Časopis pro pěstování matematiky

Miroslav Novotný

Zaměnitelnost endomorfismů lineárních prostorů

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 107 (1982), No. 2, 124--138

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/118114

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 107 (1982), Praha

ZAMĚNITELNOST ENDOMORFISMŮ LINEÁRNÍCH PROSTORŮ

MIROSLAV NOVOTNÝ, Brno

(Došlo dne 5. března 1980)

Věnováno akademiku O. Borůvkovi

1. ÚVOD

V roce 1950 se prof. Borůvka zabýval lineární algebrou, kterou metodicky zpracovával pro universitní přednášky. Výsledkem jeho práce byla skripta, jež se po několika revisích textu vyvinula v knihu [2]. Při metodickém zpracování látky narazil na problém zaměnitelných matic, který zní takto: Je-li dána čtvercová matice, najděte všechny matice s ní zaměnitelné. Tento problém je dnes řešen např. v knize [19]. Z algebraického hlediska tedy jde o lineární (= vektorový) prostor s daným endomorfismem (= lineárním zobrazením do sebe); hledá se konstrukce všech endomorfismů zaměnitelných s daným. Borůvka se domníval, že by bylo možno použít obecnějšího konstrukčního principu tak, že by se abstrahovalo od linearity prostoru i zobrazení. Vzniká tedy úloha: Je dána množina a její zobrazení do sebe; hledají se všechna zobrazení této množiny do sebe, která jsou s daným zaměnitelná. Tento problém v pojetí o něco obecnějším řešil autor v práci [21]; řešení je zde formulováno v množinové terminologii. Zvláštním případem této úlohy se zabýval Weaver [29]. Na výslednou konstrukci se lze dívat jako na konstrukci všech homomorfismů jedné monounární algebry do druhé [22]; užitím této konstrukce lze nalézt všechna řešení funkcionální rovnice $F(f(x)) = F(x)$, kde f je dané a F hledané zobrazení dané množiny do sebe. To je úloha, kterou jiným způsobem řešil Prešić [26].

V roce 1969 publikoval Pawlak svou práci [25] o strojích, které se v literatuře označují jeho jménem. Stroj v tomto smyslu je parciální monounární algebra s unární relací; přitom se předpokládá jistá vazba mezi operací a relací. Bartol [1] sestrojil jistou hierarchii těchto strojů na základě jejich homomorfismů. Bylo proto přirozené pokusit se o konstrukci všech homomorfismů jednoho stroje do druhého. Kopeček a autor postupně sestrojili všechny homomorfismy parciálních monounárních algeber [12] a homomorfismy a simulace Pawlakových strojů [13], [15], [24], dále studovali kategorii souvislých parciálních monounárních algeber a popisovali ji různými způsoby [14], [15], [16], [23]. K souvislé monounární algebře přiřadili posloupnost jistých kardinálních čísel, tzv. invariantů algebry, a rozřešili otázku, kdy je posloupnost kardinálních čísel posloupností invariantů souvislé monounární algebry [18]. V souvislosti s lineárními automaty [27] nalezl Kopeček konstrukci všech injektivních homomorfismů jedné parciální monounární algebry do druhé [17]. Monounární algebry byly topologisovány v pracích Chvalinových, zejména byly vyšetřovány podmínky totožnosti monoidu všech endomorfismů monounární algebry s monoidem spojitých uzavřených transformací kvasidiskrétní topologie na nosiči algebry[4], [5], [7], [8]. V případě souvislých algeber se ukázal jistý vztah zmíněné problematiky k otázce regularity monoidů tvořených endomorfismy těchto algeber [6], [9]. Jakubíková [11] dokázala, že existuje jen konečný počet soumístných souvislých monounárních algeber s týmž monoidem endomorfismů. Novotný, Gerbrich a Dvořák [20] sestavili program udávající konstrukci všech homomorfismů jedné konečné parciální monounární algebry s prázdným nebo s jednoprvkovým cyklem do konečné algebry téhož druhu. Všech těchto výsledků bylo dosaženo metodami navazujícími na autorovu práci [21].

Zvláštní ovšem je, že dlouho nebylo dosaženo původně očekávaného výsledku, tj. konstrukce všech endomorfismů lineárního prostoru zaměnitelných s daným endomorfismem. Účelem této práce je vyplnit tuto mezeru. Budeme postupovat tak, že popíšeme konstrukci všech homomorfismů jedné monounární algebry do druhé pro speciální druhy těchto algeber. Pak zformulujeme některé potřebné známé výsledky z teorie lineárních prostorů a jejich endomorfismů podle knihy Borůvkovy [2], Mal'cevovy [19] a van der Waerdenovy [28]. Použijeme přitom vydatně metod, které propracovali Weyr [30] a Dieudonné [3]. Nakonec popíšeme žádanou konstrukci a odvodíme z ní konstrukci všech matic zaměnitelných s danou čtvercovou maticí tak, jak je popsána v knize [19].

2. KONSTRUKCE HOMOMORFISMŮ MONOUNÁRNÍCH ALGEBER

Monounární algebrou rozumíme uspořádanou dvojici $\mathfrak{A} = (c_{\mathfrak{A}}, o_{\mathfrak{A}})$, kde $c_{\mathfrak{A}}$ je množina a $o_{\mathfrak{A}}$ její zobrazení do sebe. Pro prvky $x, y \in c_{\mathfrak{A}}$ položíme $(x, y) \in \varrho_{\mathfrak{A}}$, když (a jen když) existují $m \geqq 0$, $n \geqq 0$ tak, že $o_{\mathfrak{A}}^m(x) = o_{\mathfrak{A}}^n(y)$. Zřejmě je $\varrho_{\mathfrak{A}}$ ekvivalence na $c_{\mathfrak{A}}$; její bloky jsou nosiči podalgeber algebry $\mathfrak{A}$, které nazýváme *komponentami* algebry $\mathfrak{A}$. Monounární algebra $\mathfrak{A}$ se nazývá *souvislá*, má-li přesně jednu komponentu.

Buď $\mathfrak{A}$ souvislá monounární algebra. Položíme $Z_{\mathfrak{A}} = \{x \in c_{\mathfrak{A}};\ o_{\mathfrak{A}}^k(x) = x$ pro nějaké $k > 0\}$. Pak $Z_{\mathfrak{A}}$ je konečná množina, která se nazývá *cyklus* algebry $\mathfrak{A}$.

O prvku $x \in c_{\mathfrak{A}}$ řekneme, že má *vlastnost* (π), jestliže existuje posloupnost $(x_i)_{i<\omega}$ (ω je nejmenší nekonečné ordinální číslo) tak, že $x_0 = x$ a $o_{\mathfrak{A}}(x_{i+1}) = x_i$ pro všechna $i < \omega$. Položíme $K_{\mathfrak{A}}$ rovno množině všech prvků $x \in c_{\mathfrak{A}}$ s vlastností (π).

O monounární algebře $\mathfrak{A}$ řekneme, že má *jednoduchou strukturu*, je-li souvislá, má-li jednoprvkový cyklus a platí-li $K_{\mathfrak{A}} - Z_{\mathfrak{A}} = \emptyset$, $c_{\mathfrak{A}} - z_{\mathfrak{A}} \neq \emptyset$. Označíme $z_{\mathfrak{A}}$ jediný prvek jejího cyklu. Má-li navíc následující vlastnost (V), řekneme, že má *velmi* *jednoduchou strukturu*; vlastnost (V) je definována takto:

(V) Je-li $x, y \in c_{\mathfrak{A}}$, $x \neq y$, $o_{\mathfrak{A}}(x) = o_{\mathfrak{A}}(y)$, je $o_{\mathfrak{A}}(x) = z_{\mathfrak{A}}$.

Buď $\mathfrak{A}$ monounární algebra s jednoduchou strukturou. Pro každé $x \in c_{\mathfrak{A}}$ definujeme $r_{\mathfrak{A}}(x)$ jako nejmenší celé nezáporné r takové, že $o_{\mathfrak{A}}^r(x) = z_{\mathfrak{A}}$.

Uvážíme-li, že homomorfismus mezi dvěma monounárními algebrami převádí prvek cyklu první algebry na prvek cyklu druhé algebry, dostaneme

1. *Buďte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ monounární algebry s jednoduchou strukturou, F homomorfismus $\mathfrak{A}$ do $\mathfrak{B}$. Pak platí $r_{\mathfrak{A}}(x) \geqq r_{\mathfrak{B}}(F(x))$ pro každé $x \in c_{\mathfrak{A}}$.* □

Buď $\mathfrak{A}$ monounární algebra. Položíme $I_{\mathfrak{A}} = \{x \in c_{\mathfrak{A}};\ o_{\mathfrak{A}}^{-1}(x) = \emptyset\}$. Množinu $I_{\mathfrak{A}}$ nazveme *počáteční množinou* algebry $\mathfrak{A}$.

