Miroslav Sova
Perturbations numériques des évolutions parabolique et hyperbolique

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 96 (1971), No. 4, 406--425

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117739`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 96 (1971), Praha

PERTURBATION NUMÉRIQUES DES ÉVOLUTIONS PARABOLIQUE ET HYPERBOLIQUE

MIROSLAV SOVA, Praha

(Reçu le 23 avril 1970)

On considère le problème suivant d'évolution abstraite.

Soit donné une solution w de l'équation abstraite:

(A) $$w'(t) + A\,w(t) = 0\,, \quad \text{ou}$$

(B) $$w''(t) + A\,w(t) = 0$$

où A est un opérateur, en général non-borné, dans un espace de Banach E.

Il s'agit de construire une solution u de l'équation perturbée:

(A') $$u'(t) + A\,u(t) + c\,u(t) = 0\,, \quad c \text{ réel}\,,$$

(B') $$u''(t) + A\,u(t) \pm c^2\,u(t) = 0\,, \quad c > 0,$$

à partir de la solution donnée w de l'équation non-perturbée (A), (B), les valeurs initiales restant les mêmes.

Le problème est trivial pour (A), (A') – cfr. la section 3 – mais assez compliqué pour (B), (B') – cfr. la section 4.

Les sections 1 et 2 sont préparatoires, la section 5 contient des cas spéciaux de la théorie générale qui sont connus de la théorie classique des équations aux dérivées partielles.

1. PRÉLIMINAIRES

1,1. Dans tout l'article, soit

(1) R le corps des nombres réels,

(2) R^+ l'ensemble des nombres positifs,

(3) $E, E_1, E_2, \ldots$ des espaces de Banach quelconques.

1,2. Soit E un espace de Banach. On désignera par

(1) $\mathfrak{L}^+(E)$ l'ensemble des opérateurs linéaires $(A, B, \ldots)$ dont les domaines $(\mathfrak{D}(A), \mathfrak{D}(B), \ldots)$ sont des sous-ensembles non-vides de E et dont les valeurs $(\mathfrak{R}(A), \mathfrak{R}(B), \ldots)$ demeurent dans E,

(2) $\mathfrak{L}(E)$ l'espace de Banach de tous les opérateurs de $\mathfrak{L}^+(E)$, partout définis et continus, avec la norme usuelle.

1,3. On désignera par I l'opérateur identique de $\mathfrak{L}(E)$. Les multiples αI, $\alpha \in \boldsymbol{R}$, seront appelés opérateurs numériques de $\mathfrak{L}(E)$.

1,4. Si M_1, M_2 sont des ensembles quelconques, on désignera par $M_1 \to M_2$ l'ensemble de toutes les transformations (fonctions) de M_1 dans M_2.

1,5. On utilisera la théorie de l'intégration des fonctions vectorielles au sens de Bochner-Lebesgue.

1,6. Dans ce qui suit, on admet seulement la dérivabilité continue. Donc, le mot dérivable signifie toujours continûment dérivable.

1,7. Proposition. *Soient* $a, b \in \boldsymbol{R}$, $a < b$, $g \in (a, b) \times (a, b) \to E$. *Si*

(a) *la fonction g est continue sur l'ensemble* $\{(t, \tau) : a < \tau \leqq t < b\}$ *et* $g(t, \tau) = 0$ *pour* $a < t < \tau < b$,

(b) *les fonctions* $g(t, .)$ *sont intégrables sur* (a, t) *pour tout* $a < t < b$,

(c) *les fonctions* $g(., \tau)$ *sont continûment dérivables sur* (τ, b) *pour tout* $a < < \tau < b$,

(d) *pour tout* $a < t < b$, *il existe un* $\delta > 0$ *et une fonction* $\varphi \in (a, b) \to \boldsymbol{R}$, *intégrable sur* (a, b), *tels que*

(1)
$$\left\| \frac{\partial}{\partial s} g(s, \tau) \right\| \leqq \varphi(\tau)$$

pour tout $a < s < b$, $|s - t| \leqq \delta$ *et* $a < \tau < s$,

alors la fonction

[*]
$$t \to G(t) = \int_a^t g(t, \tau)\, \mathrm{d}\tau\,, \quad a < t < b\,,$$

est continûment dérivable sur (a, b) *et*

(2)
$$G'(t) = \int_a^t \frac{\partial}{\partial t} g(t, \tau)\, \mathrm{d}\tau + g(t, t)$$

pour tout $a < t < b$.

La preuve est fondée sur le théorème de Fubini.

Ecrivons $g_1(t, \tau) = (\partial/\partial t)\, g(t, \tau)$ pour $a < \tau < t < b$ et $g_1(t, \tau) = 0$ pour $a < t \leqq \leqq \tau < b$.

Il résulte aisément de (a), (c) que

(3) g_1 est mesurable sur $(a, b) \times (a, b)$.

En outre, on déduit de (c), (d) que

(4) $g_1(., \tau)$ est continue sur (τ, b) pour tout $a < \tau < b$,

(5) $g_1(t, .)$ est intégrable sur (a, t) pour tout $a < t < b$,

(6) $t \to \int_a^t g_1(t, \tau)\, d\tau$, $a < t < b$, est continue sur (a, b).

Maintenant, soient $a < \alpha < \beta < b$. On obtient sans peine de (d) qu'il existe une fonction $\varphi_1 \in R^+ \to R$ intégrable sur (a, b) telle que, pour tout $\alpha < t < \beta$ et $a < < \tau < b$,

$$\|g_1(t, \tau)\| \leqq \varphi_1(\tau)\,.$$

Par conséquent, en vertu de (3),

(7) g_1 est intégrable sur $(\alpha, \beta) \times (a, b)$.

Le théorème de Fubini est donc applicable. On en déduit, compte tenu de (4)–(6) et de (b), que

$$\int_\alpha^\beta \left(\int_a^t g_1(t, \tau)\, d\tau\right) dt = \int_\alpha^\beta \left(\int_a^b g_1(t, \tau)\, d\tau\right) dt = \int_a^b \left(\int_\alpha^\beta g_1(t, \tau)\, dt\right) d\tau =$$

$$= \int_a^\alpha \left(\int_\alpha^\beta g_1(t, \tau)\, dt\right) d\tau + \int_\alpha^\beta \left(\int_\tau^\beta g_1(t, \tau)\, dt\right) d\tau + \int_a^\alpha [g(\beta, \tau) - g(\alpha, \tau)]\, d\tau +$$

$$+ \int_\alpha^\beta [g(\beta, \tau) - g(\tau, \tau)]\, d\tau = \int_a^\beta g(\beta, \tau)\, d\tau - \int_a^\alpha g(\alpha, \tau)\, d\tau - \int_\alpha^\beta g(\tau, \tau)\, d\tau\,,$$

d'où

$$\int_\alpha^\beta \left(\int_a^t \frac{\partial}{\partial t} g(t, \tau)\, d\tau\right) dt = G(\beta) - G(\alpha) - \int_\alpha^\beta g(\tau, \tau)\, d\tau$$

ce qui, avec (6), implique notre énoncé.

