Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica

Jan Voráček

O některých nelineárních diferenciálních rovnicích třetího řádu

Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica, Vol. 7 (1966), No. 1, 109--127

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/119863`

1966 — ACTA UNIVERSITATIS PALACKIANAE OLOMUCENSIS.
FACULTAS RERUM NATURALIUM. TOM 21.

Katedra matematické analýzy přírodovědecké fakulty
Vedoucí katedry: z. prof. RNDr. et CSc. Miroslav Laitoch

O NĚKTERÝCH NELINEÁRNÍCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNICÍCH TŘETÍHO ŘÁDU

JAN VORÁČEK

(Došlo dne 31. května 1965)

Tato práce se zabývá diferenciálními rovnicemi

$$x''' + f(x')\,x'' + bx' + h(x) = Q(t), \tag{1}$$

$$x''' + ax'' + g(x)\,x' + h(x) = Q(t), \tag{2}$$

$$x''' + ax'' + bx' \quad + h(x) = Q(t), \tag{3}$$

kde $|h(x)| \leqq H$, $|Q(t)| \leqq Q$.

Některé vlastnosti těchto rovnic jsou známy již z publikací J. O. C. Ezeila [1], [2], [3].

Práce je rozdělena na čtyři části. V první části se dokazuje pomocná věta o rovnici druhého řádu; tato část je jistým kvantitativním využitím úvah z [4]. Ve druhé části se zkoumá omezenost a asymptotické vlastnosti řešení rovnice (1). Hlavním obsahem třetí části je věta o dissipativnosti rovnice (2). Vlastnosti rovnice (3) se studují ve čtvrté části.

1. Buďtež a_1, b kladné konstanty, t_0 reálné číslo a $f(y)$ funkce spojitá na intervalu $(-\infty, +\infty)$, splňující na tomto intervalu nerovnost $f(y) \geqq a_1$. Označme dále N_{t_0} množinu funkcí definovanou takto: $p(t) \in N_{t_0}$ právě když existuje $t_p > t_0$ tak, že $p(t)$ je spojitá na intervalu $\langle t_0, t_p) = I_p$ a splňuje na něm nerovnost $|p(t)| \leqq P$, kde $P = Q + H$. Nechť M_{t_0} je množina diferenciálních rovnic

$$y'' + f(y)\,y' + by = p(t)$$

pro všechny funkce $p(t) \in N_{t_0}$. Funkci $y(t)$ nazveme řešením některé rovnice z M_{t_0}, existují-li $p_y(t) \in N_{t_0}$ a $t' > t_0$ tak, že $y(t)$ splňuje na $\langle t_0, t')$ diferenciální rovnici

$$y'' + f(y)\,y' + by = p_y(t). \tag{4}$$

Označme ještě $J_y = \langle t_0, t_y)$ maximální interval, na který se dá $y(t)$ prodloužit vpravo jako řešení rovnice (4).

Pomocná věta: Buď $y(t)$ řešením některé rovnice z M_{t_0}. Potom je $I_{p_y} = J_y$ a platí:

1°: *Je-li* $t_{p_y} < +\infty$, *jsou funkce* $y(t)$ *a* $y'(t)$ *omezené na* I_{p_y}.

2°: *Je-li* $t_{p_y} = +\infty$, *existuje konstanta* D, *společná pro všechny rovnice tohoto typu z* M_{t_0} *při libovolném* t_0 *tak, že platí*

$$\limsup_{t\to+\infty} |y(t)| \leqq D, \qquad \limsup_{t\to+\infty} |y'(t)| \leqq D.$$

Důkaz: Rovnici (4) pišme ve tvaru ekvivalentní soustavy

$$\begin{aligned} y' &= z(t) - F[y(t)] \\ z' &= -by(t) + p_y(t), \end{aligned} \tag{5}$$

kde $F(y) = \int\limits_0^y f(\eta)\,\mathrm{d}\eta$. Funkce $F(y)$ je rostoucí a splňuje nerovnost

$$F(y) = \int\limits_0^{|y|} f(\eta \operatorname{sgn} y)\,\mathrm{d}\eta \geqq a_1 |y|. \tag{6}$$

