Časopis pro pěstování matematiky

Jaromír Krys

Konfigurace v prostoru A_{mk} odvozené užitím konfigurací v prostoru A_k

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 103 (1978), No. 3, 244--249

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117980

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 103 (1978), Praha

KONFIGURACE V PROSTORU A_{mk} ODVOZENÉ UŽITÍM KONFIGURACÍ V PROSTORU A_k

JAROMÍR KRYS, Hradec Králové

(Došlo dne 30. června 1976)

Úvod. V tomto článku nejdříve vytvoříme pomocí prostoru A_k (afinní bodový prostor, jehož zaměření je vektorový prostor dimenze k nad tělesem reálných čísel) jistý model prostoru A_{mk}. Potom odvodíme konfigurace v A_{mk} pomocí konfigurací v A_k. Práce je pokračováním resp. zobecněním prací [1] a [2].

Model A_{mk}. Nechť $A_k = \{A, Z_k, \varepsilon\}$ je model afinního bodového prostoru dimenze k (A je neprázdná množina, Z_k je vektorový prostor dimenze k a ε přiřazení, které musí existovat mezi A a Z_k). Uvažujme m-členný kartézský součin $A \times A \times \ldots \ldots A = A'$, tj. množinu všech uspořádaných m-tic prvků množiny A. Stručně naznačíme základní myšlenky důkazu, že množina těchto m-tic je při vhodně zavedených operacích modelem afinního prostoru dimenze mk. Nejdříve zavedeme označení: $B = [B_1, B_2, \ldots, B_m]$ a $\mathcal{U} = (\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \ldots, \mathcal{U}_m)$, kde $B \in A'$, $B_i \in A$ pro $i = 1, 2, \ldots, m$, $\mathcal{U} \in Z_k \times Z_k \times \ldots \times Z_k$ (m-členný kartézský součin), $\mathcal{U}_i \in Z_k$ pro $i = 1, 2, \ldots, m$. Bod B_i budeme nazývat i-tý obraz bodu B a právě tak vektor $\mathcal{U}_i$ je i-tý obraz vektoru $\mathcal{U}$ pro $i = 1, 2, \ldots, m$. V A_k zvolíme uspořádanou m-tici bází: $\bar{O}_i = \{O_i, \mathcal{U}_{1i}, \mathcal{U}_{2i}, \ldots, \mathcal{U}_{ki}\}$, pro $i = 1, 2, \ldots, m$. Bodu $B = [B_1, B_2, \ldots, B_m]$ přiřadíme mk-tici čísel tak, že čísla na místech $ik, ik + 1, \ldots, ik + (k - 1)$ jsou souřadnice bodu B_i v bázi $\bar{O}_i$ (opět pro $i = 1, 2, \ldots, m$). Každé uspořádané mk-tici čísel (reálných) přiřadíme bod, jehož i-tý obraz má za souřadnice v $\bar{O}_i$ čísla na místech $ik, ik + 1, \ldots \ldots, ik + (k - 1)$. Zřejmě tedy existuje prosté zobrazení mezi množinou A' a množinou všech uspořádaných mk-tic čísel – označme ji P_{mk}. Víme, že množinu P_{mk} můžeme při vhodném zavedení příslušných operací uvažovat jako aritmetický model afinního prostoru dimenze mk, tj. A_{mk}. Nyní zavedeme, že vektory sčítáme tak, že sečteme příslušné obrazy a podobně vektor a bod sečteme tak, že sečteme příslušné obrazy. Je zřejmé, že uvažované prosté zobrazení mezi A' a P_{mk} takto zavedené operace zachovává a je tedy izomorfní. Lze tedy A' uvažovat jako model bodového prostoru dimenze mk, jehož zaměření je vektorový prostor dimenze mk nad tělesem reálných čísel. Označíme: $A_{mk} = \{A' = A_k \times A_k \times \ldots \times A_k, Z_k \times Z_k \times \ldots \times Z_k, \varepsilon\}$ a také stručněji $A_{mk} = A_k \times A_k \times \ldots \times A_k$.

Nyní uvážíme co vyplní resp. jak se interpretují podprostory prostoru A_{mk}. Platí zřejmě, že každý podprostor prostoru A_{mk} je uspořádaná m-tice množin prostoru A_k (i-tou množinu tvoří i-té obrazy). Přenecháme čtenáři, aby dokázal, že zřejmě uvažované množiny jsou podprostory prostoru A_k. Označíme: $A_s = [A_{1i_1}, A_{2i_2}, \ldots, A_{mi_m}]$, kde A_s je podprostor prostoru A_{mk} dimenze s, A_{ji_p} jsou podprostory prostoru A_k, přičemž první index, tj. j ($j = 1, 2, \ldots, m$) určuje, kterým obrazem daného A_s je A_{ji_p} a druhý index, tj. i_p, určuje rozměr podprostoru A_{ji_p} (zřejmě $p = 1, 2, \ldots, m$, avšak číslo i_p je číslo z množiny $\{0, 1, \ldots, k\}$ a čísla i_p a i'_p, kde $p \neq p'$, nemusí být různá).