1,8. Proposition. *Soient $A \in \mathfrak{L}^+(E)$, Λ un intervalle ouvert et $f \in \Lambda \to E$. Si l'opérateur A est fermé, la fonction f est intégrable sur Λ, $f(t) \in \mathfrak{D}(A)$ pour presque* *tout $t \in \Lambda$ et la fonction Af est intégrable sur Λ, alors*

$$\int_{\Lambda} f(\tau)\, \mathrm{d}\tau \in \mathfrak{D}(A)\,, \tag{1}$$

$$A \int_{\Lambda} f(\tau)\, \mathrm{d}\tau = \int_{\Lambda} A f(\tau)\, \mathrm{d}\tau\,. \tag{2}$$

1.9. Proposition. *Soient A, Λ et f comme dans* 1,8. *Si l'opérateur A est fermé, la fonction f est dérivable sur Λ, $f(t) \in \mathfrak{D}(A)$ pour tout $t \in \Lambda$ et Af est dérivable sur Λ, alors*

$$f'(t) \in \mathfrak{D}(A) \quad \textit{pour tout} \quad t \in \Lambda\,, \tag{1}$$

$$(Af)'(t) = A f'(t) \quad \textit{pour tout} \quad t \in \Lambda\,. \tag{2}$$

Pour les preuves de 1,8 et 1,9, voir [1] chap. III.

2. PROBLÈMES DE CAUCHY

2,1. Soient $A \in \mathfrak{L}^+(E)$, $u \in R^+ \to E$. On dit que la fonction u est une propagation de l'évolution parabolique pour l'opérateur A si

(I) u est dérivable sur R^+,

(II) $u(0_+)$ existe,

(III) $u(t) \in \mathfrak{D}(A)$ pour tout $t \in R^+$,

(IV) $u'(t) + A\,u(t) = 0$ pour tout $t \in R^+$.

La propagation u telle que $u(0_+) = 0$ s'appelle déviation.

2,2. Soit $A \in \mathfrak{L}^+(E)$. L'opérateur A s'appelle paraboliquement exact si toute déviation u de l'évolution parabolique pour A est identiquement nulle.

2,3. Soit $A \in \mathfrak{L}^+(E)$. L'opérateur A s'appelle paraboliquement correct s'il existe un sous-ensemble linéaire $Z \subseteq E$ et deux constantes M, $\omega \in R$ tels que

(I) $\bar{Z} \supseteq \mathfrak{D}(A)$,

(II) pour tout $x \in Z$, il existe une propagation u de l'évolution parabolique pour A telle que

$$u(0_+) = x\,, \tag{1}$$

$$\|u(t)\| \leqq M e^{\omega t} \|x\|\,, \tag{2}$$

quel que soit $t \in R^+$.

2,4. Soient $A \in \mathfrak{L}^+(E)$, $u \in R^+ \to E$. On dit que la fonction u est une propagation de l'évolution hyperbolique pour l'opérateur A si

(I) u est deux fois dérivable sur R^+,

(II) $u(0_+)$, $u'(0_+)$ existent,

(III) $u(t) \in \mathfrak{D}(A)$ pour tout $t \in R^+$,

(IV) $u''(t) + A\,u(t) = 0$ pour tout $t \in R^+$.

La propagation u telle que $u'(0_+) = 0$ $[u(0_+) = 0]$ s'appelle propagation cosinus [desinus].

La propagation telle que $u(0_+) = u'(0_+) = 0$ s'appelle déviation.

2,5. Soit $A \in \mathfrak{L}^+(E)$. L'opérateur A s'appelle hyperboliquement exact si toute déviation u de l'évolution hyperbolique pour A est identiquement nulle.

2,6. Soit $A \in \mathfrak{L}^+(E)$. L'opérateur A s'appelle hyperboliquement cosinus [desinus] correct s'il existe un sous-ensemble linéaire $Z \subseteq E$ et deux constantes $M, \omega \in R$ tels que

(I) $\bar{Z} \supseteq \mathfrak{D}(A)$,

(II) pour tout $x \in \bar{Z}$, il existe une propagation cosinus [desinus] de l'évolution hyperbolique pour A telle que

$$u(0_+) = x \ \left[u'(0_+) = x\right], \tag{1}$$

$$\|u(t)\| \leqq M e^{\omega t}\|x\| \ \left[\|u(t)\| \leqq M t e^{\omega t}\|x\|\right], \tag{2}$$

quel que soit $t \in R^+$.

2,7. Proposition. *Soient $A \in \mathfrak{L}^+(E)$, $v \in R^+ \to E$. Si l'opérateur A est fermé et u est une propagation cosinus de l'évolution hyperbolique pour A, alors la fonction*

$$t \to u(t) = \int_0^t v(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,, \quad t \in R^+\,, \tag{$*$}$$

est une propagation desinus de l'évolution hyperbolique pour A telle que

$$u'(0_+) = v(0_+)\,. \tag{1}$$

La preuve est simple.

2,8. Proposition. *Soient $A \in \mathfrak{L}^+(E)$, $v \in R^+ \to E$. Si v est une propagation desinus de l'évolution hyperbolique pour A, alors la fonction*

$$t \to u(t) = \frac{1}{2t\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \alpha e^{-\alpha^2/4t}\, v(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha\,, \quad t \in R^+\,, \tag{$*$}$$

est une propagation de l'évolution parabolique pour A telle que

[1] $$u(0_+) = v'(0_+).$$

La preuve est un peu difficile et sera publiée ailleurs.

2,9. Théorème. *Soit $A \in \mathfrak{L}^+(E)$. Si l'opérateur A est hyperboliquement cosinus correct, il est aussi desinus correct.*

La preuve s'ensuit de 2,7.

2,10. Proposition. *Il existe un espace de Banach E et un opérateur $A \in \mathfrak{L}^+(E)$ tels que A est hyperboliquement desinus, mais non cosinus correct.*

Preuve. On prend pour E l'espace $\mathbf{C}(R^3)$ des fonctions bornées, uniformément continues de $R^3 \to R$ avec la norme usuelle – supremum. Soit Δ l'opérateur laplacien au sens des distributions. On prend pour A la restriction de Δ dans $\mathbf{C}(R^3)$.

Maintenant, on démontre aisément notre énoncé en se servant de la formule classique de Kirchhoff.

2,11. Théorème. *Soit $A \in \mathfrak{L}^+(E)$. Si l'opérateur A est hyperboliquement desinus correct, il est aussi paraboliquement correct.*

La preuve est fondée sur 2,8.