Dále zaveďme ještě tato označení (ε je libovolné, pevně zvolené kladné číslo):

$$a = \operatorname{Min}\left[a_1, \sqrt{\frac{4Pb}{P+\varepsilon}}\right], \tag{7}$$

$$\xi = 4Pa^{-2}, \qquad p = 2Pa^{-1}, \tag{8}$$

$$\mathrm{A} = \operatorname{Max}\,[aF(\xi) + \xi(2b + a^2) + \varepsilon,\ \ a|F(-\xi)| + \xi(2b + a^2) + \varepsilon], \tag{9}$$

$$B = (4b + a^2)^{-1}\left[\frac{A^2}{2P} - 2P\right], \tag{10}$$

$$\eta_1 = \operatorname{Max}\{B, F_{-1}[-F(-B)]\}, \tag{11}$$

kde F_{-1} je funkce inversní k F. Ze (7) a (8) plyne

$$\xi \geqq b^{-1}(P + \varepsilon). \tag{12}$$

Každému číslu η, pro které platí $\eta \geqq \eta_1$, přiřaďme uzavřenou křivku $K(\eta)$ v rovině y, z, složenou z oblouků a úseček takto:

$\xi \leqq y \leqq \eta,\ \ z \geqq F(y)$: $\quad \frac{1}{2}z^2 - pz + \frac{1}{2}by^2 - Py = \Phi_1(\eta)$,

kde $\Phi_1(y) = \frac{1}{2}F^2(y) - pF(y) + \frac{1}{2}by^2 - Py$.

$F(y) > z \geqq 0$: $\quad y = \eta$

$\xi \leqq y \leqq \eta,\ \ z \leqq 0$: $\quad \frac{1}{2}z^2 - pz + \frac{1}{2}by^2 + Py = \frac{1}{2}b\eta^2 + P\eta$

$|y| \leqq \xi,\ \ z \leqq 0$: $\quad z - \frac{z_1 + z_2}{2\xi}y = -\frac{z_1 - z_2}{2}$

$$\lambda \leqq y \leqq -\xi, \quad z \leqq 0: \quad \frac{1}{2} z^2 + pz + \frac{1}{2} by^2 + Py = \Phi_1(\eta)$$
$$F(y) < z \leqq 0: \qquad y = \lambda$$
$$\lambda \leqq y \leqq -\xi, \quad z \geqq 0: \quad \frac{1}{2} z^2 + pz + \frac{1}{2} by^2 - Py = \frac{1}{2} b\lambda^2 - P\lambda$$
$$|y| \leqq \xi, \quad z \geqq 0: \qquad z - \frac{z_1 - z_3}{2\xi} y = \frac{z_1 + z_3}{2}.$$

Přitom je $\lambda = \lambda(\eta)$ definováno jednoznačně jako jediný nulový bod funkce

$$\Phi_2(y) = \frac{1}{2} F^2(y) + pF(y) + \frac{1}{2} by^2 + Py - \Phi_1(\eta),$$

který splňuje nerovnost $\lambda < -\xi$. Že tomu tak je, můžeme ukázat takto:

$$\frac{\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{d}y} = f(y)\,[F(y) + p] + by + P.$$

Pro $y \leqq -\xi$ platí podle (6), (7), (8) $F(y) + p \leqq -p < 0$ a podle (12) je také $by + P \leqq -\varepsilon < 0$. $\Phi_2(y)$ je tedy klesající pro $y \leqq -\xi$. Navíc je podle (6).

$$\lim_{y \to -\infty} \Phi_2(y) = +\infty. \tag{13}$$

Podobně plyne, že $\Phi_1(y)$ je rostoucí pro $y \geqq \xi$. Protože $F(y)$ je rostoucí, platí podle (11), (10), (6) a (7)

$$F(\eta_1) \geqq -F(-B) \geqq -F(-\xi) > a\xi = 2p$$

a tedy

$$\frac{1}{2} F^2(\eta_1) + pF(\eta_1) \geqq \frac{1}{2} F^2(-\xi) + pF(-\xi). \tag{14}$$

Podle (12) je $\frac{1}{2} b\xi^2 - P\xi \geqq \frac{1}{2} b\eta_1^2 - P\eta_1$. Sečtením této nerovnosti s (14) dostáváme $\Phi_2(-\xi) + \Phi_1(\eta) < \Phi_1(\eta_1)$ a tedy $\Phi_2(-\xi) < 0$. To spolu s (13) již dává dokazované tvrzení.

