Jiří Sedláček

Lokální vlastnosti grafů

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 106 (1981), No. 3, 290--298

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/118102`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 106 (1981), Praha

LOKÁLNÍ VLASTNOSTI GRAFŮ

JIŘÍ SEDLÁČEK, Praha

(Došlo dne 6. dubna 1979)

Grafem $G = [U, H]$ zde rozumíme neorientovaný graf bez smyček a násobných hran. Přitom U je uzlová množina a H hranová množina grafu G. Smluvíme si stručné označení

$$U_n = \{u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n\}.$$

Úplný graf na p uzlech označujeme K_p, zatímco $K_{a,b}$ značí úplný sudý graf, jenž má a uzlů první třídy a b uzlů třídy druhé. (Konečný) had délky d (tj. had s d hranami) se pro stručnost nazývá *d-had*. Graf komplementární ke grafu G označíme $\bar{G}$, stupeň uzlu x v grafu G zapisujeme st (x, G) nebo krátce st x. Grafem $G - h$ rozumíme graf G zbavený hrany h. Pojmy, jež zde nejsou definovány, se najdou např. v knížce [5].

Existuje už několik prací, jež se zabývají lokálními vlastnostmi grafů. Důležitým pojmem v nich je okolí uzlu resp. hrany. Pojem okolí uzlu zavedl A. A. Zykov [7] při formulaci jednoho problému (spoluautor B. A. Trachtěnbrot) a také v knize [12]. Nechť G je graf a u jeho uzel splňující st $u \geqq 1$. *Okolím* $N_1(u)$ uzlu u rozumíme podgraf grafu G indukovaný na množině všech uzlů sousedních s u. Někdy místo $N_1(u)$ píšeme podrobněji $N_1(u, G)$. Je-li st $u = 0$, pak za $N_1(u, G)$ pokládáme prázdný graf. Zykovův problém, který V. G. Vizing rovněž zařadil do svého seznamu důležitých otázek [11], zní: Pro který graf G_0 existuje graf G, v němž všechna $N_1(u)$ jsou izomorfní s G_0?

Podle L. S. Měľnikova neexistuje graf G, jestliže G_0 je 2-had nebo má-li G_0 ještě obecnější tvar (viz [12], str. 61). S. Ja. Agakišijeva [8], [9] zkoumala existenci pro další speciální typy okolí $N_1(u)$ a V. K. Bulitko [10] ukázal, že není možný algoritmus, který by o libovolném konečném grafu G_0 rozhodl, zda existuje nějaký graf G. Doplňme tyto práce příkladem, kde jde o graf nekonečný.

Příklad 1. Existuje souvislý nekonečný graf $G_\infty = [U_\infty, H_\infty]$, v němž každé $N_1(u)$ je izomorfní s oboustranně nekonečným hadem.

Abychom G_∞ sestrojili, položme

$$A_{-1} = \{0, \tfrac{2}{3}, \tfrac{4}{3}\}$$

a pro každé celé nezáporné číslo r definujme

$$A_r = \left\{ \frac{2k+1}{3 \cdot 2^r} \;\middle|\; k = 0, 1, 2, \ldots, 3 \cdot 2^r - 1 \right\}.$$

Nyní nechť

$$U_\infty = \bigcup_{r=-1}^{\infty} B_r ,$$

kde

$$B_r = \left\{ e^{i\pi x} \mid x \in A_r \right\}, \quad r \geqq -1 .$$

Hrany grafu G_∞ zaveďme takto: Jsou-li u, v dva uzly, spojme je hranou právě tehdy, když buď

$$u \in B_{-1}, \quad v \in B_{-1}$$

nebo

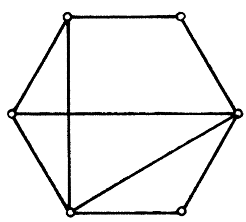
$$u \in B_r, \quad v \in B_s, \quad -1 \leqq r < s ,$$

přičemž platí: aspoň jeden z oblouků, na něž dělí jednotkovou kružnici obrazy uzlů u, v, neobsahuje uvnitř žádný prvek ze sjednocení

$$\bigcup_{k=-1}^{s-1} B_k .$$

Je vidět, že G_∞ má požadovanou vlastnost a příklad tím končí.