2,12. Proposition. *Il existe un espace de Banach E et un opérateur $A \in \mathfrak{L}^+(E)$ tels que A est paraboliquement, mais non hyperboliquement desinus correct.*

Preuve. On prend $E = \mathbf{C}(R)$, espace analogue à $\mathbf{C}(R^3)$ dans 2,10. Soit $\mathbf{D}$ l'opérateur de dérivation au sens des distributions. On prend pour A la restriction de $\mathbf{D}$ dans $\mathbf{C}(R)$.

3. PERTURBATIONS NUMÉRIQUES DANS LE CAS PARABOLIQUE

3,1. Proposition. *Soient $A \in \mathfrak{L}^+(E)$, $c \in R$ et $w \in R^+ \to E$. Si la fonction w est une propagation de l'évolution parabolique pour A, alors la fonction*

[*] $$t \to u(t) = e^{-ct}\, w(t), \quad t \in R^+,$$

est une propagation de l'évolution parabolique pour $A + cI$ telle que

(1) $$u(0_+) = w(0_+).$$

La preuve est triviale.

3,2. Théorème. *Soient $A \in \mathfrak{L}^+(E)$ et $c \in R$. Si l'opérateur A est paraboliquement exact, alors l'opérateur $A + cI$ est aussi paraboliquement exact.*

La preuve résulte sans peine de 3,1.

3,3. Théorème. *Soient $A \in \mathfrak{L}^+(E)$ et $c \in R$. Si l'opérateur A est paraboliquement correct, alors $A + cI$ est aussi paraboliquement correct.*

La preuve s'ensuit de 3,1 et 3,2.

4. PERTURBATIONS NUMÉRIQUES DANS LE CAS HYPERBOLIQUE

4,1. Ecrivons pour $\xi \in R^+$:

(1) $$I_1(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\xi^{2k+1}}{2^{2k+1} k!\,(k+1)!},$$

(2) $$K_1(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\xi^{2k}}{2^{2k} k!\,(k+1)!},$$

(3) $$M_1(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k+2)\,\xi^{2k}}{2^{2k}(k+1)!\,(k+2)!}.$$

4,2. Lemme. *Les fonctions I_1, K_1, L_1 sont indéfiniment dérivables sur R^+ et, pour tout $\xi \in R$,*

(1) $$\xi^2 I_1''(\xi) + \xi I_1'(\xi) - (\xi^2 + 1) I_1(\xi) = 0,$$

(2) $$\tfrac{1}{2}\xi\, K_1(\xi) = I_1(\xi),$$

(3) $$\xi\, M_1(\xi) = 4K_1'(\xi).$$

4,3. Lemme. *On a*

(1) $$K_1(0) = M_1(0) = 1,$$

(2) $$K_1'(0) = M_1'(0) = 0,$$

(3) $$\frac{K_1'(\xi)}{\xi} \to \frac{1}{4}, \quad \frac{M_1'(\xi)}{\xi} \to \frac{1}{6} \quad (\xi \to 0).$$

4,4. Lemme. *Pour tout $\xi \in R$,*

(1) $$|I_1(\xi)| \leqq e^{|\xi|}, \quad |K_1(\xi)| \leqq e^{|\xi|}, \quad |M_1(\xi)| \leqq e^{|\xi|},$$

(2) $$|K_1'(\xi)| \leqq |\xi|\, e^{|\xi|}, \quad |M_1'(\xi)| \leqq |\xi|\, e^{|\xi|}.$$

4,5. Lemme. *Pour tout $0 < \tau < t$ et $c > 0$*

(1) $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, \tau K_1(c\sqrt{(t^2 - \tau^2)}) = \frac{c^2}{4}\, \tau t\, M_1(c\sqrt{(t^2 - \tau^2)}).$$

Preuve. Nous avons d'après 4,2

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\tau\,K_1(c\,\sqrt{(t^2-\tau^2)}) = \frac{c\tau t}{\sqrt{(t^2-\tau^2)}}\,K_1'(c\,\sqrt{(t^2-\tau^2)}) = c^2\tau t\,\frac{K_1'(c\,\sqrt{(t^2-\tau^2)})}{c\,\sqrt{(t^2-\tau^2)}} =$$
$$= \tfrac{1}{4}c^2\tau t\,M_1(c\,\sqrt{(t^2-\tau^2)})\,.$$

4,6. Lemme. *Pour tout* $0 < \tau < t$ *et* $c > 0$

(1) $$\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\tau\,K_1(c\,\sqrt{(t^2-\tau^2)})\right| \leqq \frac{c^2}{4}\,\tau t e^{c\sqrt{(t^2-\tau^2)}}\,,$$

(2) $$\left|\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\,\tau\,K_1(c\,\sqrt{(t^2-\tau^2)})\right| \leqq \frac{c^2\tau}{4}\,(c^2t^2+1)\,e^{c\sqrt{(t^2-\tau^2)}}\,.$$

Preuve. Il suffit de se servir de 4,5 et 4,4.

4,7. Lemme. *Pour tout* $0 < \tau < t$ *et* $c > 0$

(1) $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\,\tau\,K_1(c\,\sqrt{(t^2-\tau^2)}) = K_1(c\,\sqrt{(t^2-\tau^2)}) - \frac{c^2}{4}\,\tau^2\,M_1(c\,\sqrt{(t^2-\tau^2)})\,.$$

Preuve. On utilise 4,2(3).

4,8. Lemme. *Pour tout* $0 < \tau < t$ *et* $c > 0$

(1) $$\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\,\tau\,K_1(c\,\sqrt{(t^2-\tau^2)})\right| \leqq \left(1+\frac{c^2\tau^2}{4}\right)e^{c\sqrt{(t^2-\tau^2)}}\,,$$

(2) $$\left|\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2}\,\tau\,K_1(c\,\sqrt{(t^2-\tau^2)})\right| \leqq \frac{c^2\tau}{4}\,(3+c^2\tau^2)\,e^{c\sqrt{(t^2-\tau^2)}}\,.$$

Preuve. On calcule directment les dérivées en question et on se sert de 4,4.

4,9. Lemme. *Pour tout* $0 < \tau < t$ *et* $c > 0$

(1) $$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\,\frac{\tau}{\sqrt{(t^2-\tau^2)}}\,I_1(c\,\sqrt{(t^2-\tau^2)}) =$$
$$= \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2}\,I_1(c\,\sqrt{(t^2-\tau^2)}) + c^2\,\frac{\tau}{\sqrt{(t^2-\tau^2)}}\,I_1(c\,\sqrt{(t^2-\tau^2)})\,,$$

(2) $$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\,\tau\,K_1(c\,\sqrt{(t^2-\tau^2)}) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2}\,\tau\,K_1(c\,\sqrt{(t^2-\tau^2)}) + c^2\tau\,K_1(c\,\sqrt{(t^2-\tau^2)})\,.$$

Preuve. L'identité (1) résulte aisément de 4,2(1) par un calcul direct, l'identité (2) est une conséquence de (1) et 4,2(2).

