Časopis pro pěstování matematiky

Leo Boček

Isoperimetrische Ungleichungen für räumliche Kurven und Polygone

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 104 (1979), No. 1, 86--92

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/118002

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 104 (1979), Praha

ISOPERIMETRISCHE UNGLEICHUNGEN FÜR RÄUMLICHE KURVEN UND POLYGONE

LEO BOČEK, Praha

(Eingegangen am 20. Dezember 1977)

Wir bezeichnen mit $V(E_n)$ den Vektorraum aller Vektoren des n-dimensionalen euklidischen Raumes E_n und mit $W = V(E_n) \wedge V(E_n)$ das antisymmetrische Tensorprodukt des Raumes $V(E_n)$ mit sich selbst. Für den Vektorraum W führen wir das Skalarprodukt so ein, daß $(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b})(\boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{ac})(\boldsymbol{bd}) - (\boldsymbol{ad})(\boldsymbol{bc})$ gilt, wo $\boldsymbol{ab}$ das Skalarprodukt der Vektoren $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ in $V(E_n)$ bezeichnet. Es ist dann $\|\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}\|^2 = \|\boldsymbol{a}\|^2 \|\boldsymbol{b}\|^2 - (\boldsymbol{ab})^2$. Dabei benutzen wir dieselbe Bezeichnung für die Norm eines Vektors in $V(E_n)$ und für die Norm eines Vektors in W.

Es sei in E_n eine geschlossene und rektifizierbare Kurve $\mathscr{C}$ durch ihre parametrische Darstellung $\boldsymbol{x} : \boldsymbol{R} \to E_n$ gegeben, wobei wir den Punkt $\boldsymbol{x}(t)$ mit seinem Ortsvektor bezüglich eines fest gewählten Anfangspunktes P identifizieren. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir voraussetzen, daß wir als Parameter t die Bogenlänge oder ein konstantes Vielfaches der Bogenlänge genommen haben. Wir bezeichnen mit L die Länge der geschlossenen Kurve $\mathscr{C}$ und nehmen an, den Parameter t so gewählt zu haben, daß $\mathbf{x}(t + 2\pi) = \mathbf{x}(t)$, $\|\mathrm{d}\mathbf{x}/\mathrm{d}t\| = L/2\pi$ gilt.

Es ist dann

$$\frac{L^2}{2\pi} = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t}\right) \mathrm{d}t\,.$$

Wir setzen

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(\boldsymbol{x} \wedge \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t}\right) \mathrm{d}t \in W$$

und bezeichnen diesen Vektor als *Flächenvektor* der Kurve $\mathscr{C}$. Ist nämlich $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ eine orthonormierte Basis in $V(E_n)$, so ist

$$\boldsymbol{F} = \sum_{i<j} F^{ij}(\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j)\,,$$

wo F^{ij} der „orientierte" Flächeninhalt des Normalrisses der Kurve $\mathscr{C}$ in die Ebene $\{P, \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j\}$ ist. Es ist unmittelbar zu sehen, daß $\boldsymbol{F}$ nicht von der Wahl des Nullpunktes

P und bis auf das Vorzeichen auch nicht von der Wahl des Parameters t abhängt. Für das weitere Verfahren werden wir voraussetzen, daß wir den Nullpunkt P im Schwerpunkt der Kurve $\mathscr{C}$ gewählt haben, also

$$\int_0^{2\pi} \boldsymbol{x}(t)\,\mathrm{d}t = \boldsymbol{0}$$

gilt. Dann ist nach dem Lemma von Wirtinger

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}\right) \mathrm{d}t \geqq \int_0^{2\pi} (\boldsymbol{x}\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}t\,,$$

wobei das Gleichheitszeichen genau dann gilt, wenn $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}\cos t + \boldsymbol{b}\sin t$ ist; $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ sind fest gewählte Vektoren aus $V(E_n)$. Nach einer Verschärfung des Lemmas von Wirtinger (s. [4]) ist sogar

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}\right) \mathrm{d}t - \int_0^{2\pi} (\boldsymbol{x}\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}t \geqq 2\pi \left\|\frac{\boldsymbol{x}(0) + \boldsymbol{x}(\pi)}{2}\right\|^2$$

und das Gleichheitszeichen gilt jetzt genau dann, wenn $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{a}\cos t + \boldsymbol{b}\sin t + \boldsymbol{c}(2 - \pi|\sin t|)$, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in V(E_n)$ ist. Wir benutzen weiter die Ungleichung $2\|\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}\| \leqq \boldsymbol{a}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\boldsymbol{b}$, in der das Gleichheitszeichen dann und nur dann gilt, wenn $\boldsymbol{a}\boldsymbol{b} = 0$ und $\|\boldsymbol{a}\| = \|\boldsymbol{b}\|$ ist. Wir bekommen somit den

