Časopis pro pěstování matematiky

Bohdan Zelinka

Zweiseitig unendliche Züge in lokalendlichen Graphen

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 99 (1974), No. 4, 386--393

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117859`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 99 (1974), Praha

ZWEISEITIG UNENDLICHE ZÜGE IN LOKALENDLICHEN GRAPHEN

BOHDAN ZELINKA, Liberec

(Received July 9, 1973)

In [2] ist das folgende Problem gegeben:

Sei G ein unendlicher Graph mit geraden oder unendlichen Graden. Welche ist die notwendige und hinreichende Bedingung, dass G die kantendirekte Summe von genau k und nicht weniger zweiseitig unendlichen Züge sei?

Hier werden wir uns mit diesem Problem beschäftigen im Falle, wenn G lokalendlich ist. Wir werden die Resultate von R. HALIN [1] anwenden. Wir untersuchen ungerichtete Graphen ohne Schlingen und mehrfachen Kanten.

Sei G ein ungerichteter Graph. Ein zweiseitig unendlicher Zug in G im Sinne des Problems von ORE ist die zweiseitig unendliche Folge $\ldots, u_{-2}, h_{-2}, u_{-1}, h_{-1}, u_0, h_0, u_1, h_1, u_2, h_2, \ldots$, wo u_i für jedes ganzes i ein Knotenpunkt, h_i eine Kante von G ist, der Knotenpunkt u_i mit den Kanten h_{-i} und h_i inzident ist und $h_i \neq h_j$ für $i \neq j$. Die Forderung des Problems bedeutet, dass es k und nicht weniger zweiseitig unendliche Züge in G gibt, so dass jede Kanten von G genau einem aus diesen Zügen gehört. Es ist wohlbekannt, dass eine notwendige Bedingung dafür ist, dass der Grad jedes Knotenpunktes von G gerade oder unendlich sein muss. Wenn $k = 1$ ist, benennen wir soeinen Zug als einen zweiseitig unendlichen Eulerschen Zug.

Falls im Zug $\ldots, u_{-2}, h_{-2}, u_{-1}, h_{-1}, u_0, h_0, u_1, h_1, u_2, h_2, \ldots$ auch $u_i \neq u_j$ für $i \neq j$ ist, wird dieser Zug ein zweiseitig unendlicher Weg genannt. Ein einseitig unendlicher Zug ist eine einseitig unendliche Folge $u_0, h_0, u_1, h_1, u_2, h_2, \ldots$, wo u_i und h_i dasselbe wie oben bedeuten, der Knotenpunkt u_0 mit der Kante h_0, der Knotenpunkt u_i für jedes positives i mit den Kanten h_{i-1}, h_i inzident ist und $h_i \neq h_j$ für $i \neq j$. Wenn auch $u_i \neq u_j$ für $i \neq j$, ist dieser Zug ein einseitig unendlicher Weg.

R. Halin in [1] führt den Begriff des Enden ein. Früher als wir diesen Begriff definieren, führen wir etliche andere Begriffe ein. Ist $W = [u_0, h_0, u_1, h_1, u_2, h_2, \ldots]$ ein einseitig unendlicher Weg und k eine nichtnegative ganze Zahl, dann ist der Weg $[u_k, h_k, u_{k+1}, h_{k+1}, u_{k+2}, h_{k+2}, \ldots]$ ein Rest des Weges W genannt. Wir sagen, dass ein einseitig unendlicher Weg V immer wieder eine bestimmte Eigenschaft hat, wenn jeder von seinen Resten diese Eigenschaft hat. Zwei einseitig unendliche Wege V_1, V_2

im Graphen G sind äquivalent genannt, falls es einen einseitig unendlichen Weg W (nicht notwendig verschieden von V_1 und V_2) in G gibt, der immer wieder gemeinsame Knotenpunkte mit V_1 und V_2 hat. R. Halin hat bewiesen, dass diese Relation auf der Menge der einseitig unendlichen Wege in G wirklich eine Äquivalenz ist. Die Klassen dieser Äquivalenz sind die Enden des Graphen G.