Uvážíme-li, že v monounární algebře s jednoduchou strukturou je $K_{\mathfrak{A}} - Z_{\mathfrak{A}} = \emptyset$, dostaneme

2. *Buď $\mathfrak{A}$ monounární algebra s jednoduchou strukturou. Pak ke každému $t \in c_{\mathfrak{A}}$ existuje $x \in I_{\mathfrak{A}}$ a $m \geqq 0$ celé tak, že $t = o_{\mathfrak{A}}^m(x)$.* □

Buďte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ monounární algebry s jednoduchou strukturou a G zobrazení množiny $I_{\mathfrak{A}}$ do $c_{\mathfrak{B}}$ takové, že $r_{\mathfrak{A}}(x) \geqq r_{\mathfrak{B}}(G(x))$. Pak říkáme, že G je *počáteční zobrazení* z $\mathfrak{A}$ do $\mathfrak{B}$. Zobrazení F množiny $c_{\mathfrak{A}}$ do $c_{\mathfrak{B}}$ nazveme *prodloužením* počátečního zobrazení G z $\mathfrak{A}$ do $\mathfrak{B}$, platí-li

(W) $\quad F(o_{\mathfrak{A}}^m(x)) = o_{\mathfrak{B}}^m(G(x))$ pro každé $x \in I_{\mathfrak{A}}$ a každé $m \geqq 0$ celé.

Je-li F prodloužením počátečního zobrazení G z $\mathfrak{A}$ do $\mathfrak{B}$, je zřejmě $F \restriction I_{\mathfrak{A}} = G$.

3. *Buď $\mathfrak{A}$ monounární algebra s velmi jednoduchou strukturou, $\mathfrak{B}$ monounární algebra s jednoduchou strukturou. Pak každé počáteční zobrazení z $\mathfrak{A}$ do $\mathfrak{B}$ má přesně jedno prodloužení.*

Důkaz. Buď G počáteční zobrazení z $\mathfrak{A}$ do $\mathfrak{B}$ a definujme F podmínkou (W). Protože $\mathfrak{A}$ má velmi jednoduchou strukturu, je vyjádření libovolného prvku $t \in c_{\mathfrak{A}} - Z_{\mathfrak{A}}$ podle 2 jednoznačné a tedy také F je zobrazení množiny $c_{\mathfrak{A}} - Z_{\mathfrak{A}}$ do $c_{\mathfrak{B}}$. Protože je $r_{\mathfrak{A}}(x) \geqq r_{\mathfrak{B}}(G(x))$ pro každé $x \in I_{\mathfrak{A}}$, je také $F(z_{\mathfrak{A}}) = F(o_{\mathfrak{A}}^r(x)) = o_{\mathfrak{B}}^r(G(x)) = z_{\mathfrak{B}}$, kde jsme položili $r = r_{\mathfrak{A}}(x)$, takže podmínka (W) definuje F jednoznačně na $c_{\mathfrak{A}}$. Z definice F plyne, že je to prodloužení G, i jeho jednoznačnost. □

4. *Buď $\mathfrak{A}$ monounární algebra s velmi jednoduchou strukturou, $\mathfrak{B}$ monounární algebra s jednoduchou strukturou, F zobrazení množiny $c_{\mathfrak{A}}$ do $c_{\mathfrak{B}}$. Pak F je homomorfismus $\mathfrak{A}$ do $\mathfrak{B}$, právě když je prodloužením některého počátečního zobrazení z $\mathfrak{A}$ do $\mathfrak{B}$.*

Důkaz. Je-li F homomorfismus algebry $\mathfrak{A}$ do $\mathfrak{B}$, je $F \restriction I_{\mathfrak{A}}$ počáteční zobrazení z $\mathfrak{A}$ do $\mathfrak{B}$ podle 1 a F je jeho prodloužením. Je-li na druhé straně F prodloužením počátečního zobrazení G z $\mathfrak{A}$ do $\mathfrak{B}$, pak z (W) plyne, že $G = F \upharpoonright I_{\mathfrak{A}}$ a tedy $F(o_{\mathfrak{A}}^m(x)) = o_{\mathfrak{B}}^m(F(x))$ pro každé $x \in I_{\mathfrak{A}}$. Odtud ihned plyne, že F je homomorfismus $\mathfrak{A}$ do $\mathfrak{B}$. □

Zřejmě vždy existuje počáteční zobrazení z monounární algebry $\mathfrak{A}$ s jednoduchou strukturou do algebry $\mathfrak{B}$ téhož druhu. Stačí položit $G(x) = z_{\mathfrak{B}}$ pro každé $x \in I_{\mathfrak{A}}$.

Nyní popíšeme konstrukci všech homomorfismů monounární algebry s velmi jednoduchou strukturou do monounární algebry s jednoduchou strukturou.

Buď $\mathfrak{A}$ monounární algebra s velmi jednoduchou strukturou, $\mathfrak{B}$ monounární algebra s jednoduchou strukturou, F zobrazení množiny $c_{\mathfrak{A}}$ do $c_{\mathfrak{B}}$, které je prodloužením některého počátečního zobrazení z $\mathfrak{A}$ do $\mathfrak{B}$. Pak řekneme, že F bylo sestrojeno *konstrukcí J*.

Důsledkem 4 je pak

5. *Buď $\mathfrak{A}$ monounární algebra s velmi jednoduchou strukturou, $\mathfrak{B}$ monounární algebra s jednoduchou strukturou. Pak konstrukce J dává právě všechny homomorfismy algebry $\mathfrak{A}$ do $\mathfrak{B}$.* □

V dalších úvahách bude užitečné zřejmé tvrzení

6. *Každá aspoň dvouprvková podalgebra monounární algebry s (velmi) jednoduchou strukturou má (velmi) jednoduchou strukturou.* □

3. ENDOMORFISMY LINEÁRNÍCH PROSTORŮ

V dalším textu budeme všude předpokládat, že K je algebraicky uzavřené pole a V je m-dimensionální vektorový prostor nad K s operací sčítání $+$ a s operací násobku . (tuto tečku dále vynecháváme). Z důvodu stručnosti nebudeme rozlišovat strukturu V a její nosič. Symbol $\dotplus$ je reservován pro operaci přímého součtu podprostorů. Připomeňme tento fakt: Když $V = V_1 \dotplus V_2 \dotplus \ldots \dotplus V_n$ a $\mathscr{B}_i$ je endomorfismus prostoru V_i pro $1 \leqq i \leqq n$, pak existuje přesně jeden endomorfismus $\mathscr{B}$ prostoru V tak, že $\mathscr{B} \upharpoonright V_i = \mathscr{B}_i$ pro $1 \leqq i \leqq n$. Podprostor generovaný v prostoru V množinou $M \subseteq V$ značíme $[M]_V$. Všude dále předpokládáme, že $m = \dim V \geqq 1$.

Basí prostoru rozumíme jeho maximální lineárně nezávislou podmnožinu, která je jednoduše uspořádána. Prvky base budeme indexovat prvky jednoduše uspořádané množiny, nejčastěji přirozenými čísly, a budeme předpokládat, že pořadí prvků je dáno pořadím jejich indexů. V některých úvahách na tomto pořadí prvků v basi nezáleží a proto nebude explicitně udáno. Bude tedy udána jen množina prvků base a jejich pořadí si můžeme libovolně doplnit.

Buď tedy $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$ base v prostoru V. Pro každé $x \in V$ a i, $1 \leqq i \leqq m$, označíme x_i^B i-tou souřadnici vektoru x vzhledem k basi B a symbolem $\boldsymbol{P}^B(x)$ označíme sloupcový vektor složený ze všech x_i^B $(1 \leqq i \leqq m)$ v přirozeném pořádku. Zobrazení $\boldsymbol{P}^B$ je pak bijekce V na K^m, což je množina všech sloupcových vektorů délky m s prvky v K. V této množině definujeme operaci sčítání sloupcových vektorů a operaci násobku vektoru prvkem z K běžným způsobem. Pak je ovšem zobrazení $\boldsymbol{P}^B : V \to K^m$ isomorfismus.

Buď dále $\mathscr{A}$ endomorfismus prostoru V. Pak matici $\boldsymbol{D}^B(\mathscr{A})$ se sloupci $\boldsymbol{P}^B(\mathscr{A}(b_i))$ $(1 \leqq i \leqq m)$ v přirozeném pořádku nazveme přiřazenou k endomorfismu $\mathscr{A}$ vzhledem k basi B. Pro čtvercôvou matici A značíme symbolem $|A|$ její determinant. Matici s prvky $a_{i,j}$ značíme jako $(a_{i,j})$.