Satz 1. *Für eine geschlossene und rektifizierbare Kurve $\mathscr{C}$ in E_n gilt $L^2 \geqq 4\pi\|\boldsymbol{F}\| + 2\pi^2 d^2$, wo L die Länge der Kurve bezeichnet, $\boldsymbol{F}$ ist ihr Flächenvektor und d ist der Abstand des Schwerpunktes der Kurve von dem Mittelpunkt zweier solcher Punkte der Kurve $\mathscr{C}$, die die Kurve in zwei gleich lange Teile halbieren. Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn die Kurve eine Kreislinie ist.*

Beweis. Es ist

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}\right) \mathrm{d}t \geqq \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}\right) \mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (\boldsymbol{x}\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}t + \pi\left\|\frac{\boldsymbol{x}(0) + \boldsymbol{x}(\pi)}{2}\right\|^2 \geqq$$

$$\geqq \int_0^{2\pi} \left\|\boldsymbol{x} \wedge \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}\right\| \mathrm{d}t + \pi d^2 \geqq \left\|\int_0^{2\pi} \left(\boldsymbol{x} \wedge \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}\right) \mathrm{d}t\right\| + \pi d^2\,,$$

das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn außer $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}\cos t + \boldsymbol{b}\sin t + \boldsymbol{c}(2 - \pi\,|\sin t|)$ noch

$$\boldsymbol{x}\boldsymbol{x} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{x}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = 0$$

gilt. Die letzten zwei Bedingungen ergeben $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$, $\|\boldsymbol{a}\| = \|\boldsymbol{b}\|$, $\boldsymbol{a}\boldsymbol{b} = 0$, die Kurve ist eine Kreislinie.

Bemerkung. Für $n = 2$ und eine einfache geschlossene Kurve geht die abgeleitete Ungleichung $L^2 \geqq 4\pi\|\boldsymbol{F}\|$ in die klassische isoperimetrische Ungleichung über, im Falle $n = 3$ bekommen wir die Ungleichung von BLASCHKE und LEICHTWEISS, die als Übungsaufgabe in [2], S. 77 angegeben ist.

Satz 2. *Für jeden Einheitsvektor $\boldsymbol{A} \in W$ ist*

$$L^2 \geqq 4\pi(\boldsymbol{AF}) + 2\pi^2 d^2 ,$$

das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn $\mathscr{C}$ eine Kreislinie mit der Darstellung $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{a} \cos t + \boldsymbol{b} \sin t$ ist und

$$\boldsymbol{A} = \|\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}\|^{-1} (\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) \text{ } gilt .$$

Beweis. Die Behauptung folgt unmittelbar aus der Ungleichung von Cauchy und des vorstehenden Satzes.

Es sei $\mathscr{C}$ ein räumliches m-Eck in E_n mit den Eckpunkten $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_m = \boldsymbol{x}_0$. Wir setzen $\boldsymbol{F} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{x}_{i-1} \wedge \boldsymbol{x}_i$ und bezeichnen diesen Vektor aus W als *Flächenvektor* des Polygons $\mathscr{C}$. Er hängt nicht von der Wahl des Nullpunktes P ab und weil auch

$$\boldsymbol{F} = \tfrac{1}{4}\sum_{i=1}^{m} (\boldsymbol{x}_{i-1} + \boldsymbol{x}_i) \wedge (\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_{i-1})$$

gilt, ist

$$\begin{aligned}
8 \operatorname{tg}\frac{\pi}{m} \|\boldsymbol{F}\| &\leqq 2 \operatorname{tg}\frac{\pi}{m} \sum_{i=1}^{m} \|(\boldsymbol{x}_{i-1} + \boldsymbol{x}_i) \wedge (\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_{i-1})\| \leqq \\
&\leqq 2 \operatorname{tg}\frac{\pi}{m} \sum_{i=1}^{m} \|\boldsymbol{x}_{i-1} + \boldsymbol{x}_i\| \cdot \|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_{i-1}\| \leqq \\
&\leqq \sum_{i=1}^{m} \left(\|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_{i-1}\|^2 + \operatorname{tg}^2\frac{\pi}{m} \|\boldsymbol{x}_{i-1} + \boldsymbol{x}_i\|^2\right) = \\
&= \sum_{i=1}^{m} \left[\|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_{i-1}\|^2 + \operatorname{tg}^2\frac{\pi}{m} (4\|\boldsymbol{x}_i\|^2 - \|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_{i-1}\|^2)\right].
\end{aligned}$$