Tolik ke grafům, jejichž všechny uzly mají izomorfní okolí. Můžeme se však ptát i na druhou krajnost. Nemají-li žádné dva uzly u, v souvislého grafu G (s aspoň dvěma uzly) izomorfní okolí $N_1(u)$, $N_1(v)$, řekneme stručně, že G patří do třídy $\mathfrak{C}_1$. Obr. 1 ukazuje jeden graf patřící do $\mathfrak{C}_1$ (je to příklad s nejmenším možným počtem



Obr. 1.

uzlů). Nekonečný graf patřící do $\mathfrak{C}_1$ sestrojíme též snadno (např. nekonečný strom, jehož žádné dva uzly nemají stejný stupeň). Všimněme si, že graf z obr. 1 je jednoznačně určen, jsou-li známa $N_1(u)$ pro všechna u z G, kdežto zmíněný nekonečný strom jednoznačně určen není.

Věta 1. *Ke každému přirozenému číslu $n \geqq 6$ existuje graf G na n uzlech patřící do $\mathfrak{C}_1$.*

Důkaz. Pro $n = 6$ tvrzení plyne z obr. 1. Graf z obr. 1 označme G_1 a sestrojme posloupnost grafů

$$G_1, G_2, G_3, \ldots$$

tak, aby pro $i \geqq 2$ platilo:

I. graf G_i je na $i + 5$ uzlech;

II. posloupnost uzlových stupňů grafu G_i (při vhodném očíslování uzlů) je

$$\left(s_1^{(i)}, s_2^{(i)}, s_3^{(i)}, \ldots, s_{i+5}^{(i)}\right),$$

přičemž pro sudé i platí

$$j \in \left\langle 1, \frac{i}{2} + 1 \right\rangle \Rightarrow s_j^{(i)} = j\,,$$

$$j \in \left\langle \frac{i}{2} + 2, i + 2 \right\rangle \Rightarrow s_j^{(i)} = j - 1\,,$$

$$j \in \langle i + 3,\ i + 5 \rangle \Rightarrow s_j^{(i)} = j - 2$$

a pro liché i

$$j \in \left\langle 1, \frac{i + 1}{2} \right\rangle \Rightarrow s_j^{(i)} = j + 1\,,$$

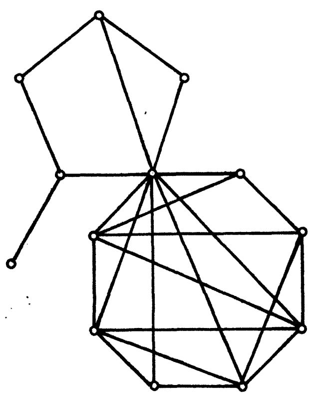
$$j \in \left\langle \frac{i + 3}{2},\ i + 1 \right\rangle \Rightarrow s_j^{(i)} = j\,,$$

$$j \in \langle i + 2,\ i + 5 \rangle \Rightarrow s_j^{(i)} = j - 1\,;$$

III. graf G_i patří do $\mathfrak{C}_1$.

Graf G_2 sestrojíme z G_1 tím, že ke G_1 přidáme ještě jeden uzel a hranou jej spojíme s jedním ze dvou uzlů 4. stupně v grafu G_1. Předpokládejme, že jsme už sestrojili graf G_i $(i \geqq 2)$ s vlastnostmi I., II., III. a konstrukci grafu G_{i+1} zařídíme takto:

a) Je-li i sudé, pak ke grafu G_i přidáme nový uzel u a spojíme jej hranou se všemi



Obr. 2.

uzly grafu G_i. Uzly v G_{i+1} očíslujeme tak, že staré uzly si ponechají svá čísla a uzel u dostane číslo $i + 6$.

b) Je-li i liché, pak ke G_i připojíme nový uzel x a spojíme jej hranou s uzlem y stupně $i + 1$ v grafu G_i. Můžeme předpokládat, že $N_1(y, G_{i+1})$ není izomorfní s $N_1(z, G_i)$, kde st $(z, G_i) = i + 2$. V opačném případě bychom místo y zvolili druhý z uzlů, jehož stupeň je $i + 1$ (uzel y'). Uzly grafu G_{i+1} přečíslujeme tak, že x má číslo 1 a ostatní dostanou číslo o jedničku větší, než měly v G_i (s eventuální záměnou y, y').