Množina End V všech endomorfismů prostoru V je asociativní algebrou (viz [27], kap. 13), definujeme-li operaci sčítání a násobku prvkem z K rovnicemi $(\mathscr{A} + \mathscr{B})(x) = \mathscr{A}(x) + \mathscr{B}(x)$, $(\lambda\mathscr{A})(x) = \lambda(\mathscr{A}(x))$ $(\mathscr{A}, \mathscr{B} \in \operatorname{End} V,\ x \in V,\ \lambda \in K)$ a operaci součinu jako skládání endomorfismů. Identický endomorfismus značíme symbolem $\mathscr{E}$. Podobně je množina Mat K všech matic typu $m \times m$ s prvky z K asociativní algebrou vzhledem k obvyklým operacím s maticemi. Jednotkovou matici označujeme symbolem E. Snadno se nahlédne, že zobrazení $\boldsymbol{D}^B : \operatorname{End} V \to \operatorname{Mat} K$ je isomorfismus první algebry na druhou. Dále se snadno vidí, že platí $\boldsymbol{P}^B(\mathscr{A}(x)) = \boldsymbol{D}^B(\mathscr{A})\,\boldsymbol{P}^B(x)$ pro každé $\mathscr{A} \in \operatorname{End} V$ a každé $x \in V$.

Buď $\mathscr{A} \in \operatorname{End} V$. Prvek $\lambda \in K$ se nazývá *kořen* endomorfismu $\mathscr{A}$, existuje-li nenulový vektor $x \in V$ tak, že $\mathscr{A}(x) = \lambda x$.

Protože $m \geqq 1$, polynom $|\boldsymbol{D}^B(\mathscr{A} - \lambda\mathscr{E})|$ stupně m má v K aspoň jeden kořen λ_0. Determinant soustavy $\boldsymbol{D}^B(\mathscr{A} - \lambda_0\mathscr{E})\,\xi = 0$, kde $\xi \in K^m$, je roven nule a tedy tato soustava lineárních rovnic má netriviální řešení $\xi_0 \in K^m$. Existuje pak $x_0 \in V$ tak, že $\boldsymbol{P}^B(x_0) = \xi_0$. Zřejmě $\mathscr{A}(x_0) = \lambda_0 x_0$ a $x_0 \neq 0$. Tedy

1. *Je-li $\mathscr{A} \in \operatorname{End} V$, má $\mathscr{A}$ aspoň jeden kořen.* □

Je-li $\mathscr{A} \in \operatorname{End} V$, jsou zřejmě $\mathscr{A}^{-1}(0)$, $\mathscr{A}(V)$ podprostory ve V. Dále je dim monotonní funkce na systému všech podprostorů prostoru V a pro podprostory U, W podmínky $U \subseteq W$, $\dim U = \dim W$ implikují $U = W$.

Je známa tato věta (viz [19] str. 129, věta 2):

2. *Buď $\mathscr{A} \in \operatorname{End} V$. Položme $V_1 = \mathscr{A}^{-1}(0)$, buď B libovolná base podprostoru $\mathscr{A}(V)$, nechť $C \subseteq V$ je taková množina, že $\mathscr{A} \restriction C$ je bijekce množiny C na B. Buď $V_2 = [C]_V$. Pak platí tato tvrzení:*

(i) $V = V_1 \dotplus V_2$.

(ii) $\dim V = \dim \mathscr{A}^{-1}(0) + \dim \mathscr{A}(V)$. □

Buď $\mathscr{A} \in \operatorname{End} V$. Platí

$$\{0\} \subseteq \mathscr{A}^{-1}(0) \subseteq \ldots \subseteq \mathscr{A}^{-j}(0) \subseteq \mathscr{A}^{-(j+1)}(0) \subseteq \ldots \subseteq V,$$
$$V \supseteq \mathscr{A}(V) \supseteq \ldots \supseteq \mathscr{A}^{j}(V) \supseteq \mathscr{A}^{j+1}(V) \supseteq \ldots \supseteq \{0\}.$$

Odtud plyne existence $k \geqq 1$ takového, že $\mathscr{A}^{-k}(0) = \mathscr{A}^{-(k+1)}(0)$. Nejmenší takové k nazveme *hloubkou* endomorfismu $\mathscr{A}$. Je-li tedy k hloubka $\mathscr{A}$ a vezmeme-li v 2 za $\mathscr{A}$ jednou $\mathscr{A}^k$ a jednou $\mathscr{A}^{k+1}$, vyjde podle (ii) $\mathscr{A}^k(V) = \mathscr{A}^{k+1}(V) = \mathscr{A}(\mathscr{A}^k(V))$, takže $\mathscr{A} \restriction \mathscr{A}^k(V)$ je surjekce prostoru $\mathscr{A}^k(V)$ na $\mathscr{A}^k(V)$. Vezmeme-li v 2 zobrazení $\mathscr{A}^k$

místo $\mathscr{A}$, vyjde podle (i) $V = \mathscr{A}^{-k}(0) \dotplus \mathscr{A}^k(V)$ a $\mathscr{A} \restriction \mathscr{A}^k(V)$ je endomorfismus prostoru $\mathscr{A}^k(V)$.

Mějme nyní $\mathscr{A} \in \operatorname{End} V$ a buď λ_0 kořen endomorfismu $\mathscr{A}$. Označíme $h_{\mathscr{A}}(\lambda_0)$ hloubku endomorfismu $\mathscr{A} - \lambda_0\mathscr{E}$ a položíme $V_{\lambda_0} = (\mathscr{A} - \lambda_0\mathscr{E})^{-h_{\mathscr{A}}(\lambda_0)}(0)$. Pak V_{λ_0} je podprostor prostoru V, který nazýváme *kořenovým podprostorem* příslušným ke kořeni λ_0 endomorfismu $\mathscr{A}$. Jestliže tedy v horní úvaze vezmeme $\mathscr{A} - \lambda_0\mathscr{E}$ místo $\mathscr{A}$, vyjde $V = V_{\lambda_0} \dotplus U$, kde $U = (\mathscr{A} - \lambda_0\mathscr{E})^{h_{\mathscr{A}}(\lambda_0)}(V)$. Dále odtud vychází, že $(\mathscr{A} - \lambda_0\mathscr{E}) \restriction U$ a tedy také $\mathscr{A} \restriction U$ je endomorfismus prostoru U. Opakováním tohoto postupu dostaneme

3. *Buď $\mathscr{A} \in \operatorname{End} V$, nechť $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ jsou všechny navzájem různé kořeny endomorfismu $\mathscr{A}$, $V_{\lambda_1}, \ldots, V_{\lambda_n}$ příslušné kořenové podprostory. Pak $V = V_{\lambda_1} \dotplus \ldots \dotplus V_{\lambda_n}$.* □

Endomorfismus $\mathscr{A}$ prostoru V se nazývá *nilpotentní*, jestliže existuje $k \geqq 1$ tak, že $\mathscr{A}^k(x) = 0$ pro každé $x \in V$. To je ekvivalentní s podmínkou $\mathscr{A}^{-k}(0) = V$. Je-li λ_0 kořen endomorfismu $\mathscr{A}$ a V_{λ_0} příslušný kořenový podprostor, je $(\mathscr{A} - \lambda_0\mathscr{E}) \restriction V_{\lambda_0}$ nilpotentní na V_{λ_0}. Protože $\dim V \geqq 1$, je $\mathscr{A} \in \operatorname{End} V$ nilpotentní, právě když 0 je jediným kořenem endomorfismu $\mathscr{A}$. Zřejmé je tvrzení

4. *Je-li $\mathscr{A} \in \operatorname{End} V$ nilpotentní, je $(V, \mathscr{A})$ monounární alegbra s jednoduchou strukturou.* □

Pro každé $x \in V$ je tedy za předpokladů věty 4 definováno $r_{(V,\mathscr{A})}(x)$; nazveme je *řádem* prvku x.

Ústřední postavení v našich úvahách má tato věta:

5. *Buď $\mathscr{A} \in \operatorname{End} V$ nilpotentní, nechť $h_{\mathscr{A}}(0) = k$. Pak existují podmnožiny $D^1, \ldots, D^k$ množiny V, které mají tyto vlastnosti:*

(i) *Pro každé j, $1 \leqq j \leqq k$, je $\mathscr{A}^{j-1} \restriction D^j$ bijekce D^j na $\mathscr{A}^{j-1}(D^j)$ a $\mathscr{A}^j(D^j) = \{0\}$.*

(ii) *Množiny*

$$\begin{gathered}
\mathscr{A}^{k-1}(D^k), \ldots, \mathscr{A}^0(D^1), \\
\mathscr{A}^{k-2}(D^k), \ldots, \mathscr{A}^0(D^2), \\
\vdots \\
\mathscr{A}^0(D^k)
\end{gathered}$$

jsou navzájem disjunktní a jejich sjednocení je base prostoru V.

