

Ladislav Drs

Parallele Axonometrie und Einschneideverfahren

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 97 (1972), No. 1, 55--64

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/117749>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1972

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

PARALLELE AXONOMETRIE UND EINSCHNEIDEVERFAHREN

LADISLAV DRS, Praha

(Eingelangt am 15. April 1970)

EINFÜHRUNG

Im Jahre 1937 hat L. ECKHART eine der elegantesten Methoden der darstellenden Geometrie, *das Einschneideverfahren*, eingeführt [1]. Die Modifikation des Einschneideprinzips an die parallele Axonometrie findet seitdem in jedem Buch über die darstellende Geometrie Platz. Eine parallele Axonometrie \mathbf{G}' eines Gebildes \mathbf{G} kann man entweder als eine parallele Projektion von \mathbf{G} erhalten, oder durch ein Einschneideverfahren aus zwei affinen Bildern $\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2$ von \mathbf{G} . Hier wollen wir an die Zusammenhänge zwischen einem orthonormierten Dreibein \mathbf{G} und seinen Einschneiderissen $\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2$ hinweisen, welche dieselbe Axonometrie sowie durch das Projizieren von \mathbf{G} als auch durch das Einschneiden von \mathbf{G}_1 und \mathbf{G}_2 bestimmen.

1

In einer Ebene π seien zwei affine Bilder $\mathbf{G}_1(A_1, \dots), \mathbf{G}_2(A_2, \dots)$ eines Dinggebildes $\mathbf{G}(A, \dots)$, das die Punkte A, \dots enthält, und weiter zwei verschiedene Richtungen s_1, s_2 gegeben. Wenn wir die Punkte A', \dots aus den Paaren A_1, A_2, \dots durch das Einschneideverfahren bestimmen (als Schnittpunkte der Geraden $a_1, a_2; \dots, A_1 \in a_1 \parallel s_1, A_2 \in a_2 \parallel s_2; \dots$), so ist das Bildgebilde $\mathbf{G}'(A', \dots)$ wieder ein affines Bild von $\mathbf{G}(A, \dots)$. Dieser Grundsatz aus [1] kann für die Konstruktion der parallelen Axonometrie aus zwei Normalrissen benutzt werden (Abb. 1): In der Bildebene π seien zwei Risse $(O_1X_1Y_1Z_1)$ und $(O_2X_2Y_2Z_2)$ des orthonormierten Dreibeins $(OXYZ)$ in der Richtung $z = OZ$ und $y = OY$ gegeben, in beliebiger Lage und in dem gleichen Massstab, so dass $\overline{O_1X_1} = \overline{O_1Y_1} = \overline{O_2Z_2} = \overline{O_2X_2} = R, O_1X_1 \perp O_1Y_1, O_2X_2 \perp O_2Z_2$ ist. Weiter seien zwei verschiedene Richtungen $s_1, s_2, O_1 \in s_1 \neq y_1, O_2 \in s_2 \neq z_2$, für welche zugleich nicht $s_1 = x_1 = O_1X_1, s_2 = x_2 = O_2X_2$ gilt, gegeben. Die durch das Einschneideverfahren bestimmten Punkte O', X', Y', Z' bilden das axonometrische Achsen-

kreuz mit den Achsen $x' = O'X'$, $y' = O'Y'$, $z' = O'Z'$ und mit den Einheitspunkten X' , Y' , Z' . Wenn zugleich ein Gebilde $G(A, \dots)$ in die Einschneiderisse $G_1(A_1, \dots)$, $G_2(A_2, \dots)$ abgebildet ist, dann bestimmt das Einschneideverfahren aus G_1 , G_2 seine Axonometrie, mit anderen Worten eine parallele Projektion von einem Gebilde