Snadno se přesvědčíme, že G_{i+1} má též vlastnosti I., II. a III., v nichž klademe $i + 1$ místo i.

Ve větě 1 jsme sestrojili graf třídy $\mathfrak{C}_1$, který má jediný blok (při sudém počtu uzlů) nebo právě dva bloky (při lichém počtu uzlů). V $\mathfrak{C}_1$ ovšem existují i grafy složitější, jak ukazuje obr. 2 (graf se třemi bloky).

Jednoduchou strukturu mají okolí $N_1(u)$, je-li graf *kubický* (tj. pravidelný 3. stupně). Dáme-li stranou graf K_4, pak $N_1(u)$ v každém souvislém kubickém grafu jsou trojího typu: $N_1(u)$ je buď izomorfní s $K_{1,2}$ nebo s $\bar{K}_{1,2}$ nebo s $\bar{K}_3$. Každému souvislému kubickému grafu s aspoň šesti uzly lze tedy přiřadit trojici (x, y, z) celých nezáporných čísel, přičemž x, y, z značí po řadě počet uzlů typu prvního, druhého a třetího. Jak známo, existují dva souvislé kubické grafy na šesti uzlech, jednomu z nich je přiřazena trojice $(0, 6, 0)$ a druhému $(0, 0, 6)$. Na osmi uzlech se dá sestrojit pět souvislých kubických grafů, z nichž prvnímu, druhému a třetímu jsou přiřazeny trojice po řadě $(4, 4, 0)$, $(0, 6, 2)$ a $(0, 3, 5)$, kdežto čtvrtému a pátému společně $(0, 0, 8)$ (očíslování grafů jako v práci [2], str. 55). Případu s větším počtem uzlů si hned všimneme.

Věta 2. *Nechť n je sudé přirozené číslo, $n \geqq 10$. Nechť (x, y, z) je trojice celých nezáporných čísel. Potom existuje souvislý kubický graf G na n uzlech, který má x uzlů typu $K_{1,2}$, y uzlů typu $\bar{K}_{1,2}$ a z uzlů typu $\bar{K}_3$ právě tehdy, existují-li celá nezáporná čísla r, s tak, že*

$$x = 2r,\ y = 2r + 3s,\ z = n - 4r - 3s.$$

Důkaz. Nechť G existuje. Uzly typu $K_{1,2}$ existují právě tehdy, lze-li najít čtyři uzly, na nichž G indukuje graf izomorfní s $K_4 - h$. Uzlů tohoto typu je tedy sudý počet $2r$. Zároveň na zmíněných podgrafech nacházíme $2r$ uzlů typu $\bar{K}_{1,2}$. Ty lze však případně najít i mezi šesti uzly u_i $(i = 1, 2, \ldots, 6)$, na nichž G indukuje podgraf izomorfní s $[U_6, H_6]$, kde

$$H_6 = \{u_1u_2, u_3u_4, u_5u_6, u_2u_4, u_4u_6, u_6u_2\}.$$

Tím přistupuje dalších $3s$ uzlů. Konečně uzly typu $\bar{K}_3$ tvoří zbytek, tedy

$$z = n - 4r - 3s.$$

Nechť obráceně jsou dána čísla x, y, z splňující vypsané podmínky. Existenci grafu G dokážeme matematickou indukcí podle n. Pro $n = 10$ přicházejí v úvahu trojice

$$(0, 0, 10), (0, 3, 7), (0, 6, 4), (0, 9, 1), (2, 2, 6), (2, 5, 3), (2, 8, 0), (4, 4, 2)$$

a pro $n = 12$ trojice

$$(0, 0, 12), (0, 3, 9), (0, 6, 6), (0, 9, 3), (0, 12, 0), (2, 2, 8), (2, 5, 5),$$
$$(2, 8, 2), (4, 4, 4), (4, 7, 1), (6, 6, 0).$$

Pohlédneme-li do tabulky v práci [2], vidíme, že každá z nich se dá realizovat aspoň jedním G na 10 resp. 12 uzlech. Nechť n je sudé číslo, $n \geqq 10$, a nechť se každá přípustná trojice (x, y, z) se součtem n či $n + 2$ dá realizovat. Nechť (x_0, y_0, z_0) je přípustná trojice se součtem $n + 4$.

