{x}}\right).$$

Für $t \in \mathfrak{B}$, $t' \in \mathfrak{B}'$ ist nach (18) $|t - \beta| \leqq 2\pi/k\sqrt{x}$, $|t' - \beta'| \leqq 2\pi/k'\sqrt{x}$. Nach (58) ergibt sich

$$\frac{1}{x} + |t - t'| > |t - t'| > \tfrac{1}{2}|\beta - \beta'| = \pi\left|\frac{h}{k} - \frac{h'}{k'}\right|.$$

Daher folgt (es wird über (26) und (27) erfüllende h, k, h', k' summiert, $k \leqq k'$)

$$T_2 \ll \sum \left(\frac{kk'}{hh'}\right)^{\varrho+1} \frac{(kk')^n}{|kh' - hk'|^n} x^{r-2} \frac{1}{(kk')^{r/2}} \ll$$
$$\ll x^{r/2+\varrho+n-7/2} \sum \frac{kk'}{hh'} \frac{x}{(kk')^{3/2}} \frac{(kk')^2}{|kh' - hk'|^2}.$$

Nach [1], S. 164–167 ist die letzte Summe $O(x^3)$ (in den Bezeichnungen dieser Arbeit ist es die Summe T_2 für $r = 3$, $n = 2$). Wir haben so

(59) $$T_2 \ll x^{r/2+\varrho+n-1/2},$$

was zusammen mit (57) und (55) die Beziehung (53) gibt.

Auf dem Grund der Behauptungen 1–3 und (32) kann man folgendes aussagen:

Behauptung 6. *Es gibt ein* $n_0 = c$, *so dass für* $0 \leqq \varrho \leqq \frac{1}{2}(r-3)$, $n \geqq n_0$, $n = c$

$$M_{\varrho,n}(x) = \frac{M^2 x^{r+n-2}\,\Gamma(r-1)}{(2\pi)^{2\varrho+2}\,\Gamma(r+n-1)\,\Gamma^2(r/2)}\,S(x) + O(g(x))\,, \tag{60}$$

gilt, wo $g(x) = \max\left(x^{r/2+\varrho+n-1/2}, x^{r+n-3}\right)$ *ist und* $S(x)$ *ist nach* (48) *definiert.*

Zum Beweis des Hauptsatzes 1 genügt es also die Induktion „herunterzu" durchzuführen. Setzen wir voraus, dass wir für ein gewisses $n > 1$ ($N = c$)

$$M_{\varrho,n}(x) = Nx^{r+n-2}\,S(x) + O(x^\alpha \lg^\beta x)$$

bewiesen haben, wo für $0 \leqq \varrho < \frac{1}{2}(r-3)$ wir $\beta = 0$, $0 < \alpha < r+n-2$ haben und für $0 \leqq \varrho = \frac{1}{2}(r-3)$ ist $\alpha = r+n-2$, $0 \leqq \beta < 1$. Da beide Funktionen $M_{\varrho,n-1}(x)$ und $S(x)$ nichtnegativ und nichtfallend sind, ist nach (51) und (52) für $0 < \lambda < \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
\lambda x\, M_{\varrho,n-1}(x) &\leqq \int_x^{x(1+\lambda)} M_{\varrho,n-1}(t)\,\mathrm{d}t = M_{\varrho,n}(x(1+\lambda)) - M_{\varrho,n}(x) = \\
&= Nx^{r+n-2}((1+\lambda)^{r+n-2}\,S(x(1+\lambda)) - S(x)) + O(x^\alpha \lg^\beta x) = \\
&= Nx^{r+n-2}\,S(x)\,((1+\lambda)^{r+n-2} - 1) + Nx^{r+n-2}(1+\lambda)^{r+n-2}\,(S(x(1+\lambda)) - \\
&\quad - S(x)) + O(x^\alpha \lg^\beta x) = Nx^{r+n-2}(r+n-2)\,\lambda\,S(x) + \\
&\quad + O(x^{r+n-2}\lambda^2 \lg^\varepsilon x) + O(x^{r+n-2+\varrho+3/2-r/2}) + O(x^\alpha \lg^\beta x) = \\
&= \lambda N x^{r+n-2}(r+n-2)\,S(x) + O(x^{r+n-2}\lambda^2 \lg^\varepsilon x) + \\
&\quad + O(x^{r/2+\varrho+n-1/2}) + O(x^\alpha \lg^\beta x)\,,
\end{aligned}$$

d. h.

$$\begin{aligned}
M_{\varrho,n-1}(x) &\leqq N(r+n-2)\,x^{r+n-3}\,S(x) + O(x^{r+n-3}\lambda \lg^\varepsilon x) + \\
&\quad + \frac{1}{\lambda}\,O(x^{r/2+\varrho+n-3/2} + x^{\alpha-1}\lg^\beta x)\,.
\end{aligned}$$