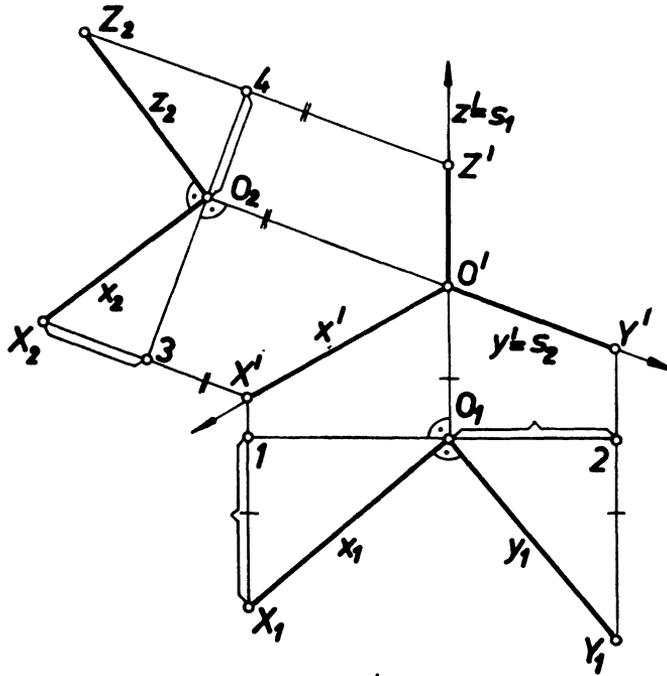


Abb. 1

$\bar{G}(\bar{A}, \dots)$, das dem Gebilde $G(A, \dots)$ ähnlich ist. Dieses spezielle Einschneideverfahren bezeichnen wir kurz als *das s-Verfahren*.

Wenn wir die Einschneiderichtungen s_1, s_2 in gleichem Sinne wie die Achsen z', y' orientieren und $I = \sphericalangle y_1 s_1 = \sphericalangle y_1 z_1'$, $II = \sphericalangle s_2 z_2 = \sphericalangle y' z_2'$, $\alpha = \sphericalangle y' z' = \sphericalangle s_1 s_2$ bezeichnen, so gilt entweder $0^\circ < \alpha, I, II < 180^\circ$ oder $180^\circ < \alpha, I, II < 360^\circ$. Weiter kann nicht zugleich $\cos I = \cos II = 0$ sein. Durch R, α, I, II ist das s-Verfahren bestimmt und wir können die axonometrischen Einheiten $a = O'X'$, $b = O'Y'$, $c = O'Z'$ und die Winkel $\beta = \sphericalangle z'x'$, $\gamma = \sphericalangle x'y'$ als Funktionen von R, I, II, α ausdrücken:

$$(1) \quad b = R \sin I : \sin \alpha, \quad c = R \sin II : \sin \alpha,$$

$$a = \pm R o : \sin \alpha, \quad o = \sqrt{(\cos^2 I + \cos^2 II + 2 \cos I \cos II \cos \alpha)}$$

$$(2) \quad \sin \beta = \pm \sin \alpha \cos I : o, \quad \sin \gamma = \pm \sin \alpha \cos II : o,$$

mit dem oberen (unteren) Vorzeichen für $\alpha, I, II > 180^\circ (< 180^\circ)$. Die Grösse o ist

die dritte Seite des „charakteristischen Dreieckes“, dessen zwei andere Seiten die Länge $\cos I$, $\cos II$ haben und den Winkel $\bar{\alpha} = 180^\circ - \alpha$ einschliessen.

Nach dem *Pohlke'schen Satz* ist die Existenz einer Richtung s und eines orthonormierten Dreibeins ($OXYZ$) so gesichert, dass seine Projektion in der Richtung s in π mit ($O'X'Y'Z'$) übereinstimmt. Für diese „Rekonstruktion aus der Axonometrie“ ist der konstruktive Weg üblich. Die analytische Rekonstruktion kommt nur ausnahmsweise vor [4]. Die erste analytische Rekonstruktion (mit einem Fehler, den E. WENDLING [5] verbessert hat) stammt von H. KINKELIN [2] ab. Durch die Gleichungen

$$(3) \quad r^2 = \frac{1}{2}(A - \sqrt{(A^2 - 4B^2)}),$$

$$(4) \quad \cos \varphi = r^2 \cdot B^{-1},$$

$$(5) \quad \cos \sigma_1 = bc \sin \alpha \cdot B^{-1},$$

$$(6) \quad \cos v_1 = \cos \varphi (r \cos \sigma_1 - \sqrt{(a^2 - r^2 \sin^2 \sigma_1)}) \cdot r^{-1},$$

