Časopis pro pěstování matematiky

Bruno Budinský

Sätze von Menelaos und Ceva für Vielecke im sphärischen n-dimensionalen Raum

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 97 (1972), No. 1, 78--85

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117753

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 97 (1972), Praha

SÄTZE VON MENELAOS UND CEVA FÜR VIELECKE IM SPHÄRISCHEN n-DIMENSIONALEN RAUM

BRUNO BUDINSKÝ, Praha

(Eingegangen am 29. Mai 1970)

1. Im $(n + 1)$-dimensionalen euklidischen Raum denken wir uns die n-dimensionale Einheitskugelfläche S_n um den Nullpunkt O. Für $A \in S_n$ setzen wir $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}$ und mit $\boldsymbol{a}^* \neq \boldsymbol{0}$ bezeichnen wir einen mit $\boldsymbol{a}$ kollinearen Vektor; dabei $A^* = O + \boldsymbol{a}^*$.

In S_n wählen wir ein beliebiges sphärisches $(n + 1)$-Eck $A_1 A_2 \dots A_{n+1}$, für das die Vektoren $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_{n+1}$ linear unabhängig sind. Man bezeichne $a_i \in (0, \pi)$ den nichtorientierten Winkel von $\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_{i+1}$ und $\widehat{A_i A_{i+1}}$ den A_i mit A_{i+1} verbindenden und so orientierten Bogen der Kreislinie, daß a_i zugleich die Größe des orientierten Winkels des geordneten Paares $\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_{i+1}$ ist; $i = 1, \dots, n + 1$; Die Indizes nimmt man $mod(n + 1)$.

Es sei $b_i \in (0, \pi)$. Auf der Seite $\widehat{A_i A_{i+1}}$ wählen wir den Punkt B_i derart, daß b_i der orientierte Winkel des geordneten Paares $\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{a}_{i+1}$ ist. Die durch

$$(A_i A_{i+1} B_i) = \sin (b_i - a_i) : \sin b_i \tag{1}$$

definierte Zahl heißt *Teilungsverhältnis* des Punktes B_i in bezug auf das geordnete Punktepaar A_i, A_{i+1}.

Wir konstruieren so den Punkt B_i^*, daß sich der Vektor $\boldsymbol{b}_i^*$ in der Form

$$\boldsymbol{b}_i^* = \boldsymbol{a}_i - k_i \boldsymbol{a}_{i+1} \tag{2}$$

schreiben läßt. Um die Unbekannte k_i zu berechnen, multiplizieren wir (2) skalar mit $\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_{i+1}$. Es ergibt sich

$$|\boldsymbol{b}_i^*| \cos (b_i - a_i) = 1 - k_i \cos a_i\,, \quad |\boldsymbol{b}_i^*| \cos b_i = \cos a_i - k_i$$

und folglich

$$k_i = \sin (b_i - a_i) : \sin b_i\,. \tag{3}$$

Aus (1) und (2) ergibt sich das für weitere Betrachtungen fundamentale Ergebnis

$$k_i = (A_i A_{i+1} B_i)\,. \tag{4}$$

Nach (2) und (1) darf k_i eine beliebige Zahl sein. Es sei noch bemerkt, daß die Punkte A_i, A_{i+1}, B_i auf einer Halbkreislinie mit dem Endpunkt A_{i+1} liegen.

2. Der Satz von Menelaos. Wir wählen $n + 1$ von Null verschiedene Zahlen $k_1, \ldots, k_{n+1}$ und nach (4) konstruieren wir $n + 1$ Punkte B_i.

Die Punkte B_i liegen dann und nur dann auf einem Großkreis[1], *wenn*

$$k_1 k_2 \ldots k_{n+1} = 1 . \tag{5}$$

In der Tat, die Punkte B_i haben jene Eigenschaft dann und nur dann, wenn die durch (2) bestimmten Vektoren $\mathfrak{b}_i$ linear abhängig sind, was unmittelbar zur obigen Bedingung führt.