(iii) *$\mathscr{A}^{k-1}(D^k) \cup \ldots \cup \mathscr{A}^j(D^{j+1})$ je base podprostoru $\mathscr{A}^j(\mathscr{A}^{-(j+1)}(0))$ pro $j = 0, 1, \ldots, k-1$.*

Důkaz. Platí zřejmě $\mathscr{A}^{k-1}(\mathscr{A}^{-k}(0)) \subseteq \ldots \subseteq \mathscr{A}^j(\mathscr{A}^{-(j+1)}(0)) \subseteq \mathscr{A}^{j-1}(\mathscr{A}^{-j}(0)) \subseteq \subseteq \ldots \subseteq \mathscr{A}^{-1}(0)$. Volme tedy libovolnou basi B^k v podprostoru $\mathscr{A}^{k-1}(\mathscr{A}^{-k}(0))$. Buď $1 \leqq j \leqq k-1$ a nechť $B^k \cup \ldots \cup B^{j+1}$ je base podprostoru $\mathscr{A}^j(\mathscr{A}^{-(j+1)}(0))$; volme pak množinu B^j disjunktní s $B^k \cup \ldots \cup B^{j+1}$ tak, aby $B^k \cup \ldots \cup B^{j+1} \cup B^j$

byla base v podprostoru $\mathscr{A}^{j-1}(\mathscr{A}^{-j}(0))$. Indukcí jsme definovali $B^k, \ldots, B^1$. Pro $1 \leqq j \leqq k$ buď D^j libovolná množina taková, že $\mathscr{A}^{j-1} \restriction D^j$ je bijekce D^j na B^j. Jest $B^j = \mathscr{A}^{j-1}(D^j)$ pro $1 \leqq j \leqq k$ a zřejmě platí (i) a (iii).

Buď $1 \leqq i < j \leqq k$ a buď M libovolná z množin uvedených v (ii) v i-tém řádku a N libovolná z množin v j-tém řádku. Pak $M \cap N = \emptyset$, neboť M se skládá z vektorů řádu i a N z vektorů řádu j. Množiny $\mathscr{A}^{k-j}(D^k), \ldots, \mathscr{A}^0(D^j)$ jsou navzájem disjunktní, neboť jejich obrazy při zobrazení $\mathscr{A}^{j-1}$, tj. množiny $B^k, \ldots, B^j$, jsou navzájem disjunktní. Tedy všechny množiny uvedené v (ii) jsou navzájem disjunktní.

Podle (iii) je množina $\mathscr{A}^{k-1}(D^k) \cup \ldots \cup \mathscr{A}^0(D^1)$ base v prostoru $\mathscr{A}^{-1}(0)$. Předpokládejme, že $1 \leqq j < k$ a že množina

$$\begin{array}{c} \mathscr{A}^{k-1}(D^k) \cup \ldots \cup \mathscr{A}^0(D^1) \cup \\ \vdots \\ \mathscr{A}^{k-j}(D^k) \cup \ldots \cup \mathscr{A}^0(D^j) \end{array}$$

je base v $\mathscr{A}^{-j}(0)$. Podle (iii) je $\mathscr{A}^{k-1}(D^k) \cup \ldots \cup \mathscr{A}^j(D^{j+1}) = B$ base v prostoru $\mathscr{A}^j(\mathscr{A}^{-(j+1)}(0))$ a $C = \mathscr{A}^{k-j-1}(D^k) \cup \ldots \cup \mathscr{A}^0(D^{j+1})$ je taková množina, že $\mathscr{A}^j \restriction C$ je bijekce C na B. Podle 2(i) je $\mathscr{A}^{-(j+1)}(0) = \mathscr{A}^{-j}(0) + [C]_V$, takže

$$\begin{array}{c} \mathscr{A}^{k-1}(D^k) \cup \ldots \cup \mathscr{A}^0(D^1) \cup \\ \vdots \\ \mathscr{A}^{k-j-1}(D^k) \cup \ldots \cup \mathscr{A}^0(D^{j+1}) \end{array}$$

je base v prostoru $\mathscr{A}^{-(j+1)}(0)$.

Indukcí tedy dostáváme tvrzení o tvaru base podprostoru $\mathscr{A}^{-j}(0)$ pro $j = 1, 2, \ldots$ $\ldots, k$. Případ $j = k$ je pak poslední tvrzení z (ii). □

Buď $\mathscr{A} \in \operatorname{End} V$ nilpotentní, $h_{\mathscr{A}}(0) = k$, $D^1, \ldots, D^k$ podmnožiny množiny V s vlastnostmi (i), (ii), (iii) z věty 5. Pak řekneme, že množina

$$\begin{array}{l} \mathscr{A}^{k-1}(D^k) \cup \ldots \cup \mathscr{A}^0(D^1) \cup \\ \vdots \\ \mathscr{A}^0(D^k) \end{array}$$

byla sestrojena *konstrukcí n*; nazýváme ji také *normální basí* příslušnou k nilpotentnímu endomorfismu $\mathscr{A}$.

Užitečná je také tato věta:

6. *Buď $\mathscr{A} \in \operatorname{End} V$ nilpotentní, N normální base prostoru V vzhledem k $\mathscr{A}$, $x \in V$ libovolný prvek. Pak x lze vyjádřit jako lineární kombinaci těch prvků $n \in N$, pro něž je $r_{(V,\mathscr{A})}(n) \leqq r_{(V,\mathscr{A})}(x)$.*

Důkaz. Položme $r = r_{(V,\mathscr{A})}(x)$. Je dále $x = y + z$, kde y je lineární kombinace těch prvků $n \in N$, pro něž je $r_{(V,\mathscr{A})}(n) \leqq r$, z je lineární kombinace zbývajících prvků z N. Platí $0 = \mathscr{A}^r(x) = \mathscr{A}^r(y) + \mathscr{A}^r(z) = \mathscr{A}^r(z)$ a $\mathscr{A}^r(z)$ je lineární kombinace prvků tvaru $\mathscr{A}^r(n)$, kde $n \in N$ a $r_{(V,\mathscr{A})}(n) > r$. Všechny tyto prvky $\mathscr{A}^r(n)$ jsou však v N a tedy všechny koeficienty jejich lineární kombinace rovné nule jsou nuly. Odtud i $z = 0$ a tedy $x = y$, což je tvrzení věty. □

4. ZAMĚNITELNOST ENDOMORFISMŮ LINEÁRNÍHO PROSTORU

1. *Nechť $\mathscr{A}$, $\mathscr{B} \in \mathrm{End}\, V$, $\lambda \in K$. Pak $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ jsou zaměnitelné, právě když $\mathscr{A} - \lambda\mathscr{E}$, $\mathscr{B}$ jsou zaměnitelné.*

Vskutku, $\mathscr{A}\mathscr{B} = \mathscr{B}\mathscr{A}$ je ekvivalentní s podmínkou $\mathscr{A}\mathscr{B} - \lambda\mathscr{E}\mathscr{B} = \mathscr{B}\mathscr{A} - \mathscr{B}(\lambda\mathscr{E})$, což je $(\mathscr{A} - \lambda\mathscr{E})\,\mathscr{B} = \mathscr{B}(\mathscr{A} - \lambda\mathscr{E})$. □

2. *Nechť $\mathscr{A}$, $\mathscr{B} \in \mathrm{End}\, V$ jsou zaměnitelné, buď λ_0 kořen endomorfismu $\mathscr{A}$, V_{λ_0} příslušný kořenový podprostor. Pak $\mathscr{B} \restriction V_{\lambda_0} \in \mathrm{End}\, V_{\lambda_0}$.*

Důkaz. Buď $x \in V_{\lambda_0}$, $y = \mathscr{B}(x)$, $k = h_{\mathscr{A}}(\lambda_0)$. Pak $(\mathscr{A} - \lambda_0\mathscr{E})^k\,(y) = (\mathscr{A} - \lambda_0\mathscr{E})^k\,\mathscr{B}(x) = \mathscr{B}(\mathscr{A} - \lambda_0\mathscr{E})^k\,(x) = \mathscr{B}(0) = 0$ podle 1 a tedy $y \in V_{\lambda_0}$. □

Z těchto výsledků vyplývá pro každý endomorfismus $\mathscr{B}$ zaměnitelný s endomorfismem $\mathscr{A}$, že při libovolném kořeni λ_0 endomorfismu $\mathscr{A}$ je $\mathscr{B} \restriction V_{\lambda_0}$ endomorfismus kořenového podprostoru V_{λ_0} zaměnitelný s nilpotentním endomorfismem $(\mathscr{A} - \lambda_0\mathscr{E}) \restriction V_{\lambda_0}$. Budeme se nejdříve zabývat situací v kořenových podprostorech. Stačí tedy zkoumat endomorfismy zaměnitelné s daným nilpotentním endomorfismem.