4,10. Proposition. *Soient $A \in \mathfrak{L}^+(E)$, $c > 0$ et $w \in R^+ \to E$. Si l'opérateur A est fermé et w est une propagation desinus de l'évolution hyperbolique pour A, alors la fonction*

$$[*] \qquad t \to v(t) = w(t) + c \int_0^t \frac{\tau}{\sqrt{(t^2 - \tau^2)}} I_1(c \sqrt{(t^2 - c^2)})\, w(\tau)\, \mathrm{d}\tau\,, \quad t \in R^+\,,$$

est une propagation desinus de l'évolution hyperbolique pour $A - c^2 I$ telle que

$$(1) \qquad v'(0_+) = w'(0_+)\,.$$

Preuve. Tout d'abord, il résulte de 4,2(2) que, pour tout $t \in R^+$,

$$(3) \qquad v(t) = w(t) + \frac{c^2}{2} \int_0^t \tau K_1(c \sqrt{(t^2 - \tau^2)})\, w(\tau)\, \mathrm{d}\tau\,.$$

En vertu de 4,2–4,5, nous sommes à même d'utiliser la propostion 1,7 et nous en déduisons, pour tout $a \geqq 0$

$$(4) \qquad \int_a^t \tau K_1(c \sqrt{(t^2 - \tau^2)})\, w(\tau)\, \mathrm{d}\tau$$

est deux fois dérivable sur (a, ∞),

$$(5) \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_a^t \tau K_1(c \sqrt{(t^2 - \tau^2)})\, w(\tau)\, \mathrm{d}\tau = \int_a^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} [\tau K_1(c \sqrt{(t^2 - \tau^2)})]\, w(\tau)\, \mathrm{d}\tau + t\, w(t) =$$

$$= \frac{c^2}{4} t \int_a^t \tau M_1(c \sqrt{(t^2 - \tau)})\, w(\tau)\, \mathrm{d}\tau + t\, w(t)\,,$$

$$(6) \qquad \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} \int_0^t \tau K_1(c \sqrt{(t^2 - \tau^2)})\, w(\tau)\, \mathrm{d}\tau =$$

$$= \int_a^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[\frac{c^2}{4} t\tau M_1(c \sqrt{(t^2 - \tau^2)}) \right] w(\tau)\, \mathrm{d}\tau + \frac{c^2}{4} t^2 w(t) + w(t) + t\, w'(t) =$$

$$= \int_a^t \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} [\tau K_1(c \sqrt{(t^2 - c^2)})]\, w(\tau)\, \mathrm{d}\tau + \frac{c^2}{4} t^2 w(t) + w(t) + t\, w'(t)$$

pour tout $t > a$.

Il s'ensuit de (4)–(6) et de 4,6 que

$$(7) \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_0^t \tau K_1(c \sqrt{(t^2 - \tau^2)})\, w(\tau)\, \mathrm{d}\tau \to 0\,, \quad (t \to 0_+)\,,$$

$$(8) \qquad \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} \int_0^t \tau K_1(c \sqrt{(t^2 - \tau^2)})\, w(\tau)\, \mathrm{d}\tau \to 0\,, \quad (t \to 0_+)\,,$$

$$(9)\quad \frac{d}{dt}\int_\alpha^t \tau\, K_1(c\sqrt{(t^2-\tau^2)})\, w(\tau)\, d\tau \to \frac{d}{dt}\int_0^t \tau\, K_1(c\sqrt{(t^2-\tau^2)})\, w(\tau)\, d\tau\,, \quad (0<\alpha<t,\ \alpha\to 0_+)\,,$$

$$(10)\quad \frac{d^2}{dt^2}\int_\alpha^t \tau\, K_1(c\sqrt{(t^2-\tau^2)})\, w(\tau)\, d\tau \to \frac{d^2}{dt^2}\int_0^t \tau\, K_1(c\sqrt{(t^2-\tau^2)})\, w(\tau)\, d\tau\,, \quad (0<\alpha<t,\ \alpha\to 0_+)$$

En outre, on obtient de (4), (6) et 4,9(2), pour tout $0 < \alpha < t$,

$$(11)\quad \frac{d^2}{dt^2}\int_\alpha^t \tau\, K_1(c\sqrt{(t^2-\tau^2)})\, w(\tau)\, d\tau = \int_\alpha^t \left[\frac{d^2}{d\tau^2}\tau\, K_1(c\sqrt{(t^2-\tau^2)})\right] w(\tau)\, d\tau +$$
$$+ c^2 \int_\alpha^t \tau\, K_1(c\sqrt{(t^2-\tau^2)})\, w(\tau)\, d\tau + \frac{c^2}{4}\, t^2\, w(t) + w(t) + t\, w'(t)\,.$$

Maintenant, en intégrant par parties, on obtient en vertu de 4,8, 4,7 et 4,3, pour tout $0 < \alpha < t$,

$$(12)\quad \int_\alpha^t \left[\frac{d^2}{d\tau^2}\tau\, K_1(c\sqrt{(t^2-\tau^2)})\right] w(\tau)\, d\tau =$$
$$= \int_\alpha^t \left[\frac{d}{d\tau} K_1(c\sqrt{(t^2-\tau^2)}) - \frac{c^2}{4}\frac{d}{d\tau}\tau^2 M_1(c\sqrt{(t^2-\tau^2)})\right] w(\tau)\, d\tau =$$
$$= -\int_\alpha^t \left[K_1(c\sqrt{(t^2-\tau^2)}) - \frac{c^2}{4}\tau^2 M_1(c\sqrt{(t^2-\tau^2)})\right] w'(\tau)\, d\tau + w(t) -$$
$$- \frac{c^2}{4}\, t^2\, w(t) - K_1(c\sqrt{(t^2-\alpha^2)})\, w(\alpha) + \frac{c^2}{4}\alpha^2 M_1(c\sqrt{(t^2-\alpha^2)})\, w(\alpha) =$$
$$= -\int_\alpha^t \left[\frac{d}{d\tau}\tau\, K_1(c\sqrt{(t^2-\tau^2)})\right] w'(\tau)\, d\tau + w(t) - \frac{c^2}{4}\, t^2\, w(t) -$$
$$- K_1(c\sqrt{(t^2-\alpha^2)})\, w(\alpha) + \frac{c^2}{4}\alpha^2 M_1(c\sqrt{(t^2-\alpha^2)})\, w(\alpha) =$$
$$= \int_\alpha^t \tau\, K_1(c\sqrt{(t^2-\tau^2)})\, w''(\tau)\, d\tau - t\, w'(t) + \alpha\, K_1(c\sqrt{(t^2-\alpha^2)})\, w'(\alpha) +$$
$$+ w(t) - \frac{c^2}{4}\, t^2\, w(t) - K_1(c\sqrt{(t^2-\alpha^2)})\, w(\alpha) + \frac{c^2}{4}\alpha^2 M_1(c\sqrt{(t^2-\alpha^2)})\, w(\alpha)\,.$$

Nous savons que, cfr. 2,4 et 1,5,

(13) w'' est intégrable sur tout intervalle (a, b), $0 < a < b$,

(14) $w''(t) = -A\, w(t)$ pour tout $t \in R^+$.