Sei A eine Teilmenge der Knotenpunktmenge des Graphen G, seien $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}_2$ zwei Enden dieses Graphen. Als der Graph G', der aus G durch Entfernen der Menge A und allen mit den Knotenpunkten von A inzidenten Kanten entsteht, keine Komponente hat, die gleichzeitig einen Weg aus $\mathfrak{E}_1$ und einen Weg aus $\mathfrak{E}_2$ enthalte, sagen wir, dass A die Enden $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ voneinander trennt. Wenn ein Ende $\mathfrak{E}$ von G durch eine endliche Menge A gleichzeitig von allen anderen Enden von G getrennt werden kann, oder das einzige Ende von G ist, nennen wir $\mathfrak{E}$ ein freies Ende von G.

Ein Beispiel eines Graphen, dessen Enden nicht frei sind, ist ein unendlicher Baum, in welchem die Grade aller Knotenpunkte grösser als zwei sind. Jeder einseitig unendlicher Weg W dieses Graphen hat die Eigenschaft, dass aus jedem von seinen Knotenpunkten u mindestens ein einseitig unendlicher Weg $V(u)$ ausgeht, der zu einem anderen Ende als W gehört und nur den Knotenpunkt u mit W gemeinsam hat und für $u_1 \neq u_2$ die Wege $V(u_1)$ und $V(u_2)$ knotenfremd sind. Wenn wir eine beliebige endliche Menge A der Knotenpunkte und alle mit den Knotenpunkten von A inzidente Kanten aus diesem Graphen entfernen, bekommen wir einen Graphen, in dem jede Komponente entweder endlich ist, oder einseitig unendliche Wege verschiedener Enden enthält.

Jetzt beweisen wir einige Hilfssätze.

Hilfssatz 1. *Sei G ein lokalendlicher Graph, sei $\mathfrak{E}$ sein Ende. Im Graphen G', der aus G durch Entfernen einer endlichen Menge A der Knotenpunkte und aller mit den Knotenpunkten von A inzidenten Kanten entsteht, liegen alle Wege von $\mathfrak{E}$, die auch in G' existieren, in derselben Komponente.*

Beweis. Sei $V_1 \in \mathfrak{E}$, $V_2 \in \mathfrak{E}$. Da V_1 und V_2 äquivalent sind, gibt es einen einseitig unendlichen Weg W in G, der immer wieder gemeinsame Knotenpunkte mit V_1 und V_2 hat. Aber nach Entfernen einer endlichen Menge der Knotenpunkte aus G muss ein Rest W' von W bleiben, der auch immer wieder gemeinsame Knotenpunkte mit V_1 und V_2 hat (falls V_1 und V_2 auch in G' existieren). So liegen auch in G' die Wege V_1 und V_2 in derselben Komponente.

Hilfssatz 2. *Jede zwei verschiedene Enden eines lokalendlichen Graphen können voneinander durch eine endliche Menge der Knotenpunkte getrennt werden.*

Beweis. Seien $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}_2$ zwei verschiedene Enden eines lokalendlichen Graphen G. Setzen wir voraus, dass sie durch keine endliche Menge der Knotenpunkte getrennt werden können. Sei $V_1 \in \mathfrak{E}_1$, $V_2 \in \mathfrak{E}_2$. Seien a_i (bzw. b_i) für alle natürliche Zahlen i die Knotenpunkte von V_1 (bzw. V_2). Die Kanten von V_1 (bzw. V_2) seien $a_i a_{i+1}$