Pro naše účely, tj. hledání konfigurací, nepotřebujeme znát všechny možné typy podprostorů prostoru A_{mk} a proto uvážíme jenom „přípustné" podprostory.

Věta 1. *Každou uspořádanou m-tici podprostorů $[A_{1i_1}, A_{2i_2}, \ldots, A_{mi_m}]$ prostoru A_k, přičemž platí $i_1 + i_2 + \ldots + i_m = s$, kde $s < mk$ a $i_p = 0, 1, \ldots, k$ můžeme uvažovat jako podprostor $A_s \subset A_{mk}$.*

Důkaz. Zvolíme-li bázi zaměření podprostoru A_{ji_p} vektory $\mathcal{U}_{j1}, \mathcal{U}_{j2}, \ldots, \mathcal{U}_{ji_p}$, potom zaměření A_s můžeme určit vektory: $(\mathcal{U}_{11}, \emptyset, \ldots, \emptyset)$, $(\mathcal{U}_{12}, \emptyset, \ldots, \emptyset), \ldots$
$\ldots, (\mathcal{U}_{1i_1}, \emptyset, \ldots, \emptyset)$, $(\emptyset, \mathcal{U}_{21}, \emptyset, \ldots, \emptyset)$, $(\emptyset, \mathcal{U}_{22}, \emptyset, \ldots, \emptyset), \ldots, (\emptyset, \mathcal{U}_{2i_2}, \emptyset, \ldots, \emptyset), \ldots$
$\ldots, (\emptyset, \emptyset, \ldots, \emptyset, \mathcal{U}_{j1}, \emptyset, \ldots, \emptyset)$, $(\emptyset, \ldots, \emptyset, \mathcal{U}_{j2}, \emptyset, \ldots, \emptyset), \ldots, (\emptyset, \ldots, \emptyset, \mathcal{U}_{ji_j}, \emptyset, \ldots, \emptyset), \ldots$
$\ldots, (\emptyset, \emptyset, \ldots, \emptyset, \mathcal{U}_{m1})$, $(\emptyset, \ldots, \emptyset, \mathcal{U}_{m2}), \ldots, (\emptyset, \ldots, \emptyset, \mathcal{U}_{mi_m})$

Zavedeme ještě: $\mathcal{U}_{ji_p} = \emptyset$ ($\emptyset$ je nulový vektor A_k) právě když $i_p = 0$. Nyní je zřejmé, že zaměření prostoru A_s je určeno právě $i_1 + i_2 + \cdots + i_m$ lineárně nezávislými vektory a uvažovaný A_s má dimenzi s

Konfigurace v A_{mk} odvozené pomocí konfigurací v A_k.

Příklad. V rovině A_2 je dána konfigurace K typu $(9_3, 9_3)$ Odvoďte v prostoru $A_6 = A_2 \times A_2 \times A_2$ konfigurace K_i pomocí konfigurace K.

Řešení I. a) Bodem konfigurace K_1 je uspořádaná trojice bodů konfigurace K — je jich zřejmě $9^3 = 729$.

b) Přímkou konfiguracee K_1 je uspořádaná trojice $[A_{1i_1}, A_{2i_2}, A_{3i_3}]$, přičemž právě jedno $i_p = 1$ a ostatní dvě jsou rovna nule; A_{ji_p} je prvek konfigurace K. Všech přímek K_1 je $9 \cdot 81 \cdot 3 = 2187$, neboť v K je 9 přímek a 81 různých uspořádaných dvojic bodů a každá přímka může být prvním, druhým resp. třetím obrazem. Na každé přímce v K_1 leží zřejmě právě tři body z K_1.