Rappelons encore que l'opérateur A est supposé fermé. Il résulte donc de (13) et (14) à l'aide de 1,8 que, pour tout $0 < \alpha < t$,

$$(15) \qquad \int_\alpha^t \tau\, K_1(c\,\sqrt{(t^2 - \tau^2)})\, w(\tau)\, d\tau \in \mathfrak{D}(A)\,,$$

$$(16) \qquad A \int_\alpha^t \tau\, K_1(c\,\sqrt{(t^2 - \tau^2)})\, w(\tau)\, d\tau = \int_\alpha^t \tau\, K_1(c\,\sqrt{(t^2 - \tau^2)})\, A\, w(\tau)\, d\tau\,.$$

Il résulte de (11), (12), (14) et (16) que, pour tout $0 < \alpha < t$,

$$(17) \quad \frac{d^2}{dt^2} \int_\alpha^t \tau\, K_1(c\,\sqrt{(t^2 - \tau^2)})\, w(\tau)\, d\tau =$$

$$= A \int_\alpha^t \tau\, K_1(c\,\sqrt{(t^2 - \tau^2)})\, w(\tau)\, d\tau + c^2 \int_\alpha^t \tau\, K_1(c\,\sqrt{(t^2 - \tau^2)})\, w(\tau)\, d\tau + 2w(t) +$$

$$+ \alpha\, K_1(c\,\sqrt{(t^2 - \alpha^2)})\, w'(\alpha) - K_1(c\,\sqrt{(t^2 - \alpha^2)})\, w(\alpha) +$$

$$+ \frac{c^2}{4}\, \alpha^2\, M_1(c\,\sqrt{(t^2 - \tau^2)})\, w(\alpha)\,.$$

Si l'on fait tendre $\alpha \to 0_+$ dans (10) et (17), on en obtient à l'aide de 4,3 pour tout $t \in R^+$:

$$(18) \quad \int_0^t \tau\, K_1(c\,\sqrt{(t^2 - \tau^2)})\, w(\tau)\, d\tau \in \mathfrak{D}(A)\,,$$

$$(19) \quad \frac{d^2}{dt^2} \int_0^t \tau\, K_1(c\,\sqrt{(t^2 - \tau^2)})\, w(\tau)\, d\tau =$$

$$= -A \int_0^t \tau\, K_1(c\,\sqrt{(t^2 - \tau^2)})\, w(\tau)\, d\tau + c^2 \int_0^t \tau\, K_1(c\,\sqrt{(t^2 - \tau^2)})\, w(\tau)\, d\tau + 2w(t)\,.$$

Maintenant, nous sommes à même d'achever la preuve.

Il résulte de (3) et (7) que

$$(20) \qquad v(0_+) = 0\,, \quad v'(0_+) = w'(0_+)\,,$$

En outre, d'après (3) et (4):

(21) v est deux fois dérivable sur R^+,

d'après (3) et (18):

(22) $v(t) \in \mathfrak{D}(A)$ pour tout $t \in R^+$

et d'après (3) et (19):

(23) $v''(t) + A\, v(t) - c^2\, v(t) = 0$ pour tout $t \in R^+$.

Alors, (20)–(23) impliquent l'énoncé de la proposition.

4,11. Ecrivons pour $\xi \in R$

$$I_0(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\xi^{2k}}{2^{2k}(k!)^2}. \tag{1}$$

4,12. Lemme. *On a* $I_0(0) = 1$.

4,13. Lemme. *La fonction* I_0 *est indéfiniment dérivable sur* R *et*

$$I_0' = I_1 . \tag{1}$$

4,14. Lemme. *Pour tout* $\xi \in R^+$,

$$|I_0(\xi)| \leqq e^{|\xi|} . \tag{1}$$

4,15. Proposition. *Soient* $A \in \mathfrak{L}^+(E)$, $c > 0$ *et* $w \in R^+ \to E$. *Si l'opérateur* A *est fermé et* w *est une propagation cosinus de l'évolution hyperbolique pour* A, *alors la fonction*

$$t \to v(t) = \int_0^t I_0(c\sqrt{(t^2 - \tau^2)})\, w(\tau)\, \mathrm{d}\tau , \quad t \in R^+ , \tag{*}$$

est une propagation desinus de l'évolution hyperbolique pour $A - c^2 I$ *telle que*

$$v'(0_+) = w(0_+) . \tag{1}$$

Preuve. Soit, pour $t \in R^+$,

$$v(t) = \int_0^t w(\sigma)\, \mathrm{d}\sigma + c \int_0^t \frac{\tau}{\sqrt{(t^2 - \tau^2)}} I_1(c\sqrt{(t^2 - \tau^2)}) \int_0^\tau w(\sigma)\, \mathrm{d}\sigma\, \mathrm{d}\tau . \tag{**}$$

Il résulte de 4,10 et 2,7 que v est une propagation desinus de l'évolution hyperbolique pour $A - c^2 I$ telle que $v'(0_+) = w(0)$.

La formule [*] s'obtient de [**] par intégration par parties en vertu de 4,12–4,14.

4,16. Proposition. *Soient* $A \in \mathfrak{L}^+(E)$, $c > 0$ *et* $w \in R^+ \to E$. *Si l'opérateur* A *est fermé et* w *est une propagation cosinus de l'évolution hyperbolique pour* A, *alors la fonction*

$$t \to u(t) = w(t) + ct \int_0^t \frac{1}{\sqrt{(t^2 - \tau^2)}} I_1(c\sqrt{(t^2 - \tau^2)})\, w(\tau)\, \mathrm{d}\tau , \quad t \in R^+ , \tag{*}$$

est une propagation cosinus de l'évolution hyperbolique pour $A - c^2 I$ telle que

(1) $$u(0_+) = w(0_+) .$$

Preuve. Ecrivons, pour $t \in R^+$,

(2) $$v(t) = \int_0^t I_0(c\sqrt{(t^2 - \tau^2)})\, w(\tau)\, d\tau .$$

D'après 4,15

(3) v est une propagation desinus pour $A - c^2 I$ telle que

(4) $$v'(0_+) = w(0_+) .$$

Nous allons démontrer que

(5) v est trois fois dérivable sur R^+,

(6) $$v''(0_+) = 0 .$$

Il résulte de 1,7 à l'aide 4,12–4,14 et 4,2–4,4 que (5) est valable et que:

(7) $$v'(t) = ct \int_0^t \frac{I_0'(c\sqrt{(t^2 - \tau^2)})}{\sqrt{(t^2 - \tau^2)}}\, w(\tau)\, d\tau + w(t) = \frac{c^2}{2}\, t \int_0^t K_1(c\sqrt{(t^2 - \tau^2)})\, w(\tau)\, d\tau + w(t) ,$$