3. Der Satz von Ceva. Durch jeden Punkt B_i legen wir den sogenannten *Scheitelkreis* β_i; es ist das der durch die Punkte $A_1, \ldots, A_{i-1}, B_i, A_{i+2}, \ldots, A_{n+1}$ eindeutig bestimmte $(n - 1)$-dimensionale Großkreis.

Alle Scheitelkreise β_i haben dann und nur dann einen gemeinsamen Punkt, wenn

$$k_1 k_2 \ldots k_{n+1} = (-1)^{n+1} . \tag{6}$$

Es sei $Q \in \beta_i$. Den Punkt Q kann man durch

$$\mathfrak{q} = \omega_1 \mathfrak{a}_1 + \ldots + \omega_{n+1} \mathfrak{a}_{n+1} \tag{7}$$

bestimmen; dabei alle $\omega_i \neq 0$. Da der Punkt B_1 auf dem durch die Punkte $Q, A_3, \ldots$ $\ldots, A_{n+1}$ bestimmten Großkreis liegt, können wir auch $\mathfrak{b}_1^* = \varrho \mathfrak{q} + \varrho_3 \mathfrak{a}_3 + \ldots$ $\ldots + \varrho_{n+1} \mathfrak{a}_{n+1}$ schreiben. Wenn wir für $\mathfrak{q}$ aus (7) einsetzen und wenn wir die so erhaltene Gleichung mit (2) für $i = 1$ vergleichen, bekommen wir $\varrho \omega_1 = 1$, $\varrho \omega_2 =$ $= -k_1$. Die zyklische Vertauschung liefert

$$\omega_2 : \omega_1 = -k_1, \ \omega_3 : \omega_2 = -k_2, \ldots, \omega_1 : \omega_{n+1} = -k_{n+1} . \tag{8}$$

Daraus folgt sofort die Bedingung (6). — Die Umkehrung beweist man auf einfache indirekte Weise.

Wir konstruieren jetzt auf jeder Seite $A_i A_{i+1}$ unseres sphärischen $(n + 1)$-Ecks den Punkt C_i derart, daß $(A_i A_{i+1} C_i) = 1$, d. h.

$$\mathfrak{c}_i^* = \mathfrak{a}_i - \mathfrak{a}_{i+1} . \tag{9}$$

Nach dem Satz von Menelaos liegen alle Punkte C_i in einem Großkreis $\mathcal{N}$, den wir — und ebenso seine Punkte — mit dem Adjektiv „uneigentlich" kennzeichnen.

[1]) Darunter wird der Schnittpunkt der n-dimensionalen Kugelfläche S_n und einer durch ihren Mittelpunkt gehenden n-dimensionalen Ebene, also ein $(n - 1)$-dimensionaler sphärischer Unterraum, verstanden.

Der Punkt Q aus dem Satz von Ceva ist dann und nur dann uneigentlich, wenn

$$1 - k_1 + k_1k_2 - \ldots + (-1)^n k_1k_2 \ldots k_n = 0\,. \tag{10}$$

In dem durch $\boldsymbol{c}_i^*, \ldots, \boldsymbol{c}_{n+1}^*$ bestimmten Vektorraum bilden die Vektoren $\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_{n+1}, \boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_{n+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_n - \boldsymbol{a}_{n+1}$ eine Basis. Unter Zuhilfenahme von (8) läßt sich (7) in dieser Form schreiben

$$\boldsymbol{q} = \omega_1(\boldsymbol{a}_1 - k_1\boldsymbol{a}_2 + k_1k_2\boldsymbol{a}_3 - \ldots + (-1)^n k_1k_2 \ldots k_n\boldsymbol{a}_{n+1})\,. \tag{11}$$

Angenommen, es gelte (10). Statt (11) kann man dann $\boldsymbol{q} = \omega_1[(\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_{n+1}) - k_1(\boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_{n+1}) + \ldots + (-1)^{n-1} k_1k_2 \ldots k_{n-1}(\boldsymbol{a}_n - \boldsymbol{a}_{n+1})]$ schreiben. Daraus und aus (9) folgt $Q \in \mathcal{N}$. – Fußend auf (11) ist schon leicht zu zeigen, daß sich aus $Q \in \mathcal{N}$ umgekehrt (10) ergibt.