c) Rovinou konfigurace K_1 je uspořádaná trojice podprostorů konfigurace K: $[A_{1i_1}, A_{2i_2}, A_{3i_3}]$, přičemž právě jedno $i_p = 0$ a ostatní dvě jsou rovny jedné. Všech rovin v K_1 je $81 \cdot 9 \cdot 3 = 2187$, neboť existuje 81 uspořádaných dvojic přímek, bodů je 9 a každý z nich může být 1., 2., 3. obrazem. Nechť $[ABC, EFG, H]$ je rovina konfigurace K_1, jejíž první obraz je přímka obsahující body A, B a C konfigurace K, druhý obraz přímka obsahující body E, F a G a konečně třetí obraz je jediný bod H. Tato rovina zřejmě obsahuje těchto dvět bodů: $[A, E, H]$, $[A, F, H]$, $[A, G, H]$, $[B, E, H]$, $[B, F, H]$, $[B, G, H]$, $[C, E, H]$, $[C, F, H]$, $[C, G, H]$. Dále tato rovina obsahuje těchto šest přímek: $[A, EFG, H]$, $[B, EFG, H]$, $[C, EFG, H]$, $[ABC, E\ H]$, $[ABC, F, H]$ a $[ABC, G, H]$. Toto platí zřejmě pro každou rovinu.

d) Trojrozměrným prostorem konfigurace K_1 je uspořádaná trojice $[A_{11}, A_{21}, A_{31}]$, tj. uspořádaná trojice přímek konfigurace K – je jich zřejmě $9^3 = 729$. V každém trojrozměrném prostoru leží 27 bodů, neboť daný trojrozměrný prostor lze např. vyjádřit ve tvaru $[ABC, EFG, HKM]$ a zřejmě počet bodů tohoto prostoru je roven trojnásobku počtu bodů obsažených v rovině. Právě tak v tomto trojrozměrném prostoru leží 27 přímek. $[ABC, E, H]$, $[ABC, E, K]$, $[ABC, E, M]$, $[ABC, F, H]$, $[ABC, F, K]$, $[ABC, F, M]$, $[ABC, G, H]$, $[ABC, G, K]$, $[ABC, G, M]$ a obdobně dostaneme devět přímek s konstantní přímkou EFG a právě tak devět přímek s přímkou HKM. Zřejmě v každém tomto prostoru leží devět rovin.

e) Čtyřrozměrným prostorem konfigurace K_1 je uspořádaná trojice $[A_{1i_1}, A_{2i_2}, A_{3i_3}]$ podprostorů konfigurace K, přičemž právě jedno $i_p = 2$ a ostatní dvě jsou rovny jedné. Všech uspořádaných dvojic přímek je 81 a rovina může být prvním, druhým resp. třetím obrazem daného prostoru – tedy všech čtyřrozměrných prostorů konfigurace K_1 je právě $81 . 3 = 243$. V každém čtyřrozměrném prostoru leží 81 bodů; je to devítinásobek počtu bodů ležících v rovině. Nechť daný čtyřrozměrný prostor je $[ABC, EFG, ABCEFGHKM]$. V tomto prostoru leží 27 přímek s konstantním prvním obrazem ABC, 27 přímek s konstantním druhým obrazem EFG a 81 přímek, jejichž třetí obraz je přímka konfigurace K; leží tedy v každém čtyřrozměrném prostoru 135 přímek. V každém čtyřrozměrném prostoru leží právě devět trojrozměrných prostorů – např. v uvažovaném prostoru $[ABC, EFG, ABCEFGHKM]$ leží jedině trojrozměrné prostory $[ABC, EFG, \ldots]$, kde třetím obrazem je přímka konfigurace K a těchto přímek je právě devět.

f) Nadrovinou konfigurace K_1 je uspořádaná trojice $[A_{1i_1}, A_{2i_2}, A_{3i_3}]$, přičemž právě jedno i_p je rovno jedné a ostatní dvě jsou rovny dvěma. Zřejmě těchto nadrovin je 27, neboť rovinou může být první a druhý obraz, první a třetí, druhý a třetí – zbývající obraz musí být vždy přímkou a těch je právě devět – tedy $3 . 9 = 27$. V nadrovině leží 243 bodů, neboť je-li např. $[ABCEFGHKM, ABCEFGHKM, ABC]$, potom bodů ležících v tomto prostoru a majících za třetí obraz bod A je 81 a právě tak je 81 bodů s třetím obrazem v bodě B i C. Počet přímek obsažených v daném podprostoru je 567 a sice 81 přímek má za třetí obraz přímku ABC, 243 má za první obraz přímku a zbývající dva jsou body a 243 má druhý obraz přímku a zbývající dva jsou body. V daném podprostoru leží celkem 405 rovin a sice 243 z nich má první a druhý obraz přímku, 81 má první a třetí obraz přímku a 81 má druhý a třetí obraz přímku. Počet trojrozměrných prostorů ležících v nadrovině je zřejmě 81 a snadno spočítáme, že nadrovina obsahuje právě 18 čtyřrozměrných podprostorů.