Wir können wieder voraussetzen, daß wir den Nullpunkt im Schwerpunkt des Polygons gewählt haben. Nach der diskreten Analogie des Lemmas von Wirtinger (s. [3]) gilt dann die Ungleichung

$$4 \sin^2\frac{\pi}{m} \sum_{i=1}^{m} \|\boldsymbol{x}_i\|^2 \leqq \sum_{i=1}^{m} \|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_{i-1}\|^2$$

mit dem Gleichheitszeichen genau dann, wenn gilt

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{a} \cos \frac{2\pi i}{m} + \mathbf{b} \sin \frac{2\pi i}{m}, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{1}$$

Aus den letzten zwei Ungleichungen folgt der

Satz 3. *Für ein m-Eck in E_n mit den Seitenlägen $d_i\,(i = 1, \ldots, m)$ gilt*

$$\sum_{i=1}^{m} d_i^2 \geqq 4 \operatorname{tg} \frac{\pi}{m} \|\mathbf{F}\|,$$

das Gleichheitszeichen gilt dann und nur dann, wenn es sich um ein ebenes konvexes und regelmäßiges m-Eck handelt. Für jeden Einheitsvektor $\mathbf{A} \in W$ ist

$$\sum_{i=1}^{m} d_i^2 \geqq 4 \operatorname{tg} \frac{\pi}{m} |\mathbf{AF}|,$$

das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn das m-Eck eben, konvex und regelmäßig ist und $\mathbf{A}$ die Form $\mathbf{c} \wedge \mathbf{d}$ hat, wo $\mathbf{c}, \mathbf{d}$ Vektoren aus der Ebene des m-Ecks sind.

Beweis. Es genügt nur noch zu ermitteln, wann in der bewiesenen Ungleichung das Gleichheitszeichen gilt. Das kann nur dann geschehen, wenn (1) gilt und gleichzeitig $\|\mathbf{x}_{i-1} - \mathbf{x}_i\| = \operatorname{tg}(\pi/m) \|\mathbf{x}_i + \mathbf{x}_{i-1}\|$ und $(\mathbf{x}_{i-1} + \mathbf{x}_i)(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i-1}) = 0$ also $\|\mathbf{x}_i\| = \|\mathbf{x}_{i-1}\|$ gilt. Daraus folgt $\|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{b}\|$, $\mathbf{ab} = 0$, das Polygon ist eben, konvex und regelmäßig, $\mathbf{F}$ ist ein Vielfaches von $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$. Umgekehrt ist einfach zu sehen, daß für ein ebenes, konvexes und regelmäßiges m-Eck das Gleichheitszeichen gilt. Der zweite Teil des Satzes folgt unmittelbar aus der ersten Aussage.

Bemerkung. Für ein gleichseitiges m-Eck nimmt die abgeleitete Ungleichung die Form $L^2 \geqq 4m \operatorname{tg}(\pi/m) \|\mathbf{F}\|$ an, wo mit L die Gesamtlänge des Polygons bezeichnet wurde. Für $n = 2$ ist diese Ungleichung mit der klassischen isoperimetrischen Ungleichung für ebene m-Ecke identisch, siehe [1].

Wir werden jetzt noch zeigen, wie man die bevorstehenden Sätze mittels der Fourierschen Reihen (im Falle der Kurven) oder mittels der Fourierschen Polynome (im Falle der Polygone) beweisen kann.

Beweis des Satzes 1. Wir setzen

$$\mathbf{x}(t) = \tfrac{1}{2}\mathbf{a}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\mathbf{a}_k \cos kt + \mathbf{b}_k \sin kt).$$

Aus

$$\int_0^{2\pi} \mathbf{x}(t)\, \mathrm{d}t = \mathbf{0} \quad \text{folgt} \quad \mathbf{a}_0 = \mathbf{0},$$

weiter ist

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}(t)}{\mathrm{d}t} = \sum_{k=1}^{\infty} k(\boldsymbol{b}_k \cos kt - \boldsymbol{a}_k \sin kt)\,.$$

Aus der Rektifizierbarkeit der Kurve folgt die Konvergenz der Reihe

$$\pi \sum_{k=1}^{\infty} k^2(\boldsymbol{a}_k\boldsymbol{a}_k + \boldsymbol{b}_k\boldsymbol{b}_k)$$

und ihre Summe ist gleich

$$\frac{L^2}{2\pi} = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t}\right) \mathrm{d}t\,.$$