(bzw. $b_i b_{i+1}$) für alle natürlichen Zahlen i. Es gibt keine endliche Menge der Knotenpunkte A, so dass im Graphen G', der aus G durch Entfernen aller Knotenpunkte von A und aller mit den Knotenpunkten von A inzidenten Kanten entsteht, die Reste von V_1 und V_2 in verschiedenen Komponenten erhalten seien; das folgt aus dem Hilfssatz 1. So gibt es einen (endlichen) Weg X_1, der a_1 mit einem Knotenpunkt b_{j_1} verbindet. Wir entfernen alle Knotenpunkte von X_1 ausschliesslich b_{j_1} und alle b_j für $j < j_1$ aus G; da wir eine endliche Menge der Knotenpunkte entfernt haben, existiert in dem so entstandenen Graphen ein Weg X_2, der b_{j_1} mit einem Knotenpunkt a_{i_2} (wo $i_2 > 1$) verbindet. Wir entfernen alle Knotenpunkte von X_2 ausschliesslich a_{i_2} und alle a_i für $i < i_2$. Wir haben wieder eine endliche Menge entfernt, so gibt es einen Weg X_3, der a_{i_2} mit einem Knotenpunkt b_{j_2}, wo $j_2 > j_1$, verbindet. Wir entfernen alle Knotenpunkte von X_3 ausschliesslich b_{j_2} und alle b_j für $j < j_2$. Diese Prozedur setzen wir unendlich fort. Wir bekommen so die Wege $X_1, X_2, X_3, \ldots$, die paarweise keine innere Knotenpunkte gemeinsam haben, und nur X_i, X_{i+1} für jedes i einen gemeinsamen Endpunkt haben. So $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$ ist ein einseitig unendlicher Weg, der immer wieder gemeinsame Knotenpunkte mit V_1 und V_2 hat, und V_1 und V_2 sind äquivalent. Das bedeutet $\mathfrak{E}_1 = \mathfrak{E}_2$, was ein Widerspruch ist.

Folgerung des Hilfssatzes 2. *Sei G ein lokalendlicher Graph, sei die Anzahl der Enden des Graphen G endlich. Dann ist jedes Ende von G frei.*

Offenbar ist die Menge, die ein Ende $\mathfrak{E}$ von allen anderen Enden trennt, die Vereinigung der Mengen, die $\mathfrak{E}$ von einzelnen anderen Enden trennen. Diese Mengen sind endlich, ihre Anzahl ist auch endlich, so ist auch die Vereinigung endlich.

Hilfssatz 3. *Sei G ein zusammenhängender unendlicher lokalendlicher Graph mit genau einem Ende. Seien die Grade aller Knotenpunkte von G gerade. Dann gibt es einen zweiseitig unendlichen Eulerschen Zug in G.*

Beweis. Nach [2] sind die hinreichende Bedingungen für die Existenz eines zweiseitig unendlichen Eulerschen Zuges im Graphen G die folgenden:

(a) G ist zusammenhängend.

(b) G hat eine abzählbare Kantenmenge.

(c) G hat keine Knotenpunkte ungerades Grades.

(d) Wenn H ein endlicher Teilgraph von G ist, dann bekommen wir nach Entfernen aller Kanten von H aus G einen Graphen, der höchstens zwei unendliche Komponenten hat.

(e) Wenn H ein endlicher Teilgraph von G ist, dessen Knotenpunkte in ihm gerade Grade haben, dann bekommen wir nach Entfernen aller Kanten von H aus G einen Graphen, der höchstens eine unendliche Komponente hat.

Nun beglaubigen wir diese Bedingungen für unseren Graphen G. Die Gültigkeit der Bedingung (a) ist vorausgesetzt. Die Gültigkeit von (b) folgt aus der Voraussetzung, dass G lokalendlich und zusammenhängend ist; nach [2] muss G eine abzählbare Kantenmenge haben. Die Gültigkeit von (c) ist vorausgesetzt. Wir beglaubigen (d) und (e). Sei H ein endlicher Teilgraph von G. Wir beweisen, dass nicht nur nach Entfernen aller Kanten von H, sondern auch nach dem Entfernen aller Knotenpunkte von H wir einen Graphen G' bekommen, der nur eine unendliche Komponente hat. Setzen wir voraus, dass G' zwei unendliche Komponenten K_1 und K_2 hat. Da G lokalendlich ist, sind auch K_1 und K_2 lokalendlich und so enthält jede von ihnen mindestens einen einseitig unendlichen Weg. Seien W_1, W_2 solche Wege, W_1 in K_1, W_2 in K_2. Nach dem Hilfssatz 1 können die Wege W_1 und W_2 nicht demselben Enden von G angehören. Das ist aber ein Widerspruch mit der Voraussetzung, dass in G genau ein Ende ist.