Ist n eine ungerade Zahl, so läßt sich $\boldsymbol{q}$ nach (11) folgendermaßen darstellen: $\boldsymbol{q} = \omega_1[(\boldsymbol{a}_1 - k_1\boldsymbol{a}_2) + k_1k_2(\boldsymbol{a}_3 - k_3\boldsymbol{a}_4) + \ldots + k_1k_2 \ldots k_{n-1}(\boldsymbol{a}_n - k_n\boldsymbol{a}_{n+1})$. Gemäß (2) ist also $\boldsymbol{q}$ eine Linearkombination von $\boldsymbol{b}_1^*, \boldsymbol{b}_3^*, \ldots, \boldsymbol{b}_n^*$. Wir haben so bewiesen:

Wenn die Dimension von S_n ungerade ist und wenn noch die Bedingung (5) – und folglich auch (6) – besteht, so befindet sich der Schnittpunkt Q aller β_i auf dem durch alle B_i gehenden Großkreis. Auf diesem Großkreis ist Q der Durchschnitt der durch $B_1, B_3, \ldots, B_n$ und $B_2, B_4, \ldots, B_{n+1}$ bestimmten sphärischen Unterräume.

4. Polares $(n + 1)$-Eck. Im sphärischen Raum S_{n+1} ist wiederum ein normales sphärisches $(n + 1)$-Eck $A_1A_2 \ldots A_{n+1}$ gegeben. Man bezeichne W_i den durch die Vektoren

$$\boldsymbol{a}_{i+1}, \boldsymbol{a}_{i+2}, \ldots, \boldsymbol{a}_{n+1}, \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{i-1} \tag{12}$$

gebildeten Vektorenraum. Mit dem Symbol $[\ldots]$ resp. $\{\ldots\}$ bezeichne man den Vektorenprodukt resp. Gemischtenprodukt der Vektoren. Die Zahl $\mu_i \in (0, \pi)$ durch die Gleichung

$$\cos \mu_i = \frac{[\boldsymbol{a}_{i+2}\boldsymbol{a}_{i+3} \ldots \boldsymbol{a}_{i-1}\boldsymbol{a}_i] \cdot [\boldsymbol{a}_{i+2}\boldsymbol{a}_{i+3} \ldots \boldsymbol{a}_{i-1}\boldsymbol{a}_{i+1}]}{|[\boldsymbol{a}_{i+2}\boldsymbol{a}_{i+3} \ldots \boldsymbol{a}_{i-1}\boldsymbol{a}_i]|\,|[\boldsymbol{a}_{i+2}\boldsymbol{a}_{i+3} \ldots \boldsymbol{a}_{i-1}\boldsymbol{a}_{i+1}]|} \tag{13}$$

definiert, bezeichnen wir als Winkelgröße der orientierten Vektorenräume W_i und W_{i+1}.

Wir werden auch von μ_i als von Größe des Winkels sprechen, der im sphärischen Viereck gegenüber der Seite $\widehat{A_iA_{i+1}}$ liegt. Mit Hilfe der Gleichung

$$\mathrm{m}_i = (-1)^{in} [\boldsymbol{a}_{i+1}\boldsymbol{a}_{i+2} \ldots \boldsymbol{a}_{n+1}\boldsymbol{a}_1 \ldots \boldsymbol{a}_{i-1}] \tag{14}$$

definieren wir $n + 1$ Vektoren m_i, $i = 1, 2, \ldots, n + 1$. Den Einheitsvektor der übereinstimmend parallel mit dem Vektor m_i ist, bezeichnen wir $\boldsymbol{a}_i'$. Weiter konstruieren wir mit Hilfe der Gleichung

$$A_i' = S + \boldsymbol{a}_i' \tag{15}$$

$n+1$ Punkte A_i'. Das Vieleck $A_1'A_2' \ldots A_{n+1}'$ ist ein Normalvieleck im S_n. Wir nennen es *Polarvieleck* des Vielecks $A_1 A_2 \ldots A_{n+1}$.