Für $\boldsymbol{F}$ bekommen wir

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(\mathbf{x} \wedge \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t}\right) \mathrm{d}t = \pi \sum_{k=1}^{\infty} k(\boldsymbol{a}_k \wedge \boldsymbol{b}_k)\,,$$

weiter gilt

$$\frac{\mathbf{x}(0) + \mathbf{x}(\pi)}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \boldsymbol{a}_{2k}\,.$$

Wir sollen also die Ungleichung

$$\text{(2)} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} k^2(\boldsymbol{a}_k\boldsymbol{a}_k + \boldsymbol{b}_k\boldsymbol{b}_k) \geqq 2\left\|\sum_{k=1}^{\infty} k(\boldsymbol{a}_k \wedge \boldsymbol{b}_k)\right\| + \sum_{k,m=1}^{\infty} \boldsymbol{a}_{2k}\boldsymbol{a}_{2m}$$

beweisen. Wir beweisen sogar die wegen $\boldsymbol{aa} + \boldsymbol{bb} \geqq 2\|\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}\|$ stärkere Ungleichung

$$\text{(3)} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} k^2(\boldsymbol{a}_k\boldsymbol{a}_k + \boldsymbol{b}_k\boldsymbol{b}_k) \geqq \sum_{k=1}^{\infty} k(\boldsymbol{a}_k\boldsymbol{a}_k + \boldsymbol{b}_k\boldsymbol{b}_k) + \sum_{k,m=1}^{\infty} \boldsymbol{a}_{2k}\boldsymbol{a}_{2m}\,.$$

Es ist

$$(4k^2 - 2k)^{-1}(4m^2 - 2m)^{-1}\,\|(4k^2 - 2k)\,\boldsymbol{a}_{2k} - (4m^2 - 2m)\,\boldsymbol{a}_{2m}\|^2 \geqq 0$$

und damit

$$\sum_{k,m=1}^{\infty} (4k^2 - 2k)(4m^2 - 2m)^{-1}\,\|\boldsymbol{a}_{2k}\|^2 \geqq \sum_{k,m=1}^{\infty} \boldsymbol{a}_{2k}\boldsymbol{a}_{2m}$$

und weil

$$\sum_{m=1}^{\infty} (4m^2 - 2m)^{-1} = \ln 2 < 1$$

gilt, ist die Ungleichung (3) und also auch (2) bewiesen. In der Ungleichung (3) gilt das Gleichheitszeichen genau dann, wenn $\boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{b}_k = \boldsymbol{0}$ für $k = 2, 3, \ldots$ ist. In der

Ungleichung (2) gilt das Gleichheitszeichen, wenn außerdem noch $\|\boldsymbol{a}_1\| = \|\boldsymbol{b}_1\|$, $\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_1 = 0$ gilt, also genau dann, wenn die Kurve eine Kreislinie ist. Die Gültigkeit der schwächeren Ungleichung $L^2 \geqq 4\pi\|\boldsymbol{F}\|$ folgt unmittelbar aus

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2(\boldsymbol{a}_k\boldsymbol{a}_k + \boldsymbol{b}_k\boldsymbol{b}_k) \geqq \sum_{k=1}^{\infty} k(\boldsymbol{a}_k\boldsymbol{a}_k + \boldsymbol{b}_k\boldsymbol{b}_k),$$

Gleichheit besteht nur im Fall einer Kreislinie.

Beweis des Satzes 3. Das Polygon sei durch seine Eckpunkte $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_m = \boldsymbol{x}_0$ gegeben, der Schwerpunkt soll im Nullpunkt liegen, d. h. $\sum_{k=1}^{m} \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{0}$. Wir setzen

$$\boldsymbol{a}_k = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{x}_j \cos\frac{2\pi kj}{m}, \quad \boldsymbol{b}_k = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{x}_j \sin\frac{2\pi kj}{m}, \quad k = 0, 1, \ldots, m.$$

Es ist dann $\boldsymbol{a}_m = \boldsymbol{a}_0 = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{b}_m = \boldsymbol{b}_0 = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{a}_{m-k} = \boldsymbol{a}_k$, $\boldsymbol{b}_{m-k} = -\boldsymbol{b}_k$. Wegen $\sum_{k=1}^{m} \sin(2\pi kj/m) = 0$ und wegen $\sum_{k=1}^{m} \cos(2\pi kj/m) = m$ wenn j ein ganzes Vielfaches von m ist und $\sum_{k=1}^{m} \cos(2\pi kj/m) = 0$ wenn das nicht der Fall ist, bekommen wir

$$\boldsymbol{x}_j = \sum_{k=1}^{m}\left(\boldsymbol{a}_k \cos\frac{2\pi kj}{m} + \boldsymbol{b}_k \sin\frac{2\pi kj}{m}\right), \quad j = 1, \ldots, m.$$