Z definice λ plyne, že bod $[\lambda, F(\lambda)]$ je průsečíkem křivek K_1, K_2 o rovnicích $\frac{1}{2} z^2 + pz + \frac{1}{2} by^2 + Py = \Phi_1(\eta)$ a $z = F(y)$. Z (6) a (7) vidíme, že λ není menší než úsečka příslušného průsečíku K_1 s přímkou $z = ay$. To můžeme po snadném výpočtu vyjádřit nerovností

$$\psi(\eta) = -\frac{3P + [9P^2 + 2(a^2 + b)\,\Phi_1(\eta)]^{\frac{1}{2}}}{a^2 + b} \leqq \lambda(\eta) < -\xi. \tag{15}$$

Koeficienty z_1, z_2, z_3 jsou rovněž funkcemi η a jsou zvoleny tak, aby křivka byla uzavřená. Vypočteme je snadno z rovnic příslušných oblouků.

Jednoduše souvislou oblast, která je vnitřkem křivky $K(\eta)$ označme $K^\circ(\eta)$, uzávěr této oblasti $\overline{K^\circ(\eta)}$. $y(t)$, $z(t)$ bude v dalším znamenat řešení soustavy (5), $[y(t), z(t)]$ bod v rovině y, z o souřadnicích $y(t)$, $z(t)$.

Křivky $K(\eta)$ mají tyto důležité vlastnosti, stejné jako v [4]:

I. Je-li $[y_0, z_0] = [y(t_0), z(t_0)] \in \overline{K^\circ(\eta)}$, je pro $t > t_0$ $[y(t), z(t)] \in K^\circ(\eta)$.

II. $\lim\limits_{\eta\to+\infty} z_1(\eta) = \lim\limits_{\eta\to+\infty} -z_2(\eta) = \lim\limits_{\eta\to+\infty} z_3(\eta) = +\infty$, $z_1 + z_2 \geqq 2p$, $z_1 - z_3 \geqq 2p$.

Je-li $[y_0, z_0] \in \overline{K^\circ(\eta_1)}$, označme pro $t \in J_y$ symbolem $\eta(t;\ y_0, z_0)$ číslo pro které platí $[y(t), z(t)] \in K(\eta(t; y_0, z_0))$; tím je na J_y definována funkce $\eta(t; y_0, z_0)$. Pro stručnost buď $\eta(t_0;\ y_0, z_0) = \eta_0$. Podle I. je potom $[y(t), z(t)] \in K^\circ(\eta_0)$ pro $t \in J_y$. Výraz $|y(t)| + |z(t)|$ je proto na J_y omezený a podle známé existenční věty ([5], str. 135, věta 2) musí být $J_y = I_{p_y}$. Tvrzení 1° je tedy dokázáno. K důkazu 2° nyní stačí dokázat, že existuje kladná konstanta $\omega = \omega(y_0, z_0)$ tak, že pro $t \geqq t_0$ a $\eta \geqq \eta_1$ platí nerovnost

$$\frac{d\eta(t;\ y_0, z_0)}{dt} \leqq -\omega < 0. \tag{16}$$

V tomto případě totiž musí existovat $\tau(y_0, z_0) > t_0$ tak, že $\eta(\tau;\ y_0, z_0) = \eta_1$ a podle I. pak je pro $t > \tau$ $[y(t), z(t)] \in \overline{K^\circ(\eta_1)}$.

K důkazu (16) budeme potřebovat některé odhady a úvahy, které nyní provedeme.