Hilfssatz 4. *Sei G ein zusammenhängender unendlicher lokalendlicher Graph mit genau einem Ende. Seien die Grade aller Knotenpunkte von G gerade mit Ausnahme genau eines Knotenpunktes. Dann gibt es einen einseitig unendlichen Eulerschen Zug in G.*

(Der einseitig unendliche Eulersche Zug ist analog dem zweiseitig unendlichen Eulerschen Zug definiert.)

Beweis. Nach [2] sind die hinreichende Bedingungen für die Existenz eines einseitig unendlichen Eulerschen Zugs im Graphen G (a) und (b) wie im Beweis des Hilfssatzes 3 und ferner:

(c′) Höchstens eine Knotenpunkt von G hat einen ungeraden Grad; wenn es keinen solchen Knotenpunkt gibt, muss mindestens ein Knotenpunkt mit unendlichem Grad in G existieren.

(d′) Wenn H ein endlicher Teilgraph ist, dann bekommen wir nach Entfernen aller Kanten von H aus G einen Graphen, der nur eine unendliche Komponente hat.

Diese Bedingungen beglaubigen wir analog wie im Beweis des Hilfssatzes 3.

Wir sagen, dass eine Menge B der Kanten von G die trennende Kantenmenge des Endes $\mathfrak{E}$ ist, falls nach dem Entfernen von B die Komponente des Graphen G, die $\mathfrak{E}$ enthält, in zwei Komponenten zerfällt, eine von denen die Wege von $\mathfrak{E}$ und keine andere einseitig unendliche Wege enthält, und wenn keine echte Teilmenge von B diese Eigenschaft hat.

Hilfssatz 5. *Sei G ein lokalendlicher Graph, sei $\mathfrak{E}$ sein freies Ende. Seien die Grade aller Knotenpunkte von G gerade. Dann gibt es mindestens eine endliche Menge in G, die eine trennende Kantenmenge von $\mathfrak{E}$ ist, und die Anzahlen der Elementen aller solchen Mengen paarweise kongruent modulo 2 sind.*

Beweis. Da $\mathfrak{E}$ ein freies Ende ist, gibt es eine endliche Menge A der Knotenpunkte, die $\mathfrak{E}$ von allen anderen Enden von G trennt. Sei K die Komponente des aus G durch

Entfernen von A entstandenen Graphen, die die Wege aus $\mathfrak{E}$ enthält. Sei B die Menge der Kanten, die die Knotenpunkte von A mit den Knotenpunkten von K verbinden. Da G lokalendlich ist, muss diese Menge endlich sein und offenbar ist diese Menge eine trennende Kantenmenge des Endes $\mathfrak{E}$.

Jetzt seien B_1, B_2 zwei endliche trennende Kantenmengen des Endes $\mathfrak{E}$ von G. Sei K_1 (bzw. K_2) die Komponente des aus G durch Entfernen von B_1 (bzw. B_2) entstandenen Graphen, die die Wege von $\mathfrak{E}$ enthält. Weiter bezeichnen wir $B_0 = B_1 \cap B_2$, B_1' (bzw. B_2') die Teilmenge der Menge B_1 (bzw. B_2), die in K_2 (bzw. K_1) liegt, und $B_1'' = B_1 - (B_0 \cup B_1')$, $B_2'' = B_2 - (B_0 \cup B_2')$. Entfernen wir B_2' aus K_1. Wir bekommen einen Graphen, der eine unendliche Komponente und mindestens eine endliche Komponente hat. Sei H der Teilgraph von K_1, der aus allen endlichen Komponenten dieses Graphen besteht. Offensichtlich entsteht der Graph H aus G durch Entfernen von $B_1 \cup B_2'$. Da in G alle Knotenpunkte gerade Grade haben, muss die Summe der Grade aller Knotenpunkte von H in G gerade sein. Diese Summe ist gleich $2h + k$, wo h die Anzahl der Kanten von H und k die Anzahl der Kanten, die genau einen Knotenpunkt in H haben, ist. Das bedeutet, dass k gerade ist. Aber $k = |B_1 \cup B_2'| = |B_1| + |B_2'|$, nachdem $B_1 \cap B_2' = \emptyset$ ist. Also sind $|B_1|$ und $|B_2'|$ entweder beide gerade, oder beide ungerade, und $|B_1| \equiv |B_2'| \pmod 2$. Ganz analog beweisen wir auch $|B_1'| \equiv |B_2| \pmod 2$. Wir haben $|B_1| = |B_0| + |B_1'| + |B_1''|$, $|B_2| = |B_0| + |B_2'| + |B_2''|$, also aus den oben bewiesenen Kongruenzen folgt auch $|B_1| \equiv |B_2| \pmod 2$.