(8) $$v''(t) = \frac{c^2}{2} \int_0^t K_1(c\sqrt{(t^2 - \tau^2)})\, w(\tau)\, d\tau + \frac{c^3}{2}\, t^2 \int_0^t \frac{K_1'(c\sqrt{(t^2 - \tau^2)})}{\sqrt{(t^2 - \tau^2)}}\, w(\tau)\, d\tau + \frac{c^2}{2}\, t\, w(t) + w'(t) =$$
$$= \frac{c^2}{2} \int_0^t K_1(c\sqrt{(t^2 - \tau^2)})\, w(\tau)\, d\tau + \frac{c^4}{8}\, t^2 \int_0^t M_1(c\sqrt{(t^2 - \tau^2)})\, w(\tau)\, d\tau + \frac{c^2}{2}\, t\, w(t) + w'(t)$$

pour tout $t \in R^+$,

(9) $$w'''(t) = \frac{c^3}{2}\, t \int_0^t \frac{K_1'(c\sqrt{(t^2 - \tau^2)})}{\sqrt{(t^2 - \tau^2)}}\, w(\tau)\, d\tau + \frac{c^2}{2}\, w(t) + \frac{c^4}{4}\, t \int_0^t M_1(c\sqrt{(t^2 - \tau^2)})\, w(\tau)\, d\tau + \frac{c^6}{8}\, t^2 \int_0^t \frac{M_1'(c\sqrt{(t^2 - \tau^2)})}{c\sqrt{(t^2 - \tau^2)}}\, w(\tau)\, d\tau + \frac{c^4}{8}\, t^2\, w(t) + \frac{c^2}{2}\, w(t) + \frac{c^2}{2}\, t\, w'(t) + w''(t)$$

pour tout $t \in R^+$.

Il est clair que (7)–(9) impliquent (6) en vertu de 4,2–4,4.

Nous avons d'après (3):

(10) $$v(t) \in \mathfrak{D}(A) \quad \text{pour tout} \quad t \in R^+ ,$$

(11) $$v''(t) + A\, v(t) - c^2\, v(t) = 0 \quad \text{pour tout} \quad t \in R^+ .$$

Alors on obtient aisément de (10), (11), (5) et de 1,9, vu que A est fermé,

(12) $$v'(t) \in \mathfrak{D}(A) \quad \text{pour tout} \quad t \in R^+ ,$$

(13) $$v'''(t) + A\, v'(t) + c^2\, v'(t) = 0 \quad \text{pour tout} \quad t \in R^+ .$$

En outre, on voit de (7) que

(14) $$v' = u .$$

Ceci étant, notre énoncé s'ensuit de (14), (12), (13) et (4), (6).

4,17. Ecrivons pour $\xi \in R^+$:

(1) $$J_1(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\, \xi^{2k+1}}{2^{2k+1} k!\,(k+1)!} ,$$

(2) $$L_1(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\, \xi^{2k}}{2^{2k} k!\,(k+1)} ,$$

(3) $$N_1(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\, \xi^{2k}}{2^{2k} (k+1)!\,(k+2)!} .$$

4,18–4,24. Lemmes. *Ces lemmes sont des parallèles des lemmes* 4,2–4,8 *si l'on y remplace* I_1, K_1, M_1 *par* J_1, L_1, N_1 *resp., avec certains changements des signes. Leur formulation précise et leur vérification sera laissée au lecteur.*

4,25. Lemme *analogue à* 4,9, *où l'on écrit* J_1, L_1 *au lieu de* I_1, K_1 *et* $-c^2$ *au lieu de* $+c^2$.

Remarque. On peut trouver des estimations plus fines pour la croissance des fonctions J_1, L_1, N_1 que celles des lemmes 4,4, 4,6 et 4,8.

4,26. Proposition. *Soient* $A \in \mathfrak{L}^+(E)$, $c > 0$ *et* $w \in R^+ \to E$. *Si l'opérateur* A *est fermé et* w *est une propagation desinus de l'évolution hyperbolique pour* A, *alors la fonction*

[*] $$t \to v(t) = w(t) - c \int_0^t \frac{\tau}{\sqrt{(t^2 - \tau^2)}}\, J_1(c\, \sqrt{(t^2 - \tau^2)})\, w(\tau)\, \mathrm{d}\tau , \quad t \in R^+ ,$$

est une propagation desinus de l'évolution hyperbolique pour $A + c^2 I$ telle que

(1) $$v'(0_+) = w'(0_+) .$$

4,27. Ecrivons pour $\xi \in R$

(1) $$J_0(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \xi^{2k}}{2^{2k}(k!)^2} .$$

4,28.—4,30. Lemmes *analogues à* 4,12—4,14.

4,31. Proposition. *Soient $A \in \mathfrak{L}^+(E)$, $c > 0$ et $w \in R^+ \to E$. Si l'opérateur A est fermé et w est une propagation cosinus de l'évolution hyperbololique pour A, alors la fonction*

[*] $$t \to v(t) = \int_0^t J_0(c \sqrt{(t^2 - \tau^2)})\, w(\tau)\, \mathrm{d}\tau , \quad t \in R^+ ,$$

est une propagation desinus de l'évolution hyperbolique pour $A + c^2 I$ telle que

(1) $$v'(0_+) = w(0_+) .$$

4,32. Proposition. *Soient $A \in \mathfrak{L}^+(E)$, $c > 0$ et $w \in R^+ \to E$. Si l'opérateur A est fermé et w est une propagation cosinus de l'évolution hyperbolique pour A, alors la fonction*

[*] $$t \to u(t) = w(t) - ct \int_0^t \frac{1}{\sqrt{(t^2 - \tau^2)}}\, J_1(c \sqrt{(t^2 - \tau^2)})\, w(\tau)\, \mathrm{d}\tau , \quad t \in R^+ ,$$

est une propagation cosinus de l'évolution hyperbolique pour $A + c^2 I$ telle que

(1) $$u(0_+) = w(0_+) .$$

Les preuves des propositions 4,26, 4,31 et 4,32 peuvent être construites à l'instar des preuves de 4,10, 4,14 et 4,15 sous l'usage des lemmes 4,18—4,25 et 4,28—4,30.

4,33. Lemme. *Soit $\varphi \in R^+ \to R$. Si la fonction φ est non-négative, continue sur R^+, intégrable sur $(0, 1)$ et qu'il existe deux constantes non-négatives K, $\varkappa$ telles que, quel que soit $t \in R^+$,*

(1) $$\varphi(t) \leqq K e^{\varkappa t} \int_0^t \varphi(\tau)\, \mathrm{d}\tau ,$$

alors $\varphi(t) = 0$ pour tout $t \in R^+$.