Čísla na a pod hlavní diagonálou matice konfigurace K_1 jsme dostali v předcházející úvaze. Přenecháme čtenáři, aby ověřil správnost i ostatních čísel, přičemž nezapomeneme, že musí platit $a_{ss} \, . \, a_{sk} = a_{ks} \, . \, a_{kk}$ (je-li $s < k$, potom předcházející zápis čteme: počet s-rozměrných prostorů konfigurace násobený počtem k-rozměrných podprostorů procházejících daným s-rozměrným podprostorem je roven součinu s-rozměrných podprostorů obsažených v daném k-rozměrném prostoru s počtem všech k-rozměrných podprostorů dané konfigurace). Matice konfigurace K_1:

$$\begin{bmatrix} 729 & 9 & 27 & 27 & 27 & 9 \\ 3 & 2187 & 6 & 9 & 15 & 7 \\ 9 & 6 & 2187 & 3 & 1 & 5 \\ 27 & 27 & 9 & 729 & 3 & 3 \\ 81 & 135 & 9 & 9 & 243 & 2 \\ 243 & 567 & 405 & 81 & 18 & 27 \end{bmatrix}.$$

Řešení II. a) Bodem, přímkou a nadrovinou nechť je v K_2 táž trojice jako v K_1.

b) Rovinou konfigurace K_2 je uspořádaná trojice podprostorů konfigurace K: $[A_{1i_1}, A_{2i_2}, A_{3i_3}]$, přičemž právě jedno $i_p = 2$ a ostatní jsou rovny nule. Uspořádaných dvojic bodů konfigurace K je právě 81 a rovina může být prvním, druhým resp. třetím obrazem dané roviny. Všech rovin konfigurace K_2 je tedy $81 \, . \, 3 = 243$.

c) Trojrozměrným prostorem je uspořádaná trojice $[A_{1i_1}, A_{2i_2}, A_{3i_3}]$, přičemž právě jedno $i_p = 0$, právě jedno $i_p = 1$ a právě jedno $i_p = 2$. Zvolíme-li např. rovinu jako první obraz, dostáváme $81 \, . \, 2 = 162$ různých trojrozměrných prostorů; konfigurace K_2 obsahuje celkem $162 \, . \, 3 = 486$ navzájem různých trojrozměrných prostorů.

d) Čtyřrozměrným prostorem konfigurace K_2 je uspořádaná trojice $[A_{1i_2}, A_{2i_2}, A_{3i_3}]$, přičemž právě jedno $i_p = 0$ a ostatní jsou rovny dvěma. Zřejmě všech těchto prostorů je 27.

Dostali jsme čísla na hlavní diagonále matice konfigurace K_2 a přenecháme čtenáři ověření správnosti ostatních čísel matice konfigurace K_2:

$$\begin{bmatrix} 729 & 9 & 3 & 18 & 3 & 9 \\ 3 & 2187 & 1 & 8 & 2 & 7 \\ 9 & 9 & 243 & 6 & 2 & 6 \\ 27 & 36 & 3 & 486 & 1 & 4 \\ 81 & 162 & 18 & 18 & 27 & 3 \\ 243 & 567 & 54 & 72 & 3 & 27 \end{bmatrix}.$$

Řešení III. Bodem, přímkou, rovinou a nadrovinou v konfiguraci K_3 nechť je táž trojice jako v konfiguraci K_1. Trojrozměrný a čtyřrozměrný prostor v konfiguraci K_3 nechť je táž trojice jako v konfiguraci K_2. Snadno zjistíme, že konfigurace K_3 má matici:

$$\begin{bmatrix} 729 & 9 & 27 & 18 & 3 & 9 \\ 3 & 2187 & 6 & 8 & 2 & 7 \\ 9 & 6 & 2187 & 2 & 1 & 5 \\ 27 & 36 & 9 & 486 & 1 & 4 \\ 81 & 162 & 81 & 18 & 27 & 3 \\ 243 & 567 & 405 & 72 & 3 & 27 \end{bmatrix}.$$

Řešení IV. Nechť v konfiguraci K_4 je rovina a trojrozměrný prostor táž trojice jako v konfiguraci K_2 a ostatní prostory jsou stejné jako v konfiguraci K_1. Dostáváme:

$$\begin{bmatrix} 729 & 9 & 3 & 18 & 27 & 9 \\ 3 & 2187 & 1 & 8 & 15 & 7 \\ 9 & 9 & 243 & 6 & 9 & 6 \\ 27 & 36 & 3 & 486 & 3 & 4 \\ 81 & 135 & 9 & 6 & 243 & 2 \\ 243 & 567 & 54 & 72 & 18 & 27 \end{bmatrix}.$$

Na předcházejícím příkladě jsme si ověřili, že zcela jednoduchým (avšak hodně pracným) způsobem můžeme pomocí konfigurace v A_2 odvozovat konfigurace v A_6. Dále jsme viděli, že dostáváme celou řadu možností pro volbu „přípustných" podprostorů. Ještě poznamenáme, že nelze volit všechny možné kombinace, např. čtyřrozměrný prostor jako v konfiguraci K_2, ostatní jako v konfiguraci K_1, neboť zvolený čtyřrozměrný prostor neobsahuje žádný trojrozměrný prostor.