Also im lokalendlichen unendlichen Graphen, dessen alle Knotenpunkte gerade Grade haben, können die Enden nach dem klassifiziert werden, ob ihre trennende Kantenmengen gerade oder ungerade Anzahlen der Elemente haben. Wir werden über gerade und ungerade Enden sprechen. Wenn G nur ein Ende hat, nennen wir dieses Ende auch gerade.

Hilfssatz 6. *Sei G ein lokalendlicher Graph, dessen alle Knotenpunkte gerade Grade haben. Sei die Anzahl der Enden von G endlich. Dann ist die Anzahl der ungeraden Enden von G gerade.*

Beweis. Im Falle, wenn es nur ein Ende gibt, folgt die Behauptung aus der Definition. Wir setzen also voraus, dass die Anzahl der Enden grösser als eins ist. Wie oben bemerkt wurde, gibt es eine endliche Menge A der Knotenpunkte von G, so dass im Graphen G', der aus G durch Entfernen von A entsteht, keine Komponente zwei einseitig unendliche Wege aus verschiedenen Enden enthält. Für jedes Ende $\mathfrak{E}$ sei $K(\mathfrak{E})$ die Komponente von G', die die Wege aus $\mathfrak{E}$ enthält, und $B(\mathfrak{E})$ die Menge der Kanten, die die Knotenpunkte von A mit den Knotenpunkten von $K(\mathfrak{E})$ verbinden. Die Menge $B(\mathfrak{E})$ ist offensichtlich eine trennende Kantenmenge des Endes $\mathfrak{E}$. So ist für ein gerades (bzw. ungerades) Ende $\mathfrak{E}$ die Anzahl der Elemente von $B(\mathfrak{E})$ gerade (bzw. ungerade). Die Summe der Grade aller Knotenpunkte von A in G muss gerade sein, weil alle diese Grade gerade sind. Diese Summe ist gleich $2h + k$, wo h

die Anzahl der Kanten, die beide Endpunkte in A haben, und k die Anzahl der Kanten, die genau einen Endpunkt in A haben, ist. Also k ist gerade. Die Zahl k ist der Summe der $|B(\mathfrak{E})|$ über alle Enden $\mathfrak{E}$ von G gleich. Da diese Summe gerade ist, muss sie eine gerade Anzahl der ungeraden Summanden haben und also die Anzahl der ungeraden Enden ist gerade.

Jetzt beweisen wir den Satz.

Satz. *In einem unendlichen lokalendlichen Graphen G existieren genau k (k ist eine natürliche Zahl) zweiseitig unendliche Züge mit der Eigenschaft, dass jede Kante von G genau einem aus diesen Zügen angehört, dann und nur dann, wenn die folgende Bedingungen erfüllt sind:*

(a) *Die Grade aller Knotenpunkte von G sind gerade.*

(b) *G hat eine endliche Anzahl der Enden.*

(c) *Wenn h_1 die Anzahl der ungeraden Enden von G und h_2 die Anzahl der geraden Enden von G ist, dann ist*