Man bezeichne mit a_i' die Größe der nichtorientierten Winkel der Vektoren $\boldsymbol{a}_i', \boldsymbol{a}_{i+1}'$ und μ_i' die Größe des gegenüber der Seite $\widehat{A_i'A_{i+1}'}$ liegenden Winkels. Man setze voraus, daß der Raum E_{n+1} so orientiert ist, daß

$$(16) \qquad V \equiv \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_{n+1}\} > 0 .$$

gilt.

Rechnen wir das Skalarprodukt $\boldsymbol{a}_i' . \boldsymbol{a}_i$. Es gilt

$$(17) \qquad \boldsymbol{a}_i' . \boldsymbol{a}_i = \frac{\boldsymbol{m}_i . \boldsymbol{a}_i}{|\boldsymbol{m}_i|} .$$

Benutzen wir die bekannten Eigenschaften des Vektorenprodukts, ergibt sich mit Hilfe von (17), (14) und (16)

$$\boldsymbol{a}_i . \boldsymbol{a}_i' = \frac{(-1)^{in}(-1)^{in} V}{|\boldsymbol{m}_i|} = \frac{V}{|\boldsymbol{m}_i|} > 0 .$$

Da weiter $\boldsymbol{a}_i . \boldsymbol{a}_j' = 0$, für jedes Paar $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots, n+1$, gilt (siehe auch [2] S. 161–164):

$$(18) \qquad \begin{array}{llll} \boldsymbol{a}_1 . \boldsymbol{a}_1' > 0, & \boldsymbol{a}_2 . \boldsymbol{a}_1' = 0, & \ldots, & \boldsymbol{a}_{n+1} . \boldsymbol{a}_1' = 0 , \\ \boldsymbol{a}_1 . \boldsymbol{a}_2' = 0, & \boldsymbol{a}_2 . \boldsymbol{a}_2' > 0, & \ldots, & \boldsymbol{a}_{n+1} . \boldsymbol{a}_2' = 0 , \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \boldsymbol{a}_1 . \boldsymbol{a}_{n+1}' = 0, & \boldsymbol{a}_1 . \boldsymbol{a}_{n+1}' = 0, & \ldots, & \boldsymbol{a}_{n+1} . \boldsymbol{a}_{n+1}' > 0 . \end{array}$$

Kennen wir die Einheitsvektoren $\boldsymbol{a}_i$, werden durch das System (18) die Einheitsvektoren $\boldsymbol{a}_i'$ eindeutig festgesetzt. Mit Hilfe (18) können wir also zum gegebenen Normalvieleck eindeutig sein Polarvieleck feststellen.

Aus der Symetrie des Systems (18) ergibt sich aber augenblicklich, daß zu dem gegebenen Polarvieleck eben das ursprüngliche Vieleck polar ist. Wir leiten die Beziehung zwischen a_i' und μ_i ab.

Aus den angeführten Definitionen und aus (14) ergibt sich, daß

$$\cos a_i' = \boldsymbol{a}_i' . \boldsymbol{a}_{i+1}' = \frac{\boldsymbol{m}_i . \boldsymbol{m}_{i+1}}{|\boldsymbol{m}_i| \, |\boldsymbol{m}_{i+1}|} =$$

$$= \frac{(-1)^{in} [\boldsymbol{a}_{i+1}\boldsymbol{a}_{i+2} \ldots \boldsymbol{a}_{i-1}] . (-1)^{(i+1)n} [\boldsymbol{a}_{i+2}\boldsymbol{a}_{i+3} \ldots \boldsymbol{a}_i]}{|\boldsymbol{m}_i| \, |\boldsymbol{m}_{i+1}|} =$$

$$= \frac{[\boldsymbol{a}_{i+2}\boldsymbol{a}_{i+3} \ldots \boldsymbol{a}_i] . [\boldsymbol{a}_{i+2}\boldsymbol{a}_{i+3} \ldots \boldsymbol{a}_{i-1}\boldsymbol{a}_{i+1}] (-1)^{in+(i+1)n} (-1)^{n-1}}{|\boldsymbol{m}_i| \, |\boldsymbol{m}_{i+1}|} .$$

Weil $(-1)^{in+(i+1)n}(-1)^{n-1} = (-1)^{2n(i+1)-1} = -1$ ist, können wir im Hinblick auf (13) das vorgehende Resultat kurz als

$$\cos a_i' = -\cos \mu_i \tag{19}$$

schreiben.