Buď tedy $\mathscr{A} \in \mathrm{End}\, V$ nilpotentní, N normální base ve V vzhledem k $\mathscr{A}$. Položíme $M = N \cup \{0\}$. Pak zřejmě $\mathfrak{N} = (M, \mathscr{A} \restriction M)$ je monounární algebra; nazveme ji *nervem* prostoru V vzhledem k $\mathscr{A}$. Zřejmě je tato algebra konečná a má velmi jednoduchou strukturu.

Buď $\mathscr{A} \in \mathrm{End}\, V$ nilpotentní a buď dále B zobrazení V do V. Řekneme, že je sestrojeno *konstrukcí* $l(\mathscr{A})$, jestliže existuje normální base $N = \{n_1, \ldots, n_s\}$ prostoru V vzhledem k $\mathscr{A}$ a počáteční zobrazení z nervu $(N \cup \{0\}, \mathscr{A} \restriction (N \cup \{0\}))$ do $(V, \mathscr{A})$ tak, že pro jeho prodloužení b a pro libovolná $\xi_1, \ldots, \xi_s$ v K platí $B(\sum_{1 \leq i \leq s} \xi_i n_i) = \sum_{1 \leq i \leq s} \xi_i\, b(n_i)$. Zřejmě je $b = B \restriction (N \cup \{0\})$.

3. *Buď $\mathscr{A} \in \mathrm{End}\, V$ nilpotentní a B zobrazení V do V. Pak jsou tyto výroky ekvivalentní:*

(i) *B je endomorfismus prostoru V zaměnitelný s $\mathscr{A}$.*

(ii) *B je zobrazení sestrojené konstrukcí $l(\mathscr{A})$.*

Důkaz. Nechť platí (i). Podle 3.5 existuje normální base $N = \{n_1, \ldots, n_s\}$ prostoru V vzhledem k $\mathscr{A}$. Položme $\mathfrak{N} = (N \cup \{0\}, \mathscr{A} \restriction (N \cup \{0\}))$, $b = B \restriction (N \cup \{0\})$. Pak b je homomorfismus $\mathfrak{N}$ do $(V, \mathscr{A})$ a z linearity B plyne při libovolných $\xi_1, \ldots, \xi_s$ v K vztah $B(\sum_{1 \leq i \leq s} \xi_i n_i) = \sum_{1 \leq i \leq s} \xi_i\, B(n_i) = \sum_{1 \leq i \leq s} \xi_i\, b(n_i)$. Podle 2.3 a 2.4 je b jediným prodloužením jistého počátečního zobrazení z $\mathfrak{N}$ do $(V, \mathscr{A})$. Tedy platí (ii).

Nechť platí (ii) a nechť mají N, n_i $(1 \leqq i \leqq s)$, b tentýž význam jako v definici konstrukce $l(\mathscr{A})$. Ze vztahu $B(\sum_{1 \leqq i \leqq s} \xi_i n_i) = \sum_{1 \leqq i \leqq s} \xi_i\, b(n_i)$ snadno plyne, že $B \in \operatorname{End} V$, $B \restriction (N \cup \{0\}) = b$. Pro každé $x \in V$ existují $\xi_1, \ldots, \xi_s \in K$ tak, že $x = \sum_{1 \leqq i \leqq s} \xi_i n_i$. Platí $\mathscr{A}B(x) = \mathscr{A}B(\sum_{1 \leqq i \leqq s} \xi_i n_i) = \mathscr{A}(\sum_{1 \leqq i \leqq s} \xi_i\, b(n_i)) = \sum_{1 \leqq i \leqq s} \xi_i\, \mathscr{A}(b(n_i)) =$ $= \sum_{1 \leqq i \leqq s} \xi_i\, b(\mathscr{A}(n_i)) = B(\sum_{1 \leqq i \leqq s} \xi_i\, \mathscr{A}(n_i)) = B\mathscr{A}(\sum_{1 \leqq i \leqq s} \xi_i n_i) = B\mathscr{A}(x)$ podle definice konstrukce $l(\mathscr{A})$, z linearity $\mathscr{A}$ a z faktu, že b je homomorfismus podle 2.4. Tedy platí (i). □

Nyní zformujeme hlavní výsledek pro libovolný endomorfismus.

Buď $\mathscr{A} \in \operatorname{End} V$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ všechny jeho navzájem různé kořeny, $V_{\lambda_1}, \ldots, V_{\lambda_n}$ příslušné kořenové podprostory. V každém podprostoru V_{λ_i} $(1 \leqq i \leqq n)$ sestrojme konstrukcí $l((\mathscr{A} - \lambda_i \mathscr{E}) \restriction V_{\lambda_i})$ endomorfismus B_i a definujme endomorfismus B prostoru V tak, že $B \restriction V_{\lambda_i} = B_i$ (takový existuje přesně jeden). Pak řekneme, že endomorfismus B byl sestrojen *konstrukcí* $L(\mathscr{A})$.

4. *Buď* $\mathscr{A} \in \operatorname{End} V$, *$B$ zobrazení V do V. Pak jsou tyto dva výroky ekvivalentní:*

(i) *B je endomorfismus prostoru V zaměnitelný s* $\mathscr{A}$.

(ii) *B je zobrazení sestrojené konstrukcí* $L(\mathscr{A})$.

Důkaz. Nechť jsou $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ všechny navzájem různé kořeny endomorfismu $\mathscr{A}$, $V_{\lambda_1}, \ldots, V_{\lambda_n}$ příslušné kořenové podprostory.

Nechť platí (i). Pak $B \restriction V_{\lambda_i} \in \operatorname{End} V_{\lambda_i}$ podle 2 a je to zobrazení zaměnitelné s $(\mathscr{A} - \lambda_i \mathscr{E}) \restriction V_{\lambda_i}$ podle 1. Podle 3 je $B \restriction V_{\lambda_i}$ sestrojeno konstrukcí $l((\mathscr{A} - \lambda_i \mathscr{E}) \restriction$ $\restriction V_{\lambda_i})$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$. Tedy platí (ii).

Platí-li (ii), existuje pro každé i, $1 \leqq i \leqq n$, endomorfismus B_i sestrojený na V_{λ_i} konstrukcí $l((\mathscr{A} - \lambda_i \mathscr{E}) \restriction V_{\lambda_i})$ tak, že $B_i = B \restriction V_{\lambda_i}$. Pak B_i je endomorfismus na V_{λ_i} zaměnitelný s $(\mathscr{A} - \lambda_i \mathscr{E}) \restriction V_{\lambda_i}$ podle 3 a tedy i s $\mathscr{A} \restriction V_{\lambda_i}$ podle 1. Odtud ihned plyne (i). □

Celkem tedy ke konstrukci všech endomorfismů zaměnitelných s endomorfismem $\mathscr{A}$ prostoru V používáme konstrukce $L(\mathscr{A})$, která se redukuje na použití konstrukce $l((\mathscr{A} - \lambda_i \mathscr{E}) \restriction V_{\lambda_i})$. Ta pak spočívá v sestrojení normální base konstrukcí n a homomorfismu nervu do monounární algebry s jednoduchou strukturou konstrukcí J nebo také konstrukcí popsanou v [21]. Jsou tedy všechny konstrukce nutné k získání všech endomorfismů zaměnitelných s daným endomorfismem popsány.

5. ZAMĚNITELNÉ MATICE

Všimneme si napřed matic zaměnitelných s maticí nilpotentního endomorfismu $\mathscr{A}$ vektorového prostoru V. Tyto matice budeme přiřazovat k endomorfismům vzhledem k normální basi N příslušné k endomorfismu $\mathscr{A}$. Přitom ovšem jistou roli hraje i pořádek prvků base. Ten nyní zavedeme přirozeným způsobem.

Buď $\mathscr{A} \in \operatorname{End} V$ nilpotentní, $h_{\mathscr{A}}(0) = k$, $D^1, \ldots, D^k$ takové množiny, že

$$\begin{array}{l}\mathscr{A}^{k-1}(D^k) \cup \ldots \cup \mathscr{A}^0(D^1) \cup \\ \vdots \\ \mathscr{A}^0(D^k)\end{array}$$

je normální base prostoru V vzhledem k $\mathscr{A}$. Položme $\alpha_i = \operatorname{card}(D^k \cup \ldots \cup D^i)$ pro $1 \leqq i \leqq k$. Označíme $n_1^k, \ldots, n_{\alpha_k}^k$ prvky množiny D^k; pro $1 \leqq i < k$ označíme prvky množiny D^i jako $n_{\alpha_{i+1}+1}^i, \ldots, n_{\alpha_i}^i$.