in welchen $\varphi = \sphericalangle ns$, ($n \perp \pi$), $\sigma_1 = \sphericalangle sx$, $v_1 = \sphericalangle nx$ bedeutet und $A = a^2 + b^2 + c^2$, $B^2 = (ab \sin \gamma)^2 + (ac \sin \beta)^2 + (bc \sin \alpha)^2$ gesetzt ist, ist die Einheit $r = \overline{OX}$, die Richtung s und die Achse $x = OX$ des Dreibeins ($OXYZ$) mit $O = O'$ bestimmt. Zu (5) und (6) ganz analoge Gleichungen für $\sigma_2 = \sphericalangle sy$, $\sigma_3 = \sphericalangle sz$, $v_2 = \sphericalangle ny$, $v_3 = \sphericalangle nz$ bestimmen die weiteren Achsen y , z ([5], 77, 78).

Durch das Einsetzen von (1) und (2) in diese Gleichungen ist nun auch die analytische Rekonstruktion direkt aus dem Einschneideverfahren möglich.

So erhalten wir, wenn wir noch zur Abkürzung $\cos I \cos II = \cos \psi$ setzen:

$$(7) \quad r^2 = R^2(1 \mp \cos \psi) \cdot (1 \pm \cos \alpha)^{-1},$$

$$(8) \quad \cos \varphi = (1 \mp \cos \psi) (1 \mp \cos \alpha) \cdot ((1 \pm \cos \psi) (1 \pm \cos \alpha))^{-1/2},$$

$$(9) \quad \cos \sigma_1 = \sin I \sin II : \sin \psi,$$

$$\cos \sigma_2 = -\cos I \sin II : \sin \psi,$$

$$\cos \sigma_3 = \mp \sin I \cos II : \sin \psi,$$

$$(10) \quad \begin{aligned} \cos v_1 &= [\sin I \sin II \cdot \sqrt{(1 \mp \cos \alpha)} - (\cos I \pm \cos II) \cdot \\ &\quad \cdot \sqrt{(\pm(\cos \alpha + \cos \psi))}] : (1 \pm \cos \psi) \cdot \sqrt{(1 \pm \cos \alpha)}, \\ \cos v_2 &= [-\cos I \sin II \cdot \sqrt{(1 \mp \cos \alpha)} - \sin I \cdot \\ &\quad \cdot \sqrt{(\pm(\cos \alpha + \cos \psi))}] : (1 \pm \cos \psi) \cdot \sqrt{(1 \pm \cos \alpha)}, \\ \cos v_3 &= [\mp \sin I \cos II \cdot \sqrt{(1 \mp \cos \alpha)} - \sin II \cdot \\ &\quad \cdot \sqrt{(\pm(\cos \alpha + \cos \psi))}] : (1 \pm \cos \psi) \cdot \sqrt{(1 \pm \cos \alpha)}. \end{aligned}$$

In diesen und auch in den weiteren Gleichungen gilt das obere (untere) Vorzeichen für $\cos \alpha + \cos \psi \geq 0$ (< 0).

Aus (7) und (8) folgt: $r < R$, wenn $\cos \alpha + \cos \psi \neq 0$ ist, und $r = R$, wenn $\cos \alpha + \cos \psi = 0$ ist. In dem zweiten Fall ist $\varphi = 0^\circ$. Also:

Die Einheit des s-Verfahrens ist niemals kleiner als die Einheit des rekonstruierten Dreibeins.

Wenn die Winkel α, I, II des s-Verfahrens die Bedingung $\cos \alpha + \cos \psi = 0$ erfüllen, so ist durch dieses Verfahren die orthogonale Axonometrie bestimmt.

Wenn das s-Verfahren eine orthogonale Axonometrie bestimmt, so ist die Einheit des Verfahrens gleich der Einheit der Rekonstruktion.

Weiter bestimmen wir den axonometrischen Umriss \mathbf{U} der Einheitskugel $\kappa = (O, r)$. Die Exzentrizität e dieser Ellipse ist wegen $e = r \operatorname{tg} \varphi$ durch

$$(11) \quad e = R \cdot \sqrt{(\pm 2(\cos \alpha + \cos \psi))} : \sin \alpha$$

bestimmt.