$$\tfrac{1}{2}h_1 + h_2 = k .$$

Beweis. Wir beweisen zuerst die Notwendigkeit der Bedingungen. Die Notwendigkeit von (a) ist offenbar, nachdem für jeden Knotenpunkt v von G und jeden zweiseitig unendlichen Zug Z in G v mit einer geraden Anzahl der Kanten von Z inzident ist. Sei die Anzahl der Enden unendlich. Aus jedem Ende wählen wir einen Weg; so bekommen wir eine un- endliche Menge $\mathfrak{M}$ paarweise nicht-äquivalenter Wege. Falls es eine endliche Anzahl der zweiseitig unendlichen Züge gibt, die alle Kanten von G bedecken, dann muss mindestens einer dieser Züge unendlich viele Kanten aus jedem Weg einer unendlichen Teilmenge $\mathfrak{M}' \subset \mathfrak{M}$ enthalten. Zerteilen wir so einen Zug Z in zwei einseitig unendliche Züge Z_1, Z_2. Dann muss mindestens einer der Züge Z_1, Z_2 unendlich viele Kanten aus jedem Weg einer unendlichen Teilmenge $\mathfrak{M}'' \subset \mathfrak{M}'$ enthalten. Dann aber haben diese Wege mit diesem Zug immer wieder gemeinsame Knotenpunkte und offenbar gibt es auch einen einseitig unendlichen Weg W, der immer wieder gemeinsame Knotenpunkte mit allen Wegen aus $\mathfrak{M}''$ hat, und alle Wege von $\mathfrak{M}''$ sind paarweise äquivalent, was ein Widerspruch ist. Also (b) ist notwendig. Jetzt beweisen wir, dass (a), (b), (c) hinreichend sind, und erst dann beweisen wir die Notwendigkeit von (c). Seien (a), (b), (c) erfüllt. Nehmen wir die Menge A, die Mengen $B(\mathfrak{E})$ und die Komponenten $K(\mathfrak{E})$ für alle Enden $\mathfrak{E}$ wie im Beweis des Hilfssatzes 6. In jeder Komponente $K(\mathfrak{E})$ können sich die Knotenpunkte ungeraden Grades nur unter den Komponenten finden, die inzident mit den Kanten von $B(\mathfrak{E})$ sind. Es ist leicht zu beweisen, dass ihre Anzahl gerade (bzw. ungerade) ist, wenn $\mathfrak{E}$ gerade (bzw. ungerade) ist. Wenn diese Anzahl m ist, dann existiert offenbar ein System $\mathfrak{C}(\mathfrak{E})$ der $[m/2]$ paarweise kantenfremden (endlichen) Wege in $K(\mathfrak{E})$, deren Endpunkte paarweise verschieden sind und ungerade Grade in $K(\mathfrak{E})$ haben. Wenn $\mathfrak{E}$ gerade ist, sind diese Knotenpunkte genau alle Knotenpunkte des ungeraden Grades in $K(\mathfrak{E})$. Falls $\mathfrak{E}$ ungerade ist, gibt es genau einen Knotenpunkt des ungeraden Grades in $K(\mathfrak{E})$, der kein Endpunkt eines Wegs aus $\mathfrak{C}(\mathfrak{E})$ ist. Der Graph, der aus $K(\mathfrak{E})$ durch Entfernen aller Kanten der Wege von $\mathfrak{C}(\mathfrak{E})$ entsteht, wird mit $L(\mathfrak{E})$ bezeichnet. Wenn $\mathfrak{E}$ gerade ist, dann haben offensichtlich in $L(\mathfrak{E})$ alle Knotenpunkte gerade Grade, und wenn $\mathfrak{E}$ ungerade ist, dann $L(\mathfrak{E})$ hat genau einen Knotenpunkt ungeraden Grades. Definieren wir den Teilgraphen H des Graphen G. Die Menge der Knotenpunkte von H besteht von allen Knotenpunkten von A, allen Knotenpunkten, die mit ihnen verbunden sind, und allen Knotenpunkten der Wege aus $\mathfrak{C}(\mathfrak{E})$ für jedes $\mathfrak{E}$. Die