Buď $1 \leqq j \leqq \alpha_1$. Pak existuje největší i, $1 \leqq i \leqq k$ tak, že je $j \leqq \alpha_i$; toto i označíme jako $i(j)$. Pak ovšem $n_j^{i(j)} \in D^{i(j)}$. Pro každé i, $1 \leqq i \leqq i(j)$ položíme $n_j^i = \mathscr{A}^{i(j)-i}(n_j^{i(j)})$. Při tomto indexování prvků je tedy normální base vyjádřena ve tvaru $N = \{n_j^i;\ 1 \leqq j \leqq \alpha_1,\ 1 \leqq i \leqq i(j)\}$; řekneme také, že normální base je *přirozeně označena*. Pomocí přirozeného označení definujeme na N *přirozené uspořádání* takto: Pro $n_j^i, n_m^l \in N$ klademe $n_j^i < n_m^l$, když buď $j < m$ nebo $j = m$ a $i < l$. O prvcích $n_j^i \in N$, pro něž je $j = j_0$ $(1 \leqq j_0 \leqq \alpha_1)$ a $1 \leqq i \leqq i(j_0)$, říkáme, že tvoří *j_0-tou řadu base.*

Zřejmě je $r_{(V,\mathscr{A})}(n_j^i) = i$. Je-li $\mathfrak{N} = (N \cup \{0\}, \mathscr{A} \restriction (N \cup \{0\}))$, pak $I_{\mathfrak{N}} = \{n_j^{i(j)};\ 1 \leqq j \leqq \alpha_1\}$.

Buď dále $\mathscr{B}$ libovolný endomorfismus prostoru V. Položíme $\boldsymbol{D}^N(\mathscr{B}) = ({}^N p^{\mathscr{B}}_{(i,j),(l,m)})$. Podle definice matice přiřazené k endomorfismu vzhledem k dané basi tedy při každém i, j, l, m takovém, že $1 \leqq j \leqq \alpha_1$, $1 \leqq i \leqq i(j)$, $1 \leqq m \leqq \alpha_1$, $1 \leqq l \leqq i(m)$, je ${}^N p^{\mathscr{B}}_{(i,j),(l,m)}$ koeficient prvku $\mathscr{B}(n_m^l)$ při prvku n_j^i.

Buď $1 \leqq j_0 \leqq \alpha_1$, $1 \leqq m_0 \leqq \alpha_1$. Řekneme, že prvky ${}^N p^{\mathscr{B}}_{(i,j_0),(l,m_0)}$ matice $\boldsymbol{D}^N(\mathscr{B})$ takové, že $1 \leqq i \leqq i(j_0)$, $1 \leqq l \leqq i(m_0)$, tvoří *$j_0 m_0$-blok.*

1. *Buďte $\mathscr{A}, \mathscr{B} \in \operatorname{End} V$, nechť $\mathscr{A}$ je nilpotentní, $\mathscr{B}$ endomorfismus zaměnitelný s $\mathscr{A}$. Nechť je dána přirozeně označená normální base $N = \{n_j^i;\ 1 \leqq j \leqq \alpha_1,$ $1 \leqq i \leqq i(j)\}$ prostoru V vzhledem k $\mathscr{A}$. Položme $\alpha(j, m) = \min\{i(j), i(m)\}$ pro libovolné j, m, kde $1 \leqq j \leqq \alpha_1$, $1 \leqq m \leqq \alpha_1$. Pak pro libovolný prvek ${}^N p^{\mathscr{B}}_{(i,j),(l,m)}$ matice $\boldsymbol{D}^N(\mathscr{B})$ platí při $1 \leqq j \leqq \alpha_1$, $1 \leqq i \leqq i(j)$, $1 \leqq m \leqq \alpha_1$, $1 \leqq l \leqq i(m)$ vzorec*

$${}^N p^{\mathscr{B}}_{(i,j),(l,m)} = \begin{cases} {}^N p^{\mathscr{B}}_{(i+i(m)-l,j),(i(m),m)}, & \text{je-li } 1 \leqq i + i(m) - l \leqq \alpha(j, m) \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Důkaz. $\mathscr{B}$ je sestrojeno konstrukcí $l(\mathscr{A})$ podle 4.3. Položíme-li $\mathfrak{N} = (N \cup \{0\}, \mathscr{A} \restriction (N \cup \{0\}))$, je $\mathscr{B}(\sum \xi_j^i n_j^i) = \sum \xi_j^i\, b(n_j^i)$ při libovolných $\xi_j^i \in K$, kde b je rozšíření jistého počátečního zobrazení c množiny $I_{\mathfrak{N}} = \{n_j^{i(j)};\ 1 \leqq j \leqq \alpha_1\}$ do $(V, \mathscr{A})$. Odtud je $c = \mathscr{B} \restriction I_{\mathfrak{N}}$.

Buď $1 \leqq m \leqq \alpha_1$. Platí $\mathscr{B}(n_m^{i(m)}) = \sum {}^N p^{\mathscr{B}}_{(i,j),(i(m),m)} n_j^i$, kde sčítání probíhá přes všechny uspořádané dvojice (i, j) takové, že $1 \leqq j \leqq \alpha_1$, $1 \leqq i \leqq i(j)$. Podle definice počátečního zobrazení je $r_{(V,\mathscr{A})}(\mathscr{B}(n_m^{i(m)})) \leqq r_{(V,\mathscr{A})}(n_m^{i(m)}) = i(m)$ a podle 3.6 je tedy ${}^N p^{\mathscr{B}}_{(i,j),(i(m),m)} = 0$ pro $i > i(m)$. Lze tedy psát $\mathscr{B}(n_m^{i(m)}) = \sum {}^N p^{\mathscr{B}}_{(i,j),(i(m),m)} n_j^i$, kde sčítání probíhá přes všechny uspořádané dvojice (i, j) takové, že $1 \leqq j \leqq \alpha_1$, $1 \leqq$ $\leqq i \leqq \alpha(j, m)$; množinu všech takových dvojic označíme symbolem $D(m)$.

Buď nyní $1 \leqq m \leqq \alpha_1$, $1 \leqq l \leqq i(m)$. Platí $\mathcal{B}(n_m^l) = \mathcal{B}(\mathcal{A}^{i(m)-l}(n_m^{i(m)})) =$ $= \mathcal{A}^{i(m)-l}(\mathcal{B}(n_m^{i(m)})) = \mathcal{A}^{i(m)-l}(\sum_{(h,j)\in D(m)} {}^N p^{\mathcal{B}}_{(h,j),(i(m),m)} n_j^h) =$ $= \sum_{(h,j)\in D(m)} {}^N p^{\mathcal{B}}_{(h,j),(i(m),m)} \mathcal{A}^{i(m)-l}(n_j^h)$. Problém nyní spočívá v tom zda může být $\mathcal{A}^{i(m)-l}(n_j^h) = n_j^i$ při indexu i voleném tak, že $1 \leqq i \leqq \alpha(j, m)$.

Mějme tedy $1 \leqq i \leqq \alpha(j, m)$.

Je-li $i(m) - l \geqq \alpha(j, m)$, je $\mathcal{A}^{i(m)-l}(n_j^h) = 0$ pro každé h, $1 \leqq h \leqq \alpha(j, m)$. Tedy prvek n_j^i vystupuje ve vyjádření prvku $\mathcal{B}(n_m^l)$ s nulovým koeficientem a máme ${}^N p^{\mathcal{B}}_{(i,j),(l,m)} = 0$.

Buď nyní $i(m) - l < \alpha(j, m)$.

Je-li přitom $i(m) - l + i > \alpha(j, m)$, pak pro každé h, $1 \leqq h \leqq \alpha(j, m)$, platí $h - i(m) + l \leqq \alpha(j, m) - i(m) + l < i$, takže všechny prvky n_j^h se endomorfismem $\mathcal{A}^{i(m)-l}$ zobrazí na prvky různé od n_j^i. Tedy tento prvek vystupuje ve vyjádření prvku $\mathcal{B}(n_m^l)$ s nulovým koeficientem a máme zase ${}^N p^{\mathcal{B}}_{(i,j),(l,m)} = 0$.

Zbývá tedy případ $i(m) - l < \alpha(j, m)$, $i(m) - l + i \leqq \alpha(j, m)$, což značí $1 \leqq$ $\leqq i + i(m) - l \leqq \alpha(j, m)$. Pak $n_j^{i(m)-l+i}$ je jediný prvek, který se endomorfismem $\mathcal{A}^{i(m)-l}$ zobrazí na n_j^i. Je tedy ${}^N p^{\mathcal{B}}_{(i,j),(l,m)} = {}^N p^{\mathcal{B}}_{(i(m)-l+i,j),(i(m),m)}$. □

Konstrukci matice $\boldsymbol{D}^N(\mathcal{B})$ popsanou ve větě 1 lze shrnout takto:

Buď $\mathcal{A} \in \operatorname{End} V$ nilpotentní, buď $N = \{n_j^i;\ 1 \leqq j \leqq \alpha_1,\ 1 \leqq i \leqq i(j)\}$ přirozeně označená normální base prostoru V vzhledem k $\mathcal{A}$. Pro libovolné j, m, $1 \leqq j \leqq \alpha_1$, $1 \leqq m \leqq \alpha_1$, položme $\alpha(j, m) = \min\{i(j), i(m)\}$ a definujme ${}^N p_{(i,j),(i(m),m)}$ jako libovolné prvky v K pro $1 \leqq i \leqq \alpha(j, m)$; ostatní prvky ${}^N p_{(i,j),(l,m)}$ jm-bloku pak doplňme podle vzorce

$$ {}^N p_{(i,j),(l,m)} = \begin{cases} {}^N p_{(i+i(m)-l,j),(i(m),m)}, & \text{je-li} \quad 1 \leqq i + i(m) - l \leqq \alpha(j, m) \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} $$

Pak řekneme, že matice $({}^N p_{(i,j),(l,m)})$, kde $1 \leqq j \leqq \alpha_1$, $1 \leqq i \leqq i(j)$, $1 \leqq m \leqq \alpha_1$, $1 \leqq l \leqq i(m)$, byla sestrojena *konstrukcí q*.