Je-li $y \geqq \xi$, je $F(y) - p \geqq p > 0$ a $by \geqq P + \varepsilon$ podle (6), (7) a (12), jak jsme již viděli. Můžeme tedy pro $\xi \leqq y \leqq \eta$, $z \geqq F(y)$ počítat takto:

$$\frac{d\Phi_1[\eta(t;\ y_0, z_0)]}{dt} = \frac{\partial\Phi_1}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\frac{dz}{dt} =$$
$$= (z - p)\,[-by + p_y(t)] + (by - P)\,(z - F(y)) = p_y(t)\,(z - p) -$$
$$- P[z - F(y)] - by[F(y) - p] \leqq (P - by)\,(F(y) - p) \leqq -\varepsilon p < 0. \tag{17}$$

Jestliže pro nějaké $t_2 \geqq t_0$ je $y(t_2) \geqq \xi$, $F[y(t_2)] > z(t_2)$, pak existuje $\delta[y(t_2), z(t_2)] = \delta(y_0, z_0) > 0$ tak, že pro $t > t_2$ platí

$$z(t) - F[y(t)] < -\delta(y_0, z_0), \tag{18}$$

pokud $[y(t), z(t)]$ zůstává v množině $y \geqq \xi$, $F(y) > z$. V opačném případě by totiž existovalo $t' > t_2$ tak, že

$$\lim_{t\to t'-} \{z(t) - F[y(t)]\} = 0\} \tag{19}$$

a mohli bychom nalézt t'', $t_0 \leqq t'' < t'$ tak, že pro $t \in (t'', t')$ by bylo

$$\frac{d}{dt}\{z(t) - F[y(t)]\} = -by(t) + p_y(t) - f[y(t)]\,\{z(t) - F[y(t)]\} < -\frac{\varepsilon}{2}$$

což je spor s (19).

V množině $y \geqq \xi$, $z \leqq 0$ dostáváme užitím (6), (7)

$$\frac{d\left(\frac{1}{2}b\eta^2 + P\eta\right)}{dt} = (z - p)\,[-by + p_y(t)] + (by + P)\,[z - F(y)] \leqq$$
$$\leqq (by + P)\,[p - F(y)] < -Pp < 0. \tag{20}$$

V množině $|y| \leqq \xi$, $z \leqq z_2(\eta)$ plyne pro $\eta \geqq \eta_1$ užitím (8), (9) (10), (11) nerovnost

$$z_2(\eta) - F(-\xi) < -\xi \frac{b\xi + P}{p} - \varepsilon \frac{\xi}{p}$$

a navíc ovšem je $z(t) - F[y(t)] \leqq z_2(\eta) - F(-\xi)$, pokud $[y(t), z(t)]$ zůstává v uvažované množině. Tam tedy platí podle II.:

$$\frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}(z_2 - z_1)}{\mathrm{d}t} = -by + p_y(t) - \frac{z_1 + z_2}{2\xi} [z - F(y)] > \varepsilon. \tag{21}$$

Zavedeme-li ještě konstantu

$$M_1 = \max_{\eta_1 \leqq \eta \leqq \eta_0} \frac{\mathrm{d}\Phi_1(\eta)}{\mathrm{d}\eta}, \tag{22}$$

platí pro $\eta_1 \leqq \eta \leqq \eta_0$ nerovnost

$$\frac{\mathrm{d}(z_2 - z_1)}{\mathrm{d}t} \geqq -\frac{1}{p} [b\eta_0 + P + M_1]. \tag{23}$$

Vypočteme a odhadneme ještě $\dfrac{d\lambda(\eta)}{d\eta}$. Funkce $\lambda(\eta)$ je definována implicitně rovnicí $\Phi_2(\lambda) = 0$ a proto

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\eta} = \frac{f(\eta) [F(\eta) - p] + b\eta - P}{f(\lambda) [F(\lambda) + p] + b\lambda + P}. \tag{24}$$

Označme

$$M_2 = \max_{\eta_1 \leqq \eta \leqq \eta_0} f[\lambda(\eta)] [F(\lambda(\eta)) + p] + b\lambda(\eta) + P. \tag{25}$$

Pro $\eta \in \langle \eta_1, \eta_0 \rangle$ pak platí nerovnosti

$$-\frac{M_1}{ap + \varepsilon} \leqq \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\eta} \leqq -\frac{ap + \varepsilon}{M_2} < 0. \tag{26}$$

Odhady a úvahy ve zbývajících množinách již nebudeme provádět, neboť jsou zcela analogické.