Je-li $z_0 \geqq 2$, pak $(x_0, y_0, z_0 - 2)$ je zřejmě přípustná trojice pro součet $n + 2$ a dá se tedy realizovat souvislým kubickým grafem $G^{(1)}$. V grafu $G^{(1)}$ lze zřejmě najít dvě nesousední hrany h_1, h_2, z nichž žádná neleží v trojúhelníku. Rozpůlíme-li každou z nich a středy spojíme další hranou, vznikne z $G^{(1)}$ nový graf typu (x_0, y_0, z_0).

Je-li $z_0 = 1$, je y_0 liché a přitom $y_0 \geqq 3$. Trojice $(x_0, y_0 - 3, 0)$ je zřejmě přípustná pro součet n a realizujme ji tedy grafem $G^{(2)}$. I v něm lze najít hrany h_1, h_2 výše popsané. Spojíme-li středy w_1, w_2 hran h_1, h_2 novou hranou a pak ještě střed w_2 (názorně řečeno) nahradíme trojúhelníkem, dostaneme z $G^{(2)}$ nový graf, jenž je typu (x_0, y_0, z_0).

Konečně je-li $z_0 = 0$, pak postupujeme takto: Při $x_0 > 0$ trojici $(x_0 - 2, y_0 - 2, 0)$ realizujeme grafem $G^{(3)}$ a v něm libovolnou hranu u_1u_6 neležící v trojúhelníku zrušíme a ke grafu $G^{(3)} - u_1u_6$ přidáme ještě uzly u_2, u_3, u_4, u_5 a hrany

$$u_1u_2,\ u_2u_3,\ u_2u_4,\ u_3u_4,\ u_3u_5,\ u_4u_5,\ u_5u_6\,.$$

Tím z $G^{(3)}$ vznikne graf typu (x_0, y_0, z_0). Při $x_0 = 0$ trojici $(0, y_0 - 3, 1)$ realizujeme grafem $G^{(4)}$, jehož uzel typu $\bar{K}_3$ „rozšíříme" na trojúhelník. Důkaz končí.

Je-li G daný graf a je-li $N_1(u)$ souvislé pro každý uzel u, pak G se nazývá *lokálně souvislý*. Mluvíme též o *N_1-souvislosti*. Jedna postačující podmínka, aby G byl lokálně souvislý, se najde v práci [3], zlepšená v [6]. Už ve [3] je zmínka, že nejjednodušším okolím v lokálně souvislém grafu může být strom. Zdálo by se, že struktura grafu, v němž každé $N_1(u)$ je strom, musí být jednoduchá. Příklad nám ukáže, že takové grafy mohou být i nerovinné.

Příklad 2. Ke každému lichému přirozenému číslu $n \geqq 7$ existuje nerovinný graf na n uzlech, v němž každé $N_1(u)$ je 3-had. Stačí zvolit kružnici délky n a spojit každý její uzel se dvěma jejími „nejvzdálenějšími" uzly.

Okolí uzlu se dá ovšem zavést i jiným způsobem a proto $N_1(u)$ nazvěme podrobněji *uzlovým okolím* 1. *druhu*. Nechť $G = [U, H]$ je daný graf a nechť pro $u \in U$ existuje $xy \in H$ tak, že (při obvyklé grafové metrice ϱ) platí

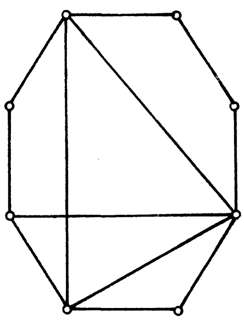
$$\min\left(\varrho(x, u), \varrho(y, u)\right) = 1\,.$$

Množinu takových xy označme M a množinu všech koncových uzlů těchto hran U^*. Pak graf $[U^*, M]$ nazvěme *uzlovým okolím* 2. *druhu* a označme $N_2(u)$ nebo podrobněji $N_2(u, G)$. Neexistuje-li k u žádná hrana xy, definujme $N_2(u)$ jako prázdný graf. Je vidět, že hranová množina okolí $N_1(u)$ je vždy částí hranové množiny okolí $N_2(u)$. Ještě jinak se zavádí uzlové okolí v [1], str. 238, ale to zde nebudeme sledovat.