Daraus ergibt sich

$$\mu_i + a_i' = \pi\,. \tag{20}$$

Da beide untersuchte Vielecke miteinander polar sind, muß auch $\cos a_i = -\cos \mu_i'$ also

$$a_i + \mu_i' = \pi \tag{21}$$

gelten.

Die Gleichungen (20) und (21) sind eine Verallgemeinerung der aus der sphärischen Trigonometrie bekannten Gleichungen.

5. Dualsätze. Es sei $A_1A_2 \ldots A_{n+1}$ ein normales sphärisches Vieleck im S_n und $A_1'A_2' \ldots A_{n+1}'$ ein ihm polares Vieleck. Wählen wir eine natürliche Zahl $i \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$ und eine reale Zahl $k_i \neq 0$. Konstruieren wir den Punkt B_i so, daß $(A_iA_{i+1}B_i) = k_i$. Erwägen wir ein sphärisches Vieleck $A_1A_2 \ldots A_{i-1}B_iA_{i+1} \ldots A_{n+1}$. Es ist leicht zu beweisen, daß es im S_n normal ist.

Als Polarvieleck zu ihm ist das Vieleck $A_1'A_2' \ldots A_i'B_i'A_{i+2}' \ldots A_{n+1}'$, wo der Punkt B_i' durch die Gleichung

$$\boldsymbol{b}_i' = \frac{(-1)^{(i+1)n}\left[\boldsymbol{b}_i\boldsymbol{a}_{i+2} \ldots \boldsymbol{a}_{n+1}\boldsymbol{a}_1 \ldots \boldsymbol{a}_{i-1}\right]}{\left|\left[\boldsymbol{b}_i\boldsymbol{a}_{i+2} \ldots \boldsymbol{a}_{n+1}\boldsymbol{a}_1 \ldots \boldsymbol{a}_{i-1}\right]\right|} \tag{22}$$

bestimmt ist.

Bezeichnen wir b_i als Größe der nichtorientierten Winkel der Vektoren $\boldsymbol{b}_i$, $\boldsymbol{a}_{i+1}$ und v_i die Größe des gegenüber der Seite $\widehat{B_iA_{i+1}}$ liegenden Winkels. Ähnlich bezeichne man b_i' die Größe des nichtorientierten Winkels der Vektoren $\boldsymbol{a}_i'$, $\boldsymbol{b}_i'$ und v_i' die Größe des gegenüber der Seite $\widehat{A_i'B_i'}$ liegenden Winkels. Im vorhergehenden Absatz haben wir die Gleichungen (20) und (28) abgeleitet, die hier die Form

$$v_i + b_i' = \pi\,, \tag{23}$$

$$b_i + v_i' = \pi \tag{24}$$

haben.

Da die Punkte A_i, A_{i+1}, B_i auf einer Kreislinie liegen (sogar in einer Halbkreislinie mit dem Endpunkt A_{i+1}), liegen die Punkte A_{i+1}', A_i', B_i' auch auf einer Kreislinie (sogar auf einer Halbkreislinie mit dem Endpunkt A_i').

Es hat also Sinn folgende Bezeichnung einzuführen:

(25) $$k'_i = (A'_{i+1}A'_iB'_i)\,.$$

Aus (25), (23) und (20) ergibt sich

$$k'_i = \frac{\sin(b'_i - a'_i)}{\sin b'_i} = \frac{\sin(\pi - \nu_i - \pi + \mu_i)}{\sin(\pi - \nu_i)}\,.$$

Wir können also

(26) $$k'_i = -\frac{\sin(\nu_i - \mu_i)}{\sin \nu_i}$$

schreiben.