Der Winkel $\omega_1 = \sphericalangle n'x'$ der Hauptachse n' von \mathbf{U} mit der Achse x' ergibt sich aus der Gleichung

$$(12) \quad \cos \omega_1 = (a^2 + r^2 \cdot \cos^2 v_1 \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi - r^2 \cdot \sin^2 v_1) : (2a \cdot r \cdot \cos v_1 \cdot \operatorname{tg} \varphi),$$

die wir durch eine einfache trigonometrische Überlegung ableiten können. Analoge Gleichungen gelten für $\omega_2 = \sphericalangle n'y'$ und $\omega_3 = \sphericalangle n'z'$. Wenn wir in (12) aus (1) und (7)–(9) einsetzen und vereinfachen, so erhalten wir

$$(13) \quad \begin{aligned} \cos \omega_1 &= (\cos I \pm \cos II) \cdot (1 \pm \cos \alpha)^{1/2} : o \sqrt{2} \\ \cos \omega_2 &= \cos \omega_3 = \sqrt{((1 \pm \cos \alpha) : 2)}. \end{aligned}$$

Das heisst: *in der Axonometrie, die aus dem s-Verfahren entsteht, ist die Projektion n' der Normale n zur Projektionsebene π (die Hauptachse von \mathbf{U}) die Symmetrale der Achsen y', z' .*

2

Die Theorie aus dem Abs. 1 benutzen wir jetzt zum Konstruieren spezieller Axonometrien.

s-VERFAHREN FÜR NORMALE AXONOMETRIEN

Es sei ein s-Verfahren durch R, α, I, II gegeben (Abb. 2). Wenn wir durch das Einschneiden die Axonometrie A' von $A \in xy$, $O_1 A_1 \perp s_1$, $\overline{A_1 O_1} = R$, $x^A > 0$ konstruieren, so ist $\overline{A'y'} = |R \cos \psi|$. Für einen Punkt $\overline{A} (\overline{A} \in A_1 A', \overline{A} O' \perp s_1)$ ist weiter $\overline{A'y'} = |R \cos \alpha|$. Wenn $\cos \alpha, \cos \psi$ gleiche (ungleiche) Vorzeichen haben, so liegen die Punkte A', \overline{A} an den verschiedenen (gleichen) Seiten von y' . Nur wenn

$\bar{A} = A'$ ist, so ist $\cos \alpha + \cos \psi = 0$ und von so einem Verfahren entsteht dann eine orthogonale Axonometrie. Daraus leiten wir folgende Konstruktionen der s-Verfahren, die eine normale Axonometrie bestimmen, ab:

Wir wählen R, α, I (Abb. 3, $90^\circ < I, \alpha < 180^\circ$) und bestimmen den Winkel II .