Wählt man nun $\lambda = \lg^{(\beta-1)/2} x$ für $\varrho = \frac{1}{2}(r-3) \geqq 0$, $\lambda = x^\tau$, wo $\tau = \frac{1}{2}(2 - r - n + \max(\frac{1}{2}r + \varrho + n - \frac{1}{2}, \alpha))$ für $0 \leqq \varrho < \frac{1}{2}(r-3)$, ergibt sich im ersten Fall

$$M_{\varrho,n-1}(x) \leqq N(r+n-2)\,x^{r+n-3}\,S(x) + O(x^{\alpha-1}\lg^{(\beta+1)/2} x)$$

und im zweiten Fall

$$M_{\varrho,n-1}(x) \leqq N(r+n-2)\,x^{r+n-3}\,S(x) + O(x^{\alpha'})\,,$$

wo $\alpha' < r + n - 3$ ist. Nach der Verwendung des Integrales

$$\int_{x(1-\lambda)}^{x} M_{\varrho,n-1}(t)\,dt$$

beweisen wir die umgekehrten Ungleichungen und mit Rücksicht auf die Behauptungen 3 und 6 auch den Hauptsatz 1.

Bemerkung. Es entsteht die begreifliche Frage, welche die womöglich kleinsten Werte von α und β im Hauptsatz 1 sind. Der Beweis des Satzes wurde absichtlich zur Existenz der erwähnten Zahlen α und β gerichtet. Wenn die einzelnen Abschätzungen ausführlich für alle Werte von n durchgeführt wären und auf diesem Grund die Grösse von α und β bestimmt wäre, könnte die Behauptung des Hauptsatzes 1 noch wesentlich verschärft werden. Für die Mehrheit der Fälle wird nämlich die Wahl $n = 1$ optimal sein. Nachdem es sich aber um die Unterscheidung einer grossen Reihe von Fällen handelt (in Abhängigheit von der gemeinsamen Grosse von r, ϱ und n), wurde der Hauptsatz 1 in der angeführten Form dargestellt. Bemerken wir auch, dass für $0 \leqq \varrho < \frac{1}{2}r - 3$ man $\alpha = r - 2$ legen kann. Führen wir auch noch an, dass für $0 \leqq \varrho < \frac{1}{2}r - 2$ die Summe T_2 im Beweis der Behauptung 5 trivial in der Form

$$T_2 \ll x^{r-2} \sum_{k,k' \leqq \sqrt{x}} (kk')^{n+\varrho+1-r/2} \ll x^{r/2+n+\varrho}$$

abschätzbar ist und $\frac{1}{2}r + n + \varrho < r + n - 2$.

Bemerkung. Das „Hauptglied“ der Funktion $M_\varrho(x)$ kann noch in einer Reihe weiterer Fälle hergeleitet werden (unter unseren Voraussetzungen auch für gewisse $\varrho > \frac{1}{2}(r - 3)$, ferner im Singularfall usw.). Nachdem aber eine andere Methode dabei zu verwenden ist, werden Ergebnisse dieser Art selbständig veröffentlicht.

Literaturverzeichnis

[1] *V. Jarník:* Über die Mittelwertsätze der Gitterpunktlehre V, Časopis pro pěst. matematiky *69* (1940), 148–174.

[2] *V. Jarník:* Bemerkungen zu Landauschen Methoden in der Gitterpunktlehre, Abhandlungen aus Zahlentheorie und Analysis zur Erinnerung an E. Landau, VEB Berlin 1968.

[3] *E. Landau:* Ausgewählte Abhandlungen zur Gitterpunktlehre, VEB Berlin 1962.

[4] *B. Novák:* Verallgemeinerung eines Peterssonschen Satzes und Gitterpunkte mit Gewichten, Acta Arithmetica *XIII* (1968), 371–397.

[5] *B. Novák:* On lattice points with weight in high-dimensional ellipsoids, Acta Arithmetica *XIV* (1968), 371–397.

[6] *B. Novák:* Mean value theorems in the theory of lattice points with weight II, Comment. Math. Univ. Carolinae *11* (1970), 53–81.

[7] *B. Novák:* Mittelwertsätze der Gitterpunktlehre I, Czech. Math. Journal *94* (1969), 154–180.

[8] *B. Novák:* Über eine Methode der Ω-Abschätzungen, Czech. Math. Journal *96* (1971), 257–279.

Anschrift des Verfassers: Praha 8 - Karlín, Sokolovská 83, ČSSR (Matematicko-fyzikální fakulta KU).