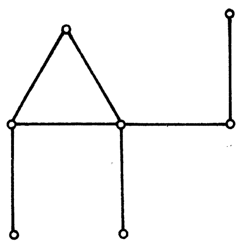
Okolí hrany se dá přirozeně zavést dvěma způsoby. Nechť uv je hrana grafu G a nechť neplatí

(1) $$\mathrm{st}\, u = \mathrm{st}\, v = 1 .$$

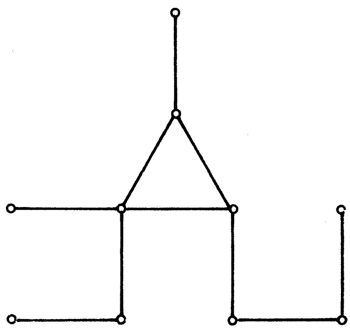
První možná definice hranového okolí $N^1(uv)$ je tato: Sestrojme nejprve množinu N všech uzlů x grafu G, jež sousedí buď s u nebo s v a je $u \neq x \neq v$. Pak $N^1(uv)$ je podgraf grafu G indukovaný na N. Řekneme, že $N^1(uv)$ je *hranové okolí* 1. *druhu*. Platí-li (1), pak nechť $N^1(uv)$ je prázdný graf. (Tuto definici podává [4].)



Obr. 3.



Obr. 4.



Obr. 5.

Druhý způsob zavedení je tento: Nechť uv je libovolná hrana grafu $G = [U, H]$ a nechť existuje $xy \in H$ tak, že $\min(\varrho(x, u), \varrho(y, u), \varrho(x, v), \varrho(y, v)) = 1$ při obvyklé grafové metrice ϱ. Množinu všech takových hran xy označíme P a množinu všech koncových uzlů těchto hran U^{**}. Graf $[U^{**}, P]$ nazveme *hranovým okolím* 2. *druhu* a značíme jej $N^2(uv)$. Neexistuje-li hrana xy, zase nechť $N^2(uv)$ je prázdné. Je opět vidět, že hranová množina okolí $N^1(uv)$ je vždy částí hranové množiny okolí $N^2(uv)$.

Můžeme si klást obdobné otázky, jakými jsme se zabývali při $N_1(u)$. Tak např. lze definovat třídy $\mathfrak{C}_2$, $\mathfrak{C}^{(1)}$ a $\mathfrak{C}^{(2)}$ tak, že v definici třídy $\mathfrak{C}_1$ nahradíme $N_1(u)$ postupně okolími $N_2(u), N^1(uv)$ a $N^2(uv)$. Obr. 3, 4 a 5 po řadě ukazují, že $\mathfrak{C}_2, \mathfrak{C}^{(1)}$ a $\mathfrak{C}^{(2)}$ nejsou prázdné.

Dá se též definovat lokálně souvislý graf ve smyslu $N_2(u)$, resp. $N^1(uv)$ (provedeno ve [4]), resp. $N^2(uv)$ a hovoříme pak stručně o N_2-souvislosti, o N^1-souvislosti a o N^2-souvislosti. Je zřejmé, že N_1-souvislost má za následek N_2-souvislost a podobně N^1-souvislost implikuje N^2-souvislost. Graf $K_{2,n}$ (pro $n = 1, 2, 3, \ldots$) nevykazuje N_1-souvislost, ale má proti tomu všechny tři zbývající typy souvislosti. Graf G_∞ popsaný v příkladě 1 je, jak už víme, N_1-souvislý a tedy též N_2-souvislý, ale nemá ani N^1-souvislost ani N^2-souvislost.

Vraťme se ještě k poznámce spojené se jménem L. S. Měľnikova a k pracím [8] a [9]. Ptejme se, zda při daném přirozeném čísle d existuje graf, v němž každé okolí $N_2(u)$ je izomorfní s d-hadem. Trojúhelník a čtyřúhelník ukazují, že odpověď je kladná pro $d = 1$ a $d = 2$, pětiúhelník s jednou úhlopříčkou řeší případ $d = 3$ a graf r-bokého hranolu ($r \geqq 5$) kladně zodpovídá $d = 6$.