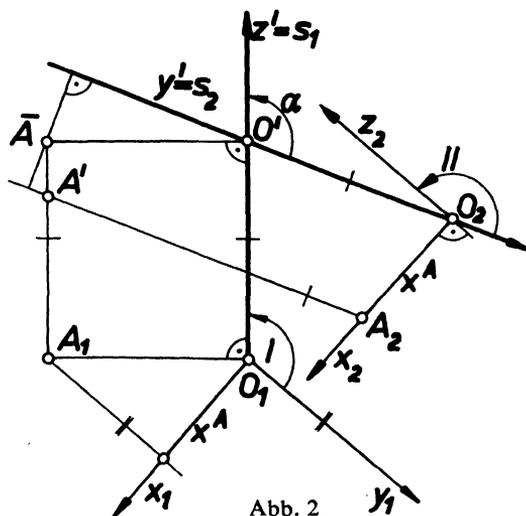


Abb. 2

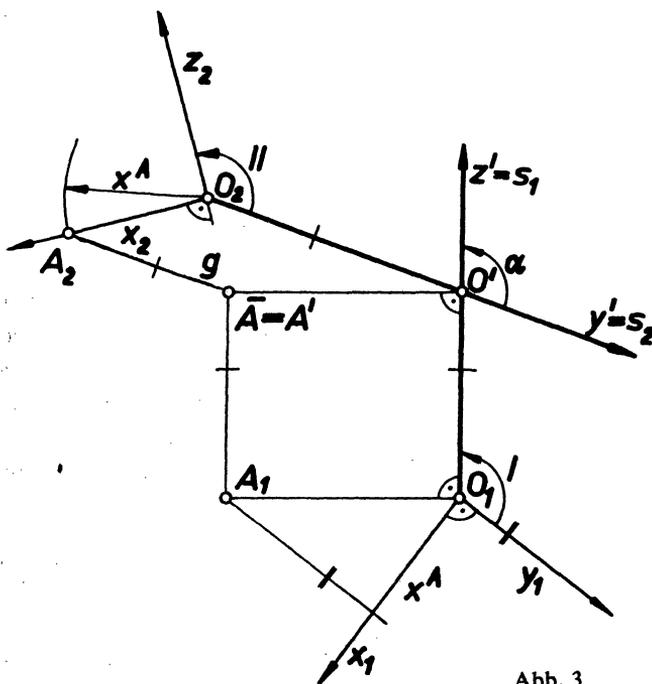


Abb. 3

Es muss also $A' = \bar{A}$ sein und der Punkt A_2 ist darum einer der Schnittpunkte des Kreises (O_2, x^A) mit der Geraden $g(A' \in g \parallel s_2)$. Mann muss hier einen solchen Punkt wählen, wofür $90^\circ < II < 180^\circ$ ist.

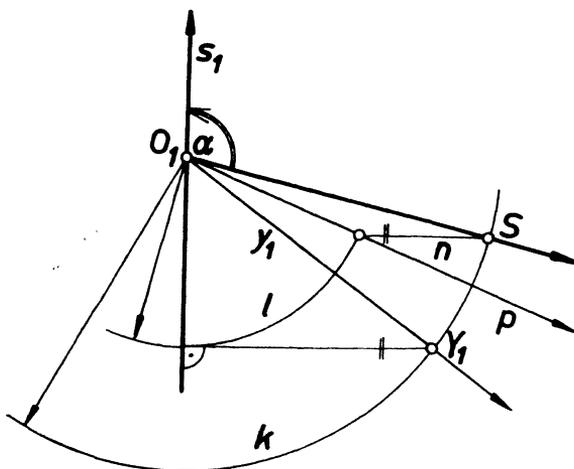


Abb. 4

Wir wählen R, I, II und bestimmen den Winkel α . In der Abb. 4 ist $\sphericalangle y_1 s_1 = I$, $Y_1 \in y_1$, $\overline{O_1 Y_1} = R$, $\sphericalangle p s_1 = II$, $90^\circ < I, II < 180^\circ$. Der Kreis $l(O_1, |R \cos I|)$ schneidet die Gerade p im Punkte einer Normalen n zu s_1 . Der Schnittpunkt S von n mit dem Kreis $k(O_1, R)$ bestimmt den Winkel $\sphericalangle O_1 S, s_1 = \alpha$, $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Durch eine ganz ähnliche Konstruktion erhalten wir den Winkel I resp. II wenn R, II, α resp. R, I, α gegeben sind.

s-VERFAHREN FÜR DIMETRIE UND ISOMETRIE

Ganz trivial ergibt sich eine Dimetrie mit $b = c$ durch das s-Verfahren mit $I = II = \alpha$. Wir wollen eine Dimetrie mit $a = b$ resp. $a = c$ erhalten. Zuzufolge (1) ist $o = \sin I$ resp. $o = \sin II$. Das charakteristische Dreieck mit den Seiten $R \cos I$, $R \cos II$ die den Winkel $\bar{\alpha} = 180^\circ - \alpha$ einschliessen, hat gegenüber $\bar{\alpha}$ die Seite $R o = |R \sin I|$ resp. $|R \sin II|$ und dadurch sind die Winkel α, I, II auch konstruktiv verbunden. Wählen wir z. B. R, I, II und suchen den Winkel α . In der Abb. 5 ist $I = \sphericalangle y_1 s_1$, $II = \sphericalangle p s_1$, $R = \overline{O_1 Y_1} = \overline{O_1 P}$, $P \in p$, $Y_1 \in y_1$. Die Normalen $Y_1 1$, $P 2$ zu der Geraden s_1 bestimmen die Punkte 1, 2 und die Kreise $(1, \overline{1 Y_1})$, $(O_1, \overline{O_1 2})$ schneiden sich im Punkte 3, für welchen $\sphericalangle O_1 3, s_1 = \alpha$; $I, II, \alpha < 180^\circ$ ist. Dieses Verfahren bestimmt die Dimetrie mit $a = b$.