Jedno z možných pokračování tohoto článku by bylo (tak jako v [2]), zcela obecně k dané konfiguraci najít matice příslušných konfigurací. Předcházejícím příkladem jsme ukázali, že tato práce by byla značně rozsáhlá a proto ukončíme tento článek obecnou větou.

Věta 2. *Nechť existuje v prostoru A_k konfigurace K. V prostoru $A_{mk} = A_k \times \times A_k \times \ldots \times A_k$ uvažujme množinu podprostorů, pro které platí:*

1. *Jestliže A_j patří uvažované množině, potom $A_j = [A_{1i_1}, A_{2i_2}, \ldots, A_{mi_m}]$, přičemž $A_{ji_p} \in K$ a $i_1 + i_2 + \ldots + i_m = j$.*

2. *Nechť A_j a A'_j jsou dva různé podprostory uvažované množiny a $A'_j = [A_{1i'_1}, A_{2i'_2}, \ldots, A_{mi'_m}]$, potom v součtu $i'_1 + i'_2 + \ldots + i'_m$ lze provést záměnu sčítanců tak, že platí $i_1 = i'_{j_1}, i_2 = i'_{j_2}, \ldots, i_m = i'_{j_m}$.*

3. *Každý podprostor uvažované množiny má vlastní podprostory všech dimenzí náležející dané množině.*

Všechny podprostory s předcházejícími vlastnostmi určují konfiguraci (označme ji K_t) v prostoru $A_{mk} = A_k \times A_k \times \ldots \times A_k$.

Důkaz. Je třeba dokázat, že každý s-rozměrný podprostor množiny K_i je incidentní vždy s týmž počtem k-rozměrných podprostorů množiny K_i. Každý s-rozměrný resp. k-rozměrný podprostor konfigurace K_i je uspořádaná m-tice jistých podprostorů konfigurace K. V konfiguraci K platí, že každý s'-rozměrný podprostor je incidentní s týmž počtem k'-rozměrných podprostorů. Z našeho příkladu a předcházející úvahy je vidět, že počet s-rozměrných podprostorů K_i incidentních s k-rozměrným podprostorem K_i vypočteme tak, že budeme vhodně násobit a sčítat čísla matice konfigurace K. Z vlastnosti 2) plyne, že počet těchto s-rozměrných podprostorů incidentních s daným k-rozměrným podprostorem bude vždy stejný.

Literatura

[1] *Jaromír Krys:* Konfigurace v čtyřrozměrném prostoru odvozené užitím rovinných konfigurací, Časopis pro pěstování matematiky roč. *100* (1975) str. 129—134.

[2] *Jaromír Krys:* O jednom modelu $2k$-rozměrného prostoru, Časopis pro pěstování matematiky roč. *101* (1976) str. 20—27.

Adresa autora: 501 91 Hradec Králové, Orlické nábř. č. 1 (Katedra matematiky pedagogické fakulty).

Zusammenfassung

KONFIGURATIONEN IM RAUM A_{mk}, DIE MIT HILFE DER KONFGURATIONEN IM RAUM A_k HERGELEITET SIND

JAROMÍR KRYS, Hradec Králové

Sei $A_k = \{A, Z_k, \varepsilon\}$ ein Modell eines affinen Punktraumes der Dimension k. Das m-gliedrige kartesische Produkt $A' = A \times A \times \ldots \times A$ kann man als ein Modell des Raumes A_{mk}, d. h. des affinen Punktraumes der Dimension mk untersuchen. Ein Unterraum des Raumes A_{mk} ist ein geordnetes m-tupel der Unterräume des Raumes A_k. Es sei K eine Konfiguration in A_k. Dann kann man die Konfigurationen K_i in A_{mk} herleiten, wobei die Unterräume der Konfigurationen K_i passend gewählte geordnete m-tupel der Unterräume der Konfiguration K sind. Wenn diese Ergebnisse für ein Modell gelten, dann gelten sie für alle, d. h. die erwägten Konfigurationen existieren im affinen Raum gegebener Dimension.