Věta 3. *Nechť d je přirozené číslo takové, že $6 \neq d \geqq 4$. Potom neexistuje graf G, jehož každé $N_2(u)$ je izomorfní s d-hadem.*

Důkaz. Existuje-li G, pak každý jeho uzel je stupně 2 nebo 3. Zvolme uzel v_0 a nechť $N_2(v_0)$ má uzly

$$v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{d+1}$$

a hrany $v_i v_{i+1}$ (pro $i = 1, 2, \ldots, d$).

a) Případ $d = 4$. Je-li st $v_0 = 2$, pak v G zřejmě existují hrany v_0v_2, v_0v_4. Kdyby bylo st $v_3 = 2$, pak jednou komponentou okolí $N_2(v_2)$ by byl 2-had (spor). Nechť tedy st $v_3 = 3$. Kdyby tu byla hrana v_1v_3 (nebo podobně v_3v_5), pak by st $v_1 = 2$, aby $N_2(v_3)$ mělo požadovaný tvar. Pak ale $N_2(v_1)$ je 3-had. Tedy nechť je tu hrana v_3v_6 ($v_1 \neq v_6 \neq v_5$). Pak vzhledem k $N_2(v_1)$ tu musí být hrana v_1v_6 a vzhledem k $N_2(v_5)$ též hrana v_5v_6. Pak však $N_2(v_3)$ obsahuje šestiúhleník (spor).

Nechť st $v_0 = 3$. Kdyby pro některé $i \in \{1, 2, 3\}$ graf G měl hrany v_0v_i, v_0v_{i+1}, v_0v_{i+2}, pak $N_2(v_i)$ by obsahovalo trojúhelník. Pro indexy α, β, γ hran v_0v_α, v_0v_β, v_0v_γ přicházejí tedy v úvahu jen možnosti $(1, 2, 4)$, $(1, 2, 5)$, $(1, 3, 4)$, $(1, 3, 5)$, $(1, 4, 5)$, $(2, 3, 5)$, $(2, 4, 5)$, přičemž poslední tři lze inverzním očíslováním uzlů na $N_2(v_0)$ vždy převést na některý z prvních čtyř případů. V těch vzhledem k $N_2(v_0)$ musí být st $v_1 = 2$. V případech $(1, 2, 4)$ a $(1, 2, 5)$ se pak $N_2(v_1)$ utváří jako 3-had (spor). V případech $(1, 3, 4)$ a $(1, 3, 5)$ musí být st $v_2 = 2$, aby $N_2(v_3)$ bylo 4-had. Pak však $N_2(v_2)$ je 3-had (spor).

b) Případ $d = 5$. Musí být st $v_0 = 3$ a pro indexy α, β, γ hran v_0v_α, v_0v_β, v_0v_γ nacházíme nejprve přípustné možnosti $(1, 3, 5)$, $(2, 3, 5)$, $(2, 4, 5)$ a $(2, 4, 6)$. Inverzním očíslováním uzlů na $N_2(v_0)$ lze však $(2, 4, 6)$ převést na $(1, 3, 5)$, kdežto $(2, 4, 5)$ na

(2, 3, 5). V případě (1, 3, 5) je st $v_1 = 2$ a s ohledem na $N_2(v_3)$ také st $v_2 = 2$. Pak ale $N_2(v_2)$ je 3-had (spor). V případě (2, 3, 5) obsahuje $N_2(v_2)$ hrany v_5v_0, v_0v_3, v_3v_4 a ještě jednu hranu incidentní s v_1. Je to tedy hrana v_1v_4. Pak však $N_2(v_3)$ je pětiúhelník (spor).

c) Případ $d \geqq 7$ nelze realizovat, neboť na $N_2(v_0)$ nemůžeme zvolit tři uzly tak, aby každá hrana z $N_2(v_0)$ incidovala aspoň s jedním z nich. Tím důkaz končí.

Literatura

[1] *M. Behzad - G. Chartrand:* Introduction to the theory of graphs. Boston 1971.

[2] *F. C. Bussemaker - S. Čobeljić - D. M. Cvetković - J. J. Seidel:* Computer investigation of cubic graphs. Technological University Eindhoven, The Netherlands, Department of Mathematics, January 1976.

[3] *G. Chartrand - R. E. Pippert:* Locally connected graphs. Čas. pěst. mat. *99* (1974), 158—163.