Preuve. Il résulte de (1) que, pour tout $t \in R^+$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} K e^{\varkappa t} \int_0^t \varphi(\tau)\, \mathrm{d}\tau = K \varkappa e^{\varkappa t} \int_0^t \varphi(\tau)\, \mathrm{d}\tau + K e^{\varkappa t} \varphi(t) \leqq (\varkappa + K e^{\varkappa t}) K e^{\varkappa t} \int_0^t \varphi(\tau)\, \mathrm{d}\tau$$

ce qui implique, quel que soit $\varepsilon > 0$,

(2) $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} K e^{\varkappa t} \int_0^t \varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau \leqq (\varkappa + K e^{\varkappa t}) \left(\varepsilon + K e^{\varkappa t} \int_0^t \varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)$$

On trouve aisément de (2) que, pour tout $t \in R^+$ et $\varepsilon > 0$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\lg\left(\varepsilon + K e^{\varkappa t} \int_0^t \varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)\right] \leqq \varkappa + K e^{\varkappa t}$$

ce qui entraîne

$$\lg\left(\varepsilon + K e^{\varkappa t} \int_0^t \varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right) - \lg \varepsilon \leqq \varkappa t + K \int_0^t e^{\varkappa \tau}\,\mathrm{d}\tau\,,$$

d'où

(3) $$\varepsilon + K e^{\varkappa t} \int_0^t \varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau \leqq \varepsilon \exp\left[\varkappa t + K \int_0^t e^{\varkappa \tau}\,\mathrm{d}\tau\right].$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on obtient de (3) pour tout $t \in R^+$

$$K e^{\varkappa t} \int_0^t \varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau \leqq 0$$

d'où, en vertu de (1),

$$\varphi(t) \leqq 0$$

ce qui, vu la non-négativité de φ implique notre énoncé.

4,34. Théorème de l'exactitude. *Soient $A \in \mathfrak{L}^+(E)$ et $c > 0$. Si l'opérateur A est fermé et hyperboliquement exact, alors les opérateurs $A - c^2 I$ et $A + c^2 I$ sont aussi hyperboliquement exacts.*

Preuve. Considérons d'abord l'opérateur $A + c^2 I$.

Soit donc w une déviation de l'évolution hyperbolique pour $A + c^2 I$.

Posons maintenant pour $t \in R^+$

(1) $$v(t) = \int_0^t I_0(c\sqrt{(t^2 - \tau^2)})\, w(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,.$$

Il résulte sans peine de 3,15 que v est une déviation de l'évolution hyperbolique pour A ce qui entraîne, compte tenu du fait que A est exact, pour tout $t \in R^+$,

(2) $$\int_0^t I_0(c\sqrt{(t^2 - \tau^2)})\, w(\tau)\,\mathrm{d}\tau = 0\,.$$

Il résulte de 4,2–4,4 et de 4,12–4,14 que 1,7 est applicable à (2). On en obtient sans peine que, pour tout $t \in R^+$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^t I_0(c\sqrt{(t^2-\tau^2)})\, w(\tau)\,\mathrm{d}\tau =$$

$$= ct\int_0^t \frac{1}{\sqrt{(t^2-\tau^2)}} I_1(c\sqrt{(t^2-\tau^2)})\, w(\tau)\,\mathrm{d}\tau + w(t) =$$

$$= \frac{c^2}{2}\, t\int_0^t K_1(c\sqrt{(t^2-\tau^2)})\, w(\tau)\,\mathrm{d}\tau + w(t) = 0$$

d'où en vertu de 4,4

$$\|w(t)\| \leqq \frac{c^2}{2}\, t \left\|\int_0^t K_1(c\sqrt{(t^2-\tau^2)})\, w(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right\| \leqq \frac{c^2}{2}\, te^{ct}\int_0^t \|w(\tau)\|\,\mathrm{d}\tau \leqq$$

$$\leqq \frac{c^2}{2}\, e^{(c+1)t}\int_0^t \|w(\tau)\|\,\mathrm{d}\tau$$

ce qui entraîne, à l'aide du lemme 4,33, que $\|w(t)\| = 0$ pour tout $t \in R^+$.

La preuve du premier cas est donc complète.

Pour l'opérateur $A - c^2I$, on remplace I_0 par J_0 dans (1) et en utilisant un raisonnement analogue à celui de ci-dessus, on se sert de la propostion 4,31 au lieu de 4,15 et des lemmes correspondants pour J_0, J_1, L_1.

4,35. Théorème de la correction. *Soit $A \in \mathfrak{L}^+(E)$ et $c > 0$. Si l'opérateur A est fermé et cosinus [desinus] correct, alors les opérateurs $A + c^2I$ et $A - c^2I$ sont aussi cosinus [desinus] corrects.*

Preuve. La correction cosinus [desinus] de $A - c^2I$ résulte sans peine de la proposition 4,16 [4,10] et du lemme 4,4. Dans le cas de $A + c^2I$, on se sert de 4,32 [4,26] et du lemme 4,20.

5. EXEMPLES

5,1. Soit $C(R) = C(R^1)$ l'espace des fonctions bornées et uniformément continues $x \in R \to R$ avec la norme $\|x\| = \sup_{\xi \in R} |x(\xi)|$.

Définissons l'opérateur $\Delta_1 \in \mathfrak{L}^+(C(R))$ comme suit: $x \in \mathfrak{D}(\Delta_1)$ si et seulement si $x \in C(R)$ et la seconde dérivée D^2 au sens des distributions appartient aussi à $C(R)$, puis on pose $\Delta_1 x = D^2 x$.

On vérifie aisément que

(1) Δ_1 *est fermé.*

Maintenant, soit $x \in \mathfrak{D}(\Delta_1)$ et posons pour $t \in R^+$, $\xi \in R$

(2) $$w(t)(\xi) = \tfrac{1}{2}[x(\xi + t) + x(\xi - t)] .$$

Il est manifeste que

(3) *w est une propagation cosinus de l'évolution hyperbolique pour $-\Delta_1$ telle que $w(0_+) = x$.*

Soit $c > 0$.

Définissons maintenant pour $x \in \mathfrak{D}(\Delta_1)$, $t \in R^+$, $\xi \in R$

(4) $$u(t)(\xi) = \tfrac{1}{2}[x(\xi + t) + x(\xi - t)] + \frac{c}{2}\, t \int_{\xi - t}^{\xi + t} \frac{I_1(c\sqrt{(t^2 - (\xi - \eta)^2)})}{\sqrt{(t^2 - (\xi - \eta)^2)}}\, x(\eta)\, \mathrm{d}\eta$$

(5) $$v(t)(\xi) = \frac{1}{2} \int_{\xi - t}^{\xi + t} I_0(c\sqrt{(t^2 - (\xi - \eta)^2)})\, x(\eta)\, \mathrm{d}\eta .$$

En vertu de (2), on peur écrire (4) et (5) sous la forme:

(6) $$u(t)(\xi) = w(t)(\xi) + ct \int_0^t \frac{I_1(c\sqrt{(t^2 - \tau^2)})}{\sqrt{(t^2 - \tau^2)}}\, w(\tau)(\xi)\, \mathrm{d}\tau ,$$

(7) $$v(t)(\xi) = \int_0^t I_0(c\sqrt{(t^2 - \tau^2)})\, w(\tau)(\xi)\, \mathrm{d}\tau ,$$

ou sous la forme équivalente:

(8) $$u(t) = w(t) + ct \int_0^t \frac{I_1(c\sqrt{(t^2 - \tau^2)})}{\sqrt{(t^2 - \tau^2)}}\, w(\tau)\, \mathrm{d}\tau ,$$

(9) $$v(t) = \int_0^t I_0(c\sqrt{(t^2 - \tau^2)})\, w(\tau)\, \mathrm{d}\tau .$$

Les formules (6), (7) se vérifient par substitutions simples.