2. *Buď $\mathcal{A} \in \operatorname{End} V$ nilpotentní. Nechť je dána přirozeně označená normální base $N = \{n_j^i;\ 1 \leqq j \leqq \alpha_1,\ 1 \leqq i \leqq i(j)\}$ prostoru V vzhledem k $\mathcal{A}$. Pak pro libovolný prvek ${}^N p^{\mathcal{A}}_{(i,j),(l,m)}$ matice $\boldsymbol{D}^N(\mathcal{A})$ platí*

$$ {}^N p^{\mathcal{A}}_{(i,j),(l,m)} = \begin{cases} 1, & \textit{je-li} \quad j = m \quad a \quad l = i + 1 \leqq i(j) \\ 0 & \textit{jinak} \end{cases} $$

při $1 \leqq j \leqq \alpha_1$, $1 \leqq i \leqq i(j)$, $1 \leqq m \leqq \alpha_1$, $1 \leqq l \leqq j(m)$.

Důkaz. Tvrzení plyne ihned z faktu, že první prvek j-té řady base N se zobrazí při zobrazení $\mathcal{A}$ na nulu a každý jiný prvek řady na prvek předcházející. □

3. *Buď $\mathscr{A} \in \operatorname{End} V$ nilpotentní, $m = \dim V$. Nechť je dána přirozeně označená normální base $N = \{n_j^i;\ 1 \leqq j \leqq \alpha_1,\ 1 \leqq i \leqq i(j)\}$ prostoru V vzhledem k endomorfismu $\mathscr{A}$. Buď B matice typu $m \times m$, jejíž prvky jsou v tělese K. Pak jsou tyto dva výroky ekvivalentní:*

(i) *B je matice zaměnitelná s $\boldsymbol{D}^N(\mathscr{A})$.*

(ii) *B je matice sestrojená konstrukcí q.*

Důkaz. Existuje přesně jeden endomorfismus $\mathscr{B}$ prostoru V tak, že $\boldsymbol{D}^N(\mathscr{B}) = B$. Platí-li (i), je $\mathscr{B}$ zaměnitelno s $\mathscr{A}$ a tedy (ii) platí podle 1.

Nechť platí (ii). Z konstrukce q plyne, že $\mathscr{B}(n_j^{i-1}) = \mathscr{A}\mathscr{B}(n_j^i)$ a tedy $\mathscr{B}(\mathscr{A}(n_j^i)) = \mathscr{A}(\mathscr{B}(n_j^i))$ při $1 \leqq j \leqq \alpha_1$, $1 < i \leqq i(j)$ a dále $\mathscr{B}\mathscr{A}(n_j^1) = 0 = \mathscr{A}\mathscr{B}(n_j^1)$. Odtud plyne, že $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ jsou zaměnitelné a tedy též $\boldsymbol{D}^N(\mathscr{A})$, B jsou zaměnitelné. □

Nyní přejdeme ke konstrukci matic zaměnitelných s maticí přiřazenou k libovolnému endomorfismu vzhledem k speciální basi. Budeme k tomu potřebovat několika pojmů.

Buďte $A_1 = (a_{i,j}^1), \ldots, A_n = (a_{i,j}^n)$ čtvercové matice, jejichž typy jsou po řadě $m_1 \times m_1, \ldots, m_n \times m_n$. Pak symbolem $A_1 \dotplus \ldots \dotplus A_n$ rozumíme matici $A = (a_{i,j})$ typu $(m_1 + \ldots + m_n) \times (m_1 + \ldots + m_n)$ takovou, že

$$a_{i,j} = \begin{cases} a_{s,t}^k\,, \text{ je-li } \sum\limits_{h<k} m_h < i \leqq \sum\limits_{h \leqq k} m_h\,, \quad \sum\limits_{h<k} m_h < j \leqq \sum\limits_{h \leqq k} m_h\,, \\ s = i - \sum\limits_{h<k} m_h\,, \quad t = j - \sum\limits_{h<k} m_h \\ 0 \text{ jinak} \end{cases}$$

Buďte B_i $(1 \leqq i \leqq n)$ disjunktní jednoduše uspořádané množiny. Pak symbolem $\sum\limits_{1 \leqq i \leqq n} B_i$ rozumíme množinu $\bigcup\limits_{1 \leqq i \leqq n} B_i$, na níž je jednoduché uspořádání dáno tak, že $b < b'$ platí, je-li $b \in B_i$, $b' \in B_{i'}$ a buď $i < i'$ nebo $i = i'$ a $b < b'$ v množině B_i.

V dalších úvahách využijeme tohoto tvrzení:

4. *Buď V prostor, $V = V_1 \dotplus \ldots \dotplus V_n$, nechť $\mathscr{A}$ je endomorfismus prostoru V takový, že $\mathscr{A}(V_i) \subseteq V_i$ pro $1 \leqq i \leqq n$. Buď N_i libovolná base prostoru V_i pro $1 \leqq i \leqq n$ a položme $N = \sum\limits_{1 \leqq i \leqq n} N_i$. Pak $\boldsymbol{D}^N(\mathscr{A}) = \boldsymbol{D}^{N_1}(\mathscr{A} \restriction V_1) \dotplus \ldots \dotplus \boldsymbol{D}^{N_n}(\mathscr{A} \restriction V_n)$.*

Důkaz plyne ihned z faktu, že pro $n \in N_i$ je $\mathscr{A}(n) \in V_i$ a tedy souřadnice prvku $\mathscr{A}(n)$ při všech $n' \notin N_i$ jsou nulové. □

Obecný problém je řešen touto větou:

5. *Buď $\mathscr{A}$ endomorfismus prostoru V, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ všechny jeho navzájem různé kořeny, $V_{\lambda_1}, \ldots, V_{\lambda_n}$ příslušné kořenové podprostory. Nechť N_i je normální base prostoru V_{λ_i} vzhledem k $(\mathscr{A} - \lambda_i\mathscr{E}) \restriction V_{\lambda_i}$ pro $1 \leqq i \leqq n$. Položme $N = \sum\limits_{1 \leqq i \leqq n} N_i$, $A = \boldsymbol{D}^N(\mathscr{A})$, $A_i = \boldsymbol{D}^{N_i}(\mathscr{A} \restriction V_{\lambda_i})$, $E_i = \boldsymbol{D}^{N_i}(\mathscr{E} \restriction V_{\lambda_i})$ pro $1 \leqq i \leqq n$. Buď B matice téhož typu jako A, jejíž prvky jsou v tělese K. Pak jsou tyto výroky ekvivalentní:*

(i) *Matice A, B jsou zaměnitelné.*

(ii) *Existují matice $B_1, \ldots, B_n$ tak, že $B = B_1 + \ldots + B_n$ a že $A_i - \lambda_i E_i$, B_i jsou téhož typu a zaměnitelné pro $1 \leqq i \leqq n$.*

Důkaz. Nechť platí (i). Existuje přesně jeden homomorfismus $\mathscr{B}$ tak, že $B = D^N(\mathscr{B})$. Pak $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ jsou zaměnitelné, což podle 4.4 implikuje že $(\mathscr{A} - \lambda_i \mathscr{E}_i) \upharpoonright V_{\lambda_i}$ je zaměnitelno s $\mathscr{B} \upharpoonright V_{\lambda_i}$ pro $1 \leqq i \leqq n$. Položme $B_i = D^{N_i}(\mathscr{B} \upharpoonright V_{\lambda_i})$. Pak $A_i - \lambda_i E_i$, B_i jsou téhož typu a zaměnitelné pro $1 \leqq i \leqq n$; zároveň platí $B = B_1 + \ldots + B_n$ podle 4. Platí tedy (ii).