Kanten von H sind alle Kanten, die mindestens einen Endpunkt in A haben, und alle Kanten von $\mathfrak{C}(\mathfrak{E})$ für jedes Ende $\mathfrak{E}$. Die Anzahl der Knotenpunkte ungeraden Grades in H ist der Anzahl der ungeraden Enden von G gleich. Nach dem Hilfssatz 3 gibt es in jedem $L(\mathfrak{E})$, wo $\mathfrak{E}$ gerade ist, einen zweiseitig unendlichen Eulerschen Zug. Wir bezeichnen diese Züge mit $Z_1, \ldots, Z_{h_2}$. Nach dem Hilfssatz 4 gibt es in jedem $L(\mathfrak{E})$, wo $\mathfrak{E}$ ungerade ist, einen einseitig unendlichen Eulerschen Zug. Wir bezeichnen diese Züge mit $Z'_1, \ldots, Z'_{h_1}$. Nun wenn $h_1 = 0$ ist, dann existiert in H ein geschlossener Eulerscher Zug Z_0. Nehmen wir einen Knotenpunkt x, der gleichzeitig in den Zügen Z_1 und Z_0 liegt. Laufen wir Z_1 vom Unendlichen bis zu x durch, dann laufen wir das ganze Z_0 aus x wieder bis zu x durch und dann laufen wir auf Z_1 von x bis zum Unendlichen fort. Wir bekommen einen zweiseitig unendlichen Zug $\hat{Z}_1$ und die Züge $\hat{Z}_1, Z_2, \ldots, Z_{h_2}$ sind die gesuchte Züge. Wenn $h_1 > 0$ ist, dann hat H genau h_1 Knotenpunkte ungeraden Grades; seien diese $u_1, \ldots, u_{h_1}$. Dann gibt es $\frac{1}{2}h_1$ offene Züge in H, so dass jede Kante von H genau einem dieser Züge angehört. Seien diese Züge $Z''_1, \ldots, Z''_{h_1/2}$. Jeder Zug Z''_i verbindet die Anfangspunkte zweier der einseitig unendlichen Züge $Z'_1, \ldots, Z'_{h_1}$. Wenn wir diese zwei Züge zu Z''_i hinzufügen, bekommen wir einen zweiseitig unendlichen Zug Z'''_i. Die Züge $Z_1, \ldots, Z_{h_2}$, $Z'''_1, \ldots, Z'''_{h_1/2}$ sind offenbar die gesuchten Züge. Ihre Anzahl ist $\frac{1}{2}h_1 + h_2 = k$. Jetzt bleibt nur die Notwendigkeit von (c) zu beweisen. Im Wesentlichen brauchen wir zu beweisen, dass nicht weniger als k gesuchte Züge, wo $k = \frac{1}{2}h_1 + h_2$, existieren. Wir benützen wieder die Komponenten $K(\mathfrak{E})$ und die Mengen $B(\mathfrak{E})$. Da die Komponenten $K(\mathfrak{E})$ paarweise voneinander durch endliche Mengen getrennt sind, kann jeder einseitig unendlicher Zug in G nur mit einer aus ihnen eine unendliche Anzahl gemeinsamer Kanten haben (im umgekehrten Fall müsste er unendliche Male aus einer Komponente in die andere übergehen). Ein zweiseitig unendlicher Zug kann in zwei einseitig unendliche Züge zerteilt werden; das bedeutet, dass dieser entweder mit einer, oder mit zwei Komponenten $K(\mathfrak{E})$ unendlich viele gemeinsame Kanten hat. Untersuchen wir die einzelne Fälle. Setzen wir voraus, dass ein zweiseitig unendlicher Zug Y unendlich viele gemeinsame Kanten mit den Komponenten $K(\mathfrak{E}_1)$, $K(\mathfrak{E}_2)$ hat, wo $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ die Enden von G sind und $\mathfrak{E}_1 \neq \mathfrak{E}_2$. Zerteilen wir Y in zwei einseitig unendliche Züge Y_1, Y_2, dann (ohne Verlust der Allgemeinhait) hat der Zug Y_1 (bzw. Y_2) unendlich viele gemeinsame Kanten mit $K(\mathfrak{E}_1)$ (bzw. $K(\mathfrak{E}_2)$). Der Zug Y_1