Nun können wir verhältnismäßig leicht die nachfolgenden zwei Sätze beweisen:

Dualer Satz des Menelaos. *Im sphärischen Raum S_n sei ein normales $(n+1)$-Eck $A_1A_2 \ldots A_{n+1}$ gegeben. Mit Hilfe von (4) konstruieren wir auf jeder seiner Seite A_iA_{i+1} den Punkt B_i. Dann liegen alle Punkte B_i auf einem Großkreis eben dann, wenn*

(27) $$\frac{\sin(\nu_1 - \mu_1)}{\sin \nu_1}\,\frac{\sin(\nu_2 - \mu_2)}{\sin \nu_2} \cdots \frac{\sin(\nu_{n+1} - \mu_{n+1})}{\sin \nu_{n+1}} = 1$$

gilt.

Beweis. Konstruieren wir ein Polarvieleck $A'_1A'_2 \ldots A'_{n+1}$ und mit Hilfe von (22) auf jeder seiner Seite $\widehat{A'_{i+1}A'_i}$ den Punkt B'_i. Durch den Punkt B'_i geht der Scheitelgroßkreis β'_i. Eine ausfürhlichere Erwägung würde beweisen, daß die Hyperebene des Großkreises β'_i senkrecht zur Linie SB_i ist.

Setzen wir zuerst voraus, daß alle Punkte B_i in einem Großkreis liegen, dessen Pol wir als Q bezeichnen. Jeder von diesen Scheitelgroßkreisen geht durch den Punkt Q. Es sind also die Bedingungen des Satzes von Ceva erfüllt und nach (25) und (7) können wir

(28) $$k'_1k'_2 \ldots k'_{n+1} = (-1)^{n+1}$$

schreiben. Aus (28) und (26) ergibt sich die Gleichung (27).

Setzen wir nun umgekehrt voraus, daß (27) und zugleich (28) gilt. Dem Satze von Ceva nach gehen alle Großkreise β_i durch den gemeinsamen Punkt Q'. Ein einfacher indirekter Beweis zeigt, daß sich daraus ergibt, daß alle Punkte B_i auf einem Großkreis liegen. Dadurch ist dieser Satz bewiesen.

Dualer Satz von Ceva. *Im sphärischen Raum S_n sei ein normales $(n+1)$-Eck $A_1A_2 \ldots A_{n+1}$ gegeben. Mit Hilfe von (4) konstruieren wir auf seiner jeder Seite*

A_iA_{i+1} den Punkt B_i und durch ihn führen wir den Scheitelgroßkreis β_i. Dann gehen alle Scheitelgroßkreise durch einen gemeinsamen Punkt eben dann, wenn

$$\text{(29)} \qquad \frac{\sin(\nu_1 - \mu_1)}{\sin \nu_1} \frac{\sin(\nu_2 - \mu_2)}{\sin \nu_2} \cdots \frac{\sin(\nu_{n+1} - \mu_{n+1})}{\sin \nu_{n+1}} = (-1)^{n+1}$$

gilt.

Beweis. Setzen wir voraus, daß alle Großkreise β_i durch den gemeinsamen Punkt Q gehen. Daraus ergibt sich, daß $\boldsymbol{b}_i \perp SO$ für $i \in \{1, 2, \ldots, n + 1\}$. Alle Punkte B_i' liegen also auf einem Großkreis. Benützen wir den Satz des Menelaos, (25) und (5), können wir

$$k_1' k_2' \ldots k_{n+1}' = 1$$

schreiben. Daraus und aus (26) ergibt sich (29). Es ist leicht zu beweisen, daß auch umgekehrt aus der Voraussetzung (29) sich ergibt, daß alle Großkreise β_i durch einen gemeinsamen Punkt gehen, und so den Beweis des Satzes beenden.

6. Die Grenzwertsätze. Alle vorhergehenden Erwägungen sind leicht auch auf die n-dimensionale Kugelfläche eines beliebigen Radius $R > 0$ zu übertragen. In diesem Falle hat (3) die Form

$$\text{(30)} \qquad k_i = \frac{\sin \frac{b_i - a_i}{R}}{\sin \frac{b_i}{R}}$$

und in (5), (7) und selbstverständlich auch in (27), (29) kommt zu keiner Veränderung.