Donc, les propositions 4,16 et 4,15 impliquent, en vertu de (1), (3), (8) et (9) que

(10) *u [v] est une propagation cosinus [desinus] de l'évolution hyperbolique pour $-\Delta_1 - c^2 I$ telle que $u(0+) = x$ [$v'(0_+) = x$].*

Il est simple de démontrer que

(11) l'opérateur $-\Delta_1$ est hyperboliquement cosinus correct.

Par conséquent, le théorème 4,35 entraîne que

(12) *l'opérateur $-\Delta_1 - c^2 I$ est aussi hyperboliquement cosinus correct.*

Les résultats analogues s'obtienent aussi pour l'opérateur $-\Delta_1 + c^2 I$.

5,2. Soit $C(R^3)$ l'espace des fonctions bornées et uniformément continues $x \in R^3 \to R$, avec la norme $\|x\| = \sup_{\xi \in R^3} |x(\xi)|$.

Définissons l' opérateur $\Delta_3 \in \mathfrak{L}^+(C(R^3))$ comme suit: $x \in \mathfrak{D}(\Delta_3)$ si et seulement si $x \in C(R^3)$ et la distribution $D_1^2 x + D_2^2 x + D_3^2 x$ appartient à $C(R^3)$; puis on pose $\Delta_3 x = D_1^2 x + D_2^2 x + D_3^2 x$.

On vérifie aisément que

(1) *Δ_3 est fermé.*

Maintenant, soit $x \in \mathfrak{D}(\Delta_3)$ et posons pour et $t \in R^+$ et $\xi \in R^3$

(2) $$w(t)(\xi) = \frac{t}{4\pi} \iint_{\|\sigma\| = 1} x(\xi + t\sigma) \, \mathrm{d}\sigma .$$

C'est le fait classique que

(3) *w est une propagation desinus de l'évolution hyperbolique pour $-\Delta_3$ telle que $w'(0_+) = x$.*

Soit $c > 0$.

Définissons maintenant pour $x \in \mathfrak{D}(\Delta_3)$, $t \in R^+$ et $\xi \in R^3$

(4) $$v(t)(\xi) = \frac{t}{4\pi} \iint_{\|\sigma\| = 1} x(\xi + t\sigma) \, \mathrm{d}\sigma + \frac{3c}{4\pi t^2} \iiint_{\|\xi - \eta\| \leqq t} \frac{\|\xi - \eta\|^2}{\sqrt{(t^2 - \|\xi - \eta\|^2)}} I_1(c \sqrt{(t^2 - \|\xi - \eta\|^2)}) \, x(\eta) \, \mathrm{d}\eta .$$

En vertu de (2), on peut écrire (4) sous la forme:

(5) $$v(t)(\xi) = w(t)(\xi) + c \int_0^t \frac{\tau}{\sqrt{(t^2 - \tau^2)}} I_1(c \sqrt{(t^2 - \tau^2)}) \, w(\tau)(\xi) \, \mathrm{d}\tau$$

ou sous la forme équivalente:

(6) $$v(t) = w(t) + c \int_0^t \frac{\tau}{\sqrt{(t^2 - \tau^2)}} I_1(c \sqrt{(t^2 - \tau^2)}) \, w(\tau) \, \mathrm{d}\tau .$$

Pour vérifier (5), rappelons d'abord que, quel que soit $\varphi \in C(R^3)$ et $r \in R^+$

$$\iiint_{\|\eta\| \leqq r} \varphi(\eta) \, \mathrm{d}\eta = \frac{r^2}{3} \int_0^r \iint_{\|\sigma\| = 1} \varphi(\tau\sigma) \, \mathrm{d}\sigma \, \mathrm{d}\tau .$$

En vertu de cette formule, nous obtenons pour $t \in R^+$:

$$\int_0^t \frac{\tau}{\sqrt{(t^2 - \tau^2)}} I_1(c\sqrt{(t^2 - \tau^2)})\, w(\tau)(\xi)\, d\tau =$$

$$= \int_0^t \frac{\tau}{\sqrt{(t^2 - \tau^2)}} I_1(c\sqrt{(t^2 - \tau^2)}) \frac{\tau}{4\pi} \iint_{\|\sigma\| = 1} x(\xi + \tau\sigma)\, d\sigma\, d\tau =$$

$$= \frac{3}{4\pi t^2} \iiint_{\|\eta - \xi\| \leqq t} \frac{\|\eta - \xi\|^2}{\sqrt{(t^2 - \|\eta - \xi\|^2)}} I_1(c\sqrt{(t^2 - \|\eta - \xi\|^2)})\, x(\eta)\, d\eta$$

car $\tau = \|(\xi + \tau\sigma) - \xi\| = \|\eta - \xi\|$.

Donc, la proposition 4,10 implique en vertu de (1), (3) et (6) que

(7) *v est une propagation desinus de l'évolution hyperbolique pour $-\Delta_3 - c^2 I$ telle que $v'(0_+) = x$.*

Il est possible de démontrer que

(8) l'opérateur $-\Delta_3$ est hyperboliquement desinus correct.

Par conséquent, le théorème 4,35 implique que

(9) *l'opérateur $-\Delta_3 - c^2 I$ est aussi hyperboliquement desinus correct.*

Les résultats analogues s'obtiennent aussi pour l'opérateur $-\Delta_3 + c^2 I$.

Remarque. Les formules 5,1(4), (5) et 5,2(4) sont classiques. On les déduit par diverses méthodes. Dans [2], on utilise systématiquement la méthode, „de descente“ (§ 185 et 188), dans [3] en outre la méthode de l'intégrale de Fourier. Dans le présent article, ce sont des conséquences simples des formules abstraites générales cfr. 4,16 [*], 4,15 [*] et 4,10 [*].

Travaux cités

[1] *E. Hille, R. S. Phillips:* Functional Analysis and Semigroups, Providence 1957.

[2] *В. И. Смирнов:* Курс высшей математики, Том II, Москва 1948.

[3] *Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов:* Сборник задач по математической физике, Москва 1956.

Adresse de l'auteur: Praha 1, Žitná 25 (Matematický ústav ČSAV v Praze).