(bzw. Y_2) hat einen Rest, der ganz in $K(\mathfrak{E}_1)$ (bzw. $K(\mathfrak{E}_2)$) liegt. (Der Rest eines einseitig unendlichen Zuges ist analog dem Rest eines einseitig unendlichen Weges definiert.) Im umgekehrten Fall müsste er unendlich vielmal in $K(\mathfrak{E}_1)$ oder $K(\mathfrak{E}_2)$ ein- und austreten, was unmöglich ist, weil $B(\mathfrak{E})$ endlich ist. Nach Entfernen dieser Reste aus Y bekommen wir einen endlichen Zug Y_0, der einen Knotenpunkt von $K(\mathfrak{E}_1)$ mit einem Knotenpunkt von $K(\mathfrak{E}_2)$ verbindet. Dieser Zug enthält offenbar eine ungerade Anzahl der Kanten von $B(\mathfrak{E}_1)$, eine ungerade Anzahl der Kanten von $B(\mathfrak{E}_2)$ und eine gerade Anzahl der Kanten von $B(\mathfrak{E}')$, wo $\mathfrak{E}'$ ein beliebiges von $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ verschiedenes Ende von G ist. Dasselbe gilt auch für Y. Jetzt setzen wir voraus, dass Y nur mit $K(\mathfrak{E})$ unendlich viele gemeinsame Kanten hat, wo $\mathfrak{E}$ ein Ende von G ist. Dann haben Y_1 und Y_2 Reste, die beide ganz in $K(\mathfrak{E})$ liegen. Nach Entfernen dieser Reste aus Y bekommen wir einen endlichen Zug Y_0, der zwei Knotenpunkte von $K(\mathfrak{E})$ miteinander verbindet. Dieser Zug enthält offenbar eine gerade Anzahl der Kanten von $B(\mathfrak{E})$ und auch eine gerade Anzahl der Kanten von $B(\mathfrak{E}')$, wo $\mathfrak{E}'$ ein beliebiges Ende von G ist. Jetzt seien $\mathfrak{E}_1, \ldots, \mathfrak{E}_{h_1}$ die ungerade, $\mathfrak{E}'_1, \ldots, \mathfrak{E}'_{h_2}$ die gerade Enden von G. Sei $\mathfrak{S}$ das gesuchte System der Züge (so dass jede Kanten von G genau in einem Zug von $\mathfrak{S}$ liegt). Jede Menge $B(\mathfrak{E}'_i)$ für $i = 1, \ldots, h_2$ hat eine gerade Anzahl der Elemente, also existiert für $\mathfrak{E}_i$ eine gerade Anzahl der Züge aus dem System $\mathfrak{S}$, die mit $K(\mathfrak{E}'_i)$ und nicht nur mit $K(\mathfrak{E}'_i)$ unendlich viele gemeinsame Kanten haben, und wenn diese Anzahl Null ist, dann gibt es mindestens einen Zug aus dem System $\mathfrak{S}$, der nur mit $K(\mathfrak{E}'_i)$ unendlich viele gemeinsame Kanten hat. Für jedes $i = 1, \ldots h_1$, sei p_i die Anzahl der Wege aus dem System $\mathfrak{S}$, die mit $K(\mathfrak{E}_i)$ unendlich viele gemeinsame Kanten haben, wobei jeder Zug, der nur mit $K(\mathfrak{E}_i)$ unendlich viele gemeinsame Kanten hat, zweimal gerechnet wird. Ähnlich für jedes $j = 1, \ldots, h_2$ sei q_j die Anzahl der Wege aus dem System $\mathfrak{S}$, die mit $K(\mathfrak{E}'_j)$ unendlich viele gemeinsame Kanten haben, wobei jeder Zug, der nur mit $K(\mathfrak{E}'_j)$ unendlich viele gemeinsame Kanten hat, zweimal gerechnet wird. Offenbar ist die Anzahl der Züge von $\mathfrak{S}$ $\frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{h_1} p_i + \sum_{j=1}^{h_2} q_j)$ gleich. Aus dem oben bewiesenen folgt, dass q_j für $j = 1, \ldots, h_2$ gerade ist. Offenbar sind auch alle p_i und q_j ganz und positiv. Also ist $p_i \geqq 1$ für $i = 1, \ldots, h_1$, $q_j \geqq 2$ für $j = 1, \ldots, h_2$ und also ist

$$\frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{h_1} p_i + \sum_{j=1}^{h_2} q_j) \geqq \frac{1}{2}(h_1 + 2h_2) = \frac{1}{2}h_1 + h_2\,,$$

was zu beweisen war.

Literatur

[1] *R. Halin:* Über unendliche Wege in Graphen. Math. Annalen *157* (1964), 125—137.
[2] *O. Ore:* Theory of Graphs. Providence 1962.

Anschrift des Verfassers: 461 17 Liberec 1, Komenského 2 (Katedra matematiky Vysoké školy strojní a textilní).