[4] *K. H. Kulkarni:* Sufficient conditions for edge-locally connected and *n*-connected graphs. Čas. pěst. mat. (v tisku).

[5] *J. Sedláček:* Úvod do teorie grafů. Praha 1977.

[6] *D. W. VanderJagt:* Sufficient conditions for locally connected graphs. Čas. pět. mat. *99* (1974), 400—404.

[7] *A. A. Zykov:* Problem 30, Theory of graphs and its applications. Proc. Symp. Smolenice 1963 (M. Fi dler, ed.), Prague 1964, 164—165.

[8] *С. Я. Агакишиева:* О графах с заданными окружениями вершин. Математические заметки *3* (1968), 211—216.

[9] *С. Я. Агакишиева:* Графы, окружением вершин которых служат простые цепи или простые циклы. Доклады А.Н. Азерб. ССР *26* (1970), 7—10.

[10] *В. К. Булитко:* О графах с заданными окружениями вершин. Труды математического института им. В. А. Стеклова *133* (1973), 78—94.

[11] *В. Г. Визинг:* Некоторые нерешеные задачи в теории графов. Успехи математических наук 23, вып. *6* (144) 1968, 117—134.

[12] *А. А. Зыков:* Теория конечных графов I., Новосибирск 1969.

Adresa autora: 115 67 Praha 1, Žitná 25 (Matematický ústav ČSAV).

Summary

LOCAL PROPERTIES OF GRAPHS

JIŘÍ SEDLÁČEK, Praha

Let G be an undirected graph without loops and without multiple edges. Let u be a vertex of G with $\deg u \geqq 1$. The *neighborhood* $N_1(u, G)$ of the vertex u is the subgraph induced by all vertices v which are adjacent to u. In Example 1 an infinite

connected graph G_∞ is constructed in which every $N_1(u, G_\infty)$ is isomorphic to the two-way infinite arc.

Let $\mathfrak{C}_1$ be the class of all connected graphs G possessing at least two vertices each and having the following property: If u, v are two vertices of G then $N_1(u, G)$ and $N_1(v, G)$ are not isomorphic. A finite graph G belonging to $\mathfrak{C}_1$ and having the minimal number of vertices is shown in Fig. 1.

Theorem 1. *For every positive integer n, $n \geqq 6$, there exists a graph G on n vertices belonging to $\mathfrak{C}_1$.*

If G is a connected cubic graph on more than four vertices then $N_1(u, G)$ is isomorphic either to $K_{1,2}$ or to $\overline{K}_{1,2}$ or to $\overline{K}_3$. Construct the triple (x, y, z), where x, y and z are the numbers of vertices of the first type, of the second type, and of the third type, respectively. For six vertices the obtained triples are $(0, 6, 0)$ and $(0, 0, 6)$, for eight vertices we get $(4, 4, 0)$, $(0, 6, 2)$, $(0, 3, 5)$ and $(0, 0, 8)$ (the last one occurring twice).

Theorem 2. *Let n be an even integer, $n \geqq 10$. Let (x, y, z) be a triple of nonnegative integers. Then there exists a connected cubic graph G on n vertices having x vertices of type $K_{1,2}$, y vertices of type $\overline{K}_{1,2}$ and z vertices of type $\overline{K}_3$ if and only if there exist nonnegative integers r, s with*

$$x = 2r\,, \quad y = 2r + 3s\,, \quad z = n - 4r - 3s\,.$$

To modify the vertex neighborhood slightly, let us define $N_2(u, G)$ as follows: Let M be the set of all edges xy with

$$\min\left(\varrho(x, u), \varrho(y, u)\right) = 1\,,$$

where ϱ is the usual graph metric. Let $M \neq \emptyset$. Then $N_2(u, G)$ is the edge-induced subgraph $\langle M \rangle$.

A *d-arc* is a tree having just two monovalent vertices and consisting of d edges. It can be shown that for $d = 1, 2, 3$ and 6 there exists a graph G in which every $N_2(u, G)$ is isomorphic to the d-arc.

Theorem 3. *Let d be a positive integer with $6 \neq d \geqq 4$. Then there exists no graph G in which every $N_2(u, G)$ is isomorphic to the d-arc.*