Miloslav Jůza

Remarque sur la mesure intérieure de Lebesgue

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 107 (1982), No. 4, 422--424

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/118138`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 107 (1982), Praha

REMARQUE SUR LA MESURE INTÉRIEURE DE LEBESGUE

MILOSLAV JŮZA, Praha

(Reçu le 9 septembre 1981)

On sait que chaque ensemble ouvert borné dans l'espace E_1 est l'union d'un système dénombrable[1]) d'intervalles ouverts, bornés disjoints. Si $G \subset E_1$ est un ensemble ouvert borné,

$$G = \bigcup_i J_i\,, \quad J_i = (a_i, b_i)\,, \quad J_i \cap J_j = \emptyset \quad \text{pour} \quad i \neq j\,,$$

on peut définir la mesure de Lebesgue de G comme

$$\mu(G) = \sum_i (b_i - a_i)\,.$$

Si $F \subset E_1$ est un ensemble fermé borné,

$$F \subset K\,, \quad K = (a, b)\,,$$

on peut poser

$$\mu(F) = b - a - \mu(K \setminus F)\,.$$

Si $M \subset E_1$ est un ensemble borné, on définit

$$\mu_e(M) = \inf_{\substack{G \supset M \\ G \text{ ouvert}}} \mu(G)\,, \quad \mu_i(M) = \sup_{\substack{F \subset M \\ F \text{ fermé}}} \mu(F)\,.$$

On sait (voir [2], théorème 4.5) que le théorème suivant a lieu:

Theorème 1. *Soi $M \subset E_1$ un ensemble borné et soit*

$$f : M \to E_1 \tag{1}$$

l'application telle que (ϱ étant la métrique euclidienne)

$$\varrho(f(x), f(y)) \leqq \varrho(x, y) \quad \textit{pour chaque} \quad x \in M\,, \quad y \in M\,. \tag{2}$$

Alors

$$\mu_e(f(M)) \leqq \mu_e(M)\,.$$

---

[1]) Les ensembles finis et l'ensemble vide sont aussi considérés comme dénombrables.

Le théorème analogue pour la mesure intérieure n'est pas vrai. Cependant, nous allons prouver

Théorème 2. *Il existe un ensemble borné $M \subset E_1$ et une application* (1) *satisfaisant* (2) *telle que*

$$\mu_i(f(M)) > \mu_i(M) . \tag{3}$$

Démonstration. I. Désignons par K l'intervalle fermé $\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle$. Divisons K en classes de telle façon que $x \in K$, $y \in K$ appartiennent à la même classe si et seulement si $x - y$ est rationnel. Soit Q un ensemble ayant avec chaque classe un et un seul point commun. On a (voir [1], chap. III, § 6)

$$\mu_i(Q) = 0 , \quad 0 < \mu_e(Q) = \beta \leqq 1 .$$

II. Définissons les ensembles

$$M_1 = \{x \in E_1 : x = q - \tfrac{3}{2},\ q \in Q\} ,$$

$$M_2 = \{x \in E_1 : x = q + \tfrac{3}{2},\ q \in K \setminus Q\} .$$

On a (voir [1], chap. III, § 5, théorème 7 et chap. III, § 3, théorème 7)

$$\mu_i(M_1) = \mu_i(Q) = 0 , \tag{4}$$

$$\mu_i(M_2) = \mu_i(K \setminus Q) = 1 - \mu_e(Q) = 1 - \beta < 1 . \tag{5}$$

III. Posons $M = M_1 \cup M_2$. On a

$$0 \leqq \mu_i(M) \leqq 1 - \beta < 1 . \tag{6}$$

Cependant, soit $F \subset M$, F fermé. On a $F = F_1 \cup F_2$, où $F_1 = F \cap \langle -2, -1 \rangle$, $F_2 = F \cap \langle 1, 2 \rangle$. F_1, F_2 sont fermés et disjoint, alors $\mu(F) = \mu(F_1) + \mu(F_2)$. Mais d'après (4) on a $\mu(F_1) = 0$ et d'après (5) on a $\mu(F_2) \leqq 1 - \beta$, alors $\mu(F) \leqq$ $\leqq 1 - \beta$ et donc aussi

$$\mu_i(M) = \sup_{\substack{F \subset M \\ F \text{ fermé}}} \mu(F) \leqq 1 - \beta .$$

IV. Pour $x \in M$, posons

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{3}{2} & \text{pour} \quad x \in M_1 , \\ x - \frac{3}{2} & \text{pour} \quad x \in M_2 . \end{cases}$$

On a $f(M) = K$. Nous prouvons (2) pour f. Cependant, si $x \in M_1$, $y \in M_1$ ou $x \in M_2$, $y \in M_2$, on a $\varrho(f(x), f(y)) = \varrho(x, y)$. Si $x \in M_1$, $y \in M_2$ ou $x \in M_2$, $y \in M_1$, on a $\varrho(x, y) \geqq 2$, $\varrho(f(x), f(y)) \leqq 1$.

V. On a $\mu_i(f(M)) = \mu_i(K) = 1$, alors d'après (6) on obtient (3).

Littérature

[1] *И. П. Натансон:* Теория функций вещественной переменной. Москва 1957.
[2] *M. Jůza:* Définition axiomatique de la mesure de Hausdorff. Časopis pro pěstování matematiky, 104, 1979, 9—44.

Adresse de l'auteur: 106 00 Praha 10, Sasanková 2655.