Ähnlich können wir den Winkel II resp. I erhalten, wenn wir R, I, α resp. R, II, α wählen.

Für die Isometrie gilt $I = II$, $\cos \alpha = (1 - 3 \cos^2 I) : 2 \cos^2 I$. Wenn wir z. B. für das s-Verfahren $R, I = II$ wählen und wenn wir die vorangehende Konstruktion spezialisieren, so erhalten wir nach der Abb. 6 den Punkt 3 als den Schnittpunkt des Kreises $(1, \overline{1Y_1})$ mit dem Kreis $(O_1, \overline{O_11})$, $\alpha = \sphericalangle O_13, s_1$.

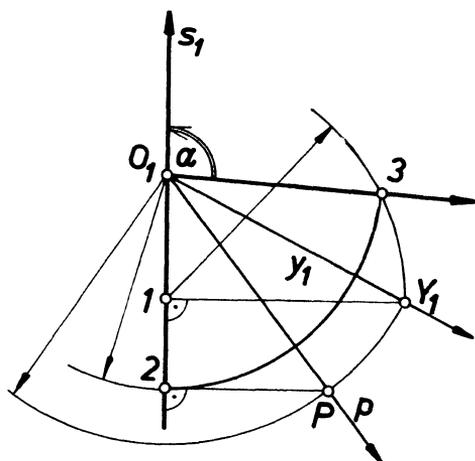


Abb. 5

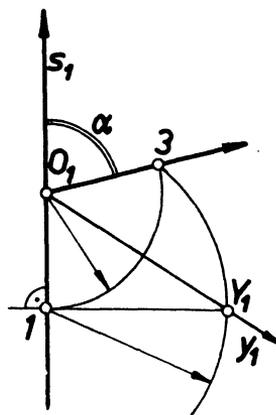


Abb. 6

s-VERFAHREN FÜR NORMALE DIMETRIE UND NORMALE ISOMETRIE

Die Bedingungen $a = b$, $\cos \alpha + \cos \psi = 0$ führen zu der Gleichung

$$\cos^2 I + \cos^2 II - 2 \cos^2 I \cos^2 II = \sin^2 I,$$

welche entweder für $\cos^2 II = 1$ oder für $1 - 2 \cos^2 I = 0$ erfüllt ist. Daraus folgt das s-Verfahren realisiert keine normale Dimetrie mit $a = b \neq c$. Das s-Verfahren bestimmt eine normale Isometrie, wenn $I = II = 135^\circ$, $\alpha = 120^\circ$ ist.

Die Bedingungen $a = c$, $\cos \alpha + \cos \psi = 0$ führen zu der Gleichung

$$\cos^2 I + \cos^2 II - 2 \cos^2 I \cos^2 II = \sin^2 II,$$

welche nur für $\cos II = -\sqrt{2} : 2$, $\cos \alpha = \sqrt{2} : 2$ erfüllt ist. Daraus folgt: das s-Verfahren realisiert eine normale Dimetrie mit $a = c$ nur dann, wenn der Winkel II dieses Verfahrens 135° ist.

Die Konstruktion des Winkels α nach der Abb. 7. Gegeben ist $I = \sphericalangle y_1 s_1$ und $R = \overline{O_1 Y_1}$, $Y_1 \in y_1$. Wir ziehen die Gerade g , $O_1 \in \sphericalangle g$, $y_1 g = 45^\circ$, und machen $G1 \perp y_1$ ($G \in g$, $\overline{O_1 G} = R$, $1 \in y_1$), $12 \perp s_1$ ($\overline{O_1 2} = R$); so erhalten wir den Winkel $\alpha = \sphericalangle O_1 2, s_1$ und die Achse $y' = \overline{O_1 2}$. Dadurch ist das s-Verfahren bestimmt: $O_1 = O_2 = O'$, $\sphericalangle y' z_2 = 135^\circ$, $\overline{O_2 Z_2} = R$, $O_2 X_2 \perp O_2 Z_2$, $\overline{O_2 X_2} = \overline{O_1 X_1} = R$. Es

$$(15) \quad \begin{aligned} \sin \beta &= \mp \cos I \sin \alpha : d \\ \sin \gamma &= \mp k \cdot \cos II \sin \alpha : d . \end{aligned}$$

In diesen Formeln gilt das obere (untere) Vorzeichen für $\alpha, I, II < 180^\circ (> 180^\circ)$.