Nechť platí (ii). Podle 4 je $A = A_1 + \ldots + A_n$. Užitím 4.1 snadno dokážeme, že A_i, B_i jsou zaměnitelné pro $1 \leqq i \leqq n$. Odtud snadno vyjde, že $AB = A_1 B_1 + \ldots + A_n B_n = B_1 A_1 + \ldots + B_n A_n = BA$. Tedy platí (i). □

Věta 5 poskytuje konstrukci všech matic zaměnitelných s maticí A přiřazenou k libovolnému endomorfismu vzhledem k basi, která byla k tomuto endomorfismu přiřazena speciálními konstrukcemi. Taková matice A má ovšem speciální tvar. Případ, kdy matice A má obecný tvar, se převede na případ zahrnutý ve větě 5 podle této věty:

6. *Buď A libovolná matice typu $m \times m$ utvořená z prvků algebraicky uzavřeného pole K, $Q = \{q_1, \ldots, q_m\}$ libovolná base m-rozměrného prostoru V nad K, $\mathscr{A}$ endomorfismus prostoru V takový, že $D^Q(\mathscr{A}) = A$. Nechť $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ jsou všechny navzájem různé kořeny endomorfismu $\mathscr{A}$, $V_{\lambda_1}, \ldots, V_{\lambda_n}$ příslušné kořenové podprostory. Nechť N_i je normální base podprostoru V_{λ_i} vzhledem k endomorfismu $(\mathscr{A} - \lambda_i \mathscr{E}) \upharpoonright V_{\lambda_i}$ pro $1 \leqq i \leqq n$. Položme $N = \sum_{1 \leqq i \leqq n} N_i = \{n_1, \ldots, n_m\}$. Nechť T je matice typu $m \times m$ s prvky z tělesa K se sloupci $P^Q(n_i)$ pro $1 \leqq i \leqq m$.*

Pak libovolná matice B typu $m \times m$ s prvky z K je zaměnitelná s A, právě když je matice $T^{-1}BT$ zaměnitelná s $D^N(\mathscr{A})$.

Důkaz. Podle definice je $TP^N(n_i) = P^Q(n_i)$ pro $1 \leqq i \leqq m$ a tedy $TP^N(x) = P^Q(x)$ pro každé $x \in V$. Existuje pak přesně jeden automorfismus $\mathscr{T}$ prostoru V tak, že $D^N(\mathscr{T}) = T$. Platí pak $P^N(\mathscr{T}(x)) = P^Q(x)$ pro každé $x \in V$. Odtud je zejména $P^N(\mathscr{T}\mathscr{A}(x)) = P^Q(\mathscr{A}(x))$ a tedy $D^N(\mathscr{T})\, D^N(\mathscr{A})\, P^N(x) = D^Q(\mathscr{A})\, P^Q(x) = D^Q(\mathscr{A}) \, . \, D^N(\mathscr{T})\, P^N(x)$ při každém $x \in V$. Odtud je $A = TD^N(\mathscr{A})\, T^{-1}$ a tvrzení je nyní zřejmé. □

6. ZÁVĚRY

Protože výsledky odst. 5 jsou známy (viz [19] str. 191–195) a protože v odst. 4 jsme vystačili s monounárními algebrami speciálních druhů, pro něž je konstrukce všech homomorfismů poměrně jednoduchá, lze obsah tohoto článku považovat nejspíše za metodický příspěvek k teorii lineárních prostorů. Na druhé straně je jasné, že metody, kterých jsme zde použili, lze přenést i na jiné situace. Jsou-li např. $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ volné algebry téhož typu a h homomorfismus $\mathfrak{A}$ do $\mathfrak{B}$, řekneme – analogicky jako pro monoidy – že h je striktně abecední, jestliže existují systémy generátorů M algebry $\mathfrak{A}$ a N algebry $\mathfrak{B}$ tak, že $h \restriction M$ zobrazuje M do N. Ke každému striktně abecednímu endomorfismu h algebry $\mathfrak{A}$ lze striktně abecední endomorfismy zaměnitelné s h získávat užitím konstrukce homomorfismů jedné monounární algebry do druhé.

Literatura

[1] *W. Bartol:* Programy dynamiczne obliczeń. Państwowe wydawnictwo naukowe, Warszawa, 1974.

[2] *O. Borůvka:* Základy teorie matic. Academia, Praha, 1971.

[3] *J. Dieudonné:* Sur la réduction canonique des couples de matrices. Bull. Soc. Math. de France *74* (1946), 130–146.

[4] *J. Chvalina:* Set transformations with centralizers formed by closed deformations of quasidiscrete topological spaces. Proceedings of the Fourth Prague Topological Symposium 1976, Part B, Soc. Czech. Math. Phys., Prague 1977. 83–89.

[5] *J. Chvalina:* Autonomous automata and closures with the same endomorphism monoids. Arch. Math. Brno *12* (1976), 213–224.

[6] *J. Chvalina:* Characterizations of certain monounary algebras II. Arch. Math. Brno *14* (1978), 145–154.

[7] *J. Chvalina:* On certain topological state spaces of X-automata. Colloquium on Topology, Budapest 1978, Coll. Math. Soc. J. Bolyai *23* (1978), 287–299.

[8] *J. Chvalina:* On centralizers of non skeletal connected set transformations. V tisku.

[9] *J. Chvalina:* On connected unars with regular endomorphism monoids. Arch. Math. Brno *16* (1980), v tisku.

[10] *J. Chvalina:* Realizability of centralizers of set transformations by closed deformations of quasidiscrete topological spaces. Připraveno do tisku.

[11] *D. Jakubíková:* Systems of unary algebras with common endomorphisms. Czech. Math. J. *29* (*104*) (1979), 406–429.

[12] *O. Kopeček:* Homomorphisms of partial unary algebras. Czech. Math. J. *26* (*101*) (1976), 108–127.

[13] *O. Kopeček:* Constructions of all machine homomorphisms. Bull. Acad. Polon. Sci.; Ser. Sci. Math. Astron. Phys. *8* (1976), 655–658.

[14] *O. Kopeček:* The category of connected partial unary algebras. Czech. Math. J. *27* (*102*) (1977), 415–423.

[15] *O. Kopeček:* Homomorphisms of machines. Arch. Math. Brno *14* (1978), 45–50, 99–108.

[16] *O. Kopeček:* The categories of connected partial and complete unary algebras. Bull. Acad. Polon. Sci.; Ser. Sci. Math. *27* (1979), 337–344.

[17] *O. Kopeček:* Monomorhisms of partial unary algebras. Rukopis.

[18] *O. Kopeček, M. Novotný:* On some invariants of unary algebras. Czech. Math. J. *24* (*99*) (1974), 219–246.

[19] *A. I. Mal'cev:* Osnovy linejnoj algebry. Nauka, Moskva, 1975.

[20] *J. Novotný - J. Gerbrich - V. Dvořák:* Konstrukce homomorfismů autonomních automatů. SVOČ, Universita J. E. Purkyně, Brno, 1979.

[21] *M. Novotný:* O jednom problému z teorie zobrazení. Spisy přír. fak. Masarykovy university č. 344, 1953/2, 53–64.

[22] *M. Novotný:* Über Abbildungen von Mengen. Pacific J. Math. *13* (1963), 1359–1369.

[23] *M. Novotný:* On some problems concerning Pawlak's machines. Lecture Notes in Computer Science *32*, Mathematical Foundations of Computer Science 1975, 4th Symposium, Mariánské Lázně, September 1–5, 1975, Ed. J. Bečvář, 88–100.

[24] *M. Novotný:* On mappings of machines. Lecture Notes in Computer Science *45*, Mathematical Foundations of Computer Science 1976, 5th Symposium, Gdańsk, September 6—10, 1976, Ed. A. Mazurkiewicz, 105—114.
[25] *Z. Pawlak:* Maszyny programowane. Algorytmy *10* (1969), 7—22.
[26] *S. Prešić:* Sur l'équation fonctionelle $f(x) = f[g(x)]$. Publ. Fac. Electrotechnique Univ. Belgrade, Ser. Math. et Phys. *64* (1961), 29—31.
[27] *W. Stucky - H. Walter:* Minimal linear realizations of autonomous automata. Information and Control *16* (1970), 66—84.
[28] *B. L. van der Waerden:* Moderne Algebra II, 5. vyd., Springer-Verlag, Berlin, 1967.
[29] *M. W. Weaver:* On the commutativity of a correspondence and a permutation. Pacific J. Math. *10* (1960), 105—111.
[30] *E. Weyr:* O theorii forem bilineárných. Praha 1889.

Adresa autora: 662 95 Brno, Janáčkovo nám. 2a (Matematický ústav ČSAV).

Summary

COMMUTATIVITY OF ENDOMORPHISMS OF LINEAR SPACES

MIROSLAV NOVOTNÝ, Brno

All homomorphisms of a monounary algebra into another monounary algebra are constructed for algebras of certain special classes. Using this result, all endomorphisms of a linear (= vector) space are constructed that commute with a given endomorphism. The well-known solution of the problem of commuting matrices is derived from the above mentioned results.