Setzen wir voraus, daß $R \to \infty$, z. B. so, daß die Punkte A_i und Zahlen k_i fest sind, $a_i \to \bar{a}_i$, $b_i \to \bar{b}_i$, $\mu \to \bar{\mu}$, $\nu \to \bar{\nu}$, $B_i \to \bar{B}_i$. Der Grenzübergang ermöglicht uns den Satz des Menelaos und den von Ceva für ein normales $(n + 1)$-Eck im euklidischen Raum abzuleiten.

Da

$$k_i = \lim_{R \to \infty} \frac{\sin \frac{b_i - a_i}{R}}{\sin \frac{b_i}{R}} = \frac{\bar{b}_i - \bar{a}_i}{\bar{b}_i}$$

ist, haben die Gleichungen (5) und (7) nach dem Grenzübergang die Form

$$\text{(31)} \qquad \prod_{i=1}^{n+1} \frac{\bar{b}_i - \bar{a}_i}{\bar{b}_i} = 1 \quad \text{und} \quad \prod_{i=1}^{n+1} \frac{\bar{b}_i - \bar{a}_i}{\bar{b}_i} = (-1)^{n+1}.$$

Die ausführliche Formulierung der Sätze von Menelaos und Ceva für die Vielecke in E_n ist in [3] und [1].

Sagen wir nur noch, daß $\bar{a}_i$ eine orientierte Entfernung der Punkte A_i, A_{i+1} und $\bar{b}_i$ die Entfernung der Punkte B_i, A_{i+1} ist.

Gehen wir in den Gleichungen (27) und (29) zum Grenzwert für $R \to +\infty$ über, erhalten wir die Gleichungen

$$(32) \qquad \prod_{i=1}^{n+1} \frac{\sin(\bar{v}_i - \bar{\mu}_i)}{\sin \bar{v}_i} = 1 \quad \text{und} \quad \prod_{i=1}^{n+1} \frac{\sin(\bar{v}_i - \bar{\mu}_i)}{\sin \bar{v}_i} = (-1)^{n+1},$$

die ekvivalent mit den Gleichungen (31) sind. Die Gleichung drückt den sgn. Dualensatz des Menelaos und den sgn. Dualensatz von Ceva für das im euklidischen Raum E_n sich befindende normale $(n + 1)$-Eck aus.

Wobei μ_i die Größe des orientierten Winkels der Hyperebenen $A_{i+2} \dots A_n A_1 \dots \dots A_{i-1} A_i$, $A_{i+2} \dots A_n A_1 \dots A_{i-1} A_{i+1}$ und $\bar{v}_i$ die Größe des orientierten Winkels der Großebenen $A_{i+2} \dots A_n A_1 \dots A_{i-1} B_i$, $A_{i+2} \dots A_n A_1 \dots A_{i-1} A_{i+1}$ ist.

Literatur

[1] *B. Budinský - Z. Nádeník:* Mehrdimensionales Analogon zu den Sätzen von Menelaos und Ceva, Čas. pro pěst. mat., *97* (1972), str. 75—77.

[2] *E. Čech:* Analytická geometrie II, Přírodovědecké nakladatelství, Praha 1951.

[3] *Z. Nádeník:* Rozšíření vět Menelaovy a Cevovy na *n*-dimensionální útvary, Čas. pro pěst. mat., *81* (1956), str. 1—25.

[4] *Z. Nádeník:* Několik vlastností vrcholových nadrovin normálního mnohoúhelníka, Čas. pro pěst. mat., *81* (1956), str. 287—291.

[5] *Б. А. Розенфельд:* Многомерные пространства, Москва 1966.

[6] *H. Sasayama:* General coordinate geometries VI., Journal of spatial mathematics, Japan, *3*, 1960, p. 125—134.

Anschrift des Verfassers: Praha 2, Trojanova 13 (České vysoké učení technické).