Ähnlich wie im Abs. 1 könnten wir die analytische Rekonstruktion direkt aus dem a-Verfahren durchführen und zwar durch das Einsetzen (14) und (15) in (3)–(6).

Jetzt wollen wir zeigen, dass wir zu einer gegebenen Axonometrie ($O'X'Y'Z'$) immer ein a-Verfahren finden können, das eben diese Axonometrie liefert. Dann wird es unnötig sein, ein noch allgemeineres Einschneideverfahren, als a-Verfahren ist, zur Konstruktion einer Axonometrie verwenden.

Die Einschneiderichtungen s_1, s_2 sind mit den Achsen z', y' identisch, die Punkte O_1, O_2 auf z', y' beliebig wählbar und die Punkte X_1, Y_1 resp. X_2, Z_2 liegen auf den Einschneidestrahlen durch X', Y' resp. X', Z' (Abb. 8). Weiter muss $\overline{O_1X_1} = \overline{O_1Y_1}$ resp. $\overline{O_2X_2} = \overline{O_2Z_2}$ und $O_1X_1 \perp O_1Y_1$ resp. $O_2X_2 \perp O_2Z_2$ sein. Darum ziehen wir durch O_1 resp. O_2 zu z' resp. y' normale Hilfsgeraden, welche die Einschneidestrahlen in den Punkten 1, 2 resp. 3, 4 schneiden. Die Punkte X_1, Y_1 resp. X_2, Z_2 erfüllen dann die Bedingungen $\overline{X_11} = \overline{O_12}, \overline{Y_12} = \overline{O_11}$ resp. $\overline{X_23} = \overline{O_24}, \overline{Z_24} = \overline{O_23}$. Die Grösse k dieses a-Verfahrens genügt der Beziehung

$$(16) \quad k^2 = (a^2 \sin^2 \gamma + c^2 \sin^2 \alpha) : (a^2 \sin^2 \beta + b^2 \sin^2 \alpha),$$

Aus (16) folgt: einer Axonometrie gehört ein s-Verfahren zu, wenn ihre Parameter $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ die Bedingung

$$(17) \quad a^2 \sin^2 \gamma + c^2 \sin^2 \alpha = a^2 \sin^2 \beta + b^2 \sin^2 \alpha$$

erfüllen.

In der normalen Axonometrie gilt bekanntlich $a^2 = -\cos \alpha : \sin \beta \cdot \sin \gamma$, $b^2 = -\cos \beta : \sin \alpha \cdot \sin \gamma$, $c^2 = -\cos \gamma : \sin \alpha \cdot \sin \beta$, ([6], 99). Die Ausdrücke beider Seiten von (17) sind darum 1 gleich. Das bedeutet: zu jeder orthogonalen Axonometrie gehört immer ein s-Verfahren an.

Literatur

- [1] L. Eckhart: Affine Abbildung und Axonometrie, S.-Ber. Akad. Wiss. Wien 146 (1937), 51–56.
- [2] H. Kinkelin: Die schiefe axonometrische Projektion, Vierteljahrsschrift d. nat. Ges. Zürich, 1861.
- [3] Müller-Kruppa: Lehrbuch der darst. Geom. 1936.
- [4] A. Ostrowskij: Основные формулы параллельной аксонометрии. Труды московского семинара. Москва 1958. 108–111.
- [5] E. Wendling: Der Fundamentalsatz der Axonometrie, 1912.
- [6] W. Wunderlich: Darstellende Geometrie II, 1967.

Anschrift des Verfassers: Praha 2, Horská 4 (České vysoké učení technické).