Wir haben also

$$\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_{j-1} = \sum_{k=1}^{m}\left[\left(1 - \cos\frac{2\pi k}{m}\right)\boldsymbol{a}_k + \sin\frac{2\pi k}{m} \,.\, \boldsymbol{b}_k\right]\cos\frac{2\pi kj}{m} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty}\left[-\sin\frac{2\pi k}{m} \,.\, \boldsymbol{a}_k + \left(1 - \cos\frac{2\pi k}{m}\right)\boldsymbol{b}_k\right]\sin\frac{2\pi kj}{m}.$$

Daraus erhält man

$$\sum_{j=1}^{m} \|\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_{j-1}\|^2 = m\sum_{k=1}^{m} 4\sin^2\frac{\pi k}{m}(\boldsymbol{a}_k\boldsymbol{a}_k + \boldsymbol{b}_k\boldsymbol{b}_k).$$

Ähnlich erhält man für $\boldsymbol{F}$ das Ergebnis

$$\boldsymbol{F} = 2m\sum_{k=1}^{m} \sin\frac{\pi k}{m}\cos\frac{\pi k}{m}(\boldsymbol{a}_k \wedge \boldsymbol{b}_k).$$

Wir wollen die Ungleichung

$$(4) \qquad 4m\sum_{k=1}^{m} \sin^2\frac{\pi k}{m}(\boldsymbol{a}_k\boldsymbol{a}_k + \boldsymbol{b}_k\boldsymbol{b}_k) \geqq$$

$$\geqq 4 \operatorname{tg} \frac{\pi}{m} \cdot 2m \left\| \sum_{k=1}^{m} \sin \frac{\pi k}{m} \cos \frac{\pi k}{m} (\boldsymbol{a}_k \wedge \boldsymbol{b}_k) \right\|$$

beweisen, wir beweisen die schärfere Ungleichung

$$(5) \qquad \sum_{k=1}^{m} \sin^2 \frac{\pi k}{m} (\boldsymbol{a}_k \boldsymbol{a}_k + \boldsymbol{b}_k \boldsymbol{b}_k) \geqq \operatorname{tg} \frac{\pi}{m} \sum_{k=1}^{m-1} \sin \frac{\pi k}{m} \left| \cos \frac{\pi k}{m} \right| (\boldsymbol{a}_k \boldsymbol{a}_k + \boldsymbol{b}_k \boldsymbol{b}_k) .$$

Man sieht aber sofort, daß diese Ungleichung gilt, weil

$$\sin \frac{\pi k}{m} \geqq \operatorname{tg} \frac{\pi}{m} \left| \cos \frac{\pi k}{m} \right|$$

für $k = 1, \ldots, m - 1$ gilt und nur für $k = 1$ und $k = m - 1$ gilt das Gleichheitszeichen. In (5) gilt also das Gleichheitszeichen genau dann, wenn nur $\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{a}_{m-1}$, $\boldsymbol{b}_1 = -\boldsymbol{b}_{m-1}$ vom Nullvektor verschieden sind. In (4) gilt das Gleichheitszeichen wenn außerdem noch $\boldsymbol{a}_1$ und $\boldsymbol{b}_1$ orthogonal und gleich groß sind. Es ist dann $\boldsymbol{x}_j = 2(\boldsymbol{a}_1 \cos(2\pi j/m) + \boldsymbol{b}_1 \sin(2\pi j/m))$, das Polygon ist eben konvex und regelmäßig.

Literatur

[1] *Blaschke W.:* Kreis und Kugel, Leipzig 1916.

[2] *Blaschke W., Leichtweiss K.:* Elementare Differentialgeometrie, Springer Verlag Berlin—Heidelberg—New York 1973.

[3] *Fan K., Taussky O., Todd J.:* Discrets Analogs of Inequalities of Wirtinger, Monatsh. Math. *59* (1955), 73—90.

[4] *Nádeník Z.:* Die Verschärfung einer Ungleichung von Frobenius für den gemischten Flächeninhalt der konvexen ebenen Bereiche. Čas. pro pěst. matem. *90* (1965), 220—225.

Anschrift des Verfassers: 186 00 Praha 8 - Karlín, Sokolovská 83 (Matematicko-fyzikální fakulta UK).