Nyní přistoupíme k důkazu nerovnosti (16). Budeme postupovat opět po jednotlivých množinách.

V množině $\xi \leqq y$, $F(y) \leqq z$ máme podle (17) a (22)

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\Phi_1} \frac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}t} \leqq \frac{-\varepsilon p}{M_1} < 0,$$

v množině $\xi \leqq y$, $F(y) > z \geqq 0$ podle (18)

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} < -\delta(y_0, z_0) < 0,$$

v množině $\xi \leqq y$, $z \leqq 0$ podle (20)

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{d\eta}{d\left(\frac{1}{2}b\eta^2 + P\eta\right)} \frac{d\left(\frac{1}{2}b\eta^2 + P\eta\right)}{dt} < -\frac{Pp}{b\eta_0 + P} < 0$$

a v množině $|y| \leqq \xi$, $z \leqq z_2(\eta)$ podle (21), (23)

$$\frac{d\eta}{dt} = -\frac{d\eta}{d(z_1 - z_2)} \frac{d(z_1 - z_2)}{dt} < -\frac{2\varepsilon p}{b\eta_0 + P + M_1}.$$

Pro $y \leqq -\xi$, $z \leqq F(y)$ platí stejná nerovnost jako v množině $y \geqq \xi$, $z \geqq F(y)$; její odvození je analogické.

V množině $y \leqq -\xi$, $0 \geqq z > F(y)$ platí nerovnost $z - F(y) > \delta'(y_0, z_0)$, odpovídající (18) a užijeme-li ještě (26) dostaneme

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{d\eta}{d\lambda}\frac{d\lambda}{dt} < -\frac{ap + \varepsilon}{M_1}\delta'(y_0, z_0)' < 0.$$

V množině $y \leqq -\xi$, $z > 0$ platí nerovnost analogická (20), která spolu s (26) dává

$$\frac{d\eta}{dt} < \frac{(ap + \varepsilon)\,Pp}{M_1(b\lambda(\eta_0) - P)} < 0.$$

Podle (10) a (15) je $\lambda < -B$, takže v množině $|y| \leqq \xi$, $z \geqq z_3(\eta)$ platí nerovnost odpovídající (21):

$$\frac{d(z_1 + z_3)}{dt} < -\varepsilon < 0.$$

Pro $\eta_1 \leqq \eta \leqq \eta_0$ plyne podle (26)

$$\frac{d\eta}{d(z_1 + z_3)} = \left[\frac{dz_1}{d\eta} + \frac{dz_3}{d\lambda}\frac{d\lambda}{d\eta}\right]^{-1} \geqq \frac{p}{M_1}\left[1 - \frac{1}{ap}(b\lambda(\eta_0) - P)\right]^{-1} = \gamma > 0.$$

Z posledních dvou nerovností dostáváme na uvažované množině

$$\frac{d\eta}{dt} < -\gamma\varepsilon < 0.$$

Tím je ukončen důkaz nerovnosti (16) a tedy i celé pomocné věty.

Poznámka 1: Důkaz předchozí pomocné věty nám umožňuje provést odhad konstanty D. Viděli jsme, že ke každému řešení soustavy (5) existuje $\tau \geqq t_0$ tak, že $[y(t), z(t)] \in K^\circ(\eta_1)$ pro $t > \tau$. Je-li $y(t)$ řešením nějaké rovnice z M_{t_0} pak $|y'(t)| \leqq |z(t)| + |F[y(t)]|$. Pro $y(t)$ je podle (15) při $t > \tau$

$$|y(t)| \leqq \mathrm{Max}\,[\eta_1, \psi(\eta_1)] \tag{27}$$

a proto

$$|y'(t)| \leqq |z_1(\eta_1)| + \mathrm{Max}\,[F(\eta_1), -F(\psi(\eta_1))]. \tag{28}$$

Celkem tedy

$$D \leqq \text{Max}\,[D_1, D_2], \tag{29}$$

kde D_1 resp. D_2 jsou konstanty na pravé straně nerovností (27) resp. (28).

2. Nyní se budeme zabývat diferenciální rovnicí (1). V celé této části budeme předpokládat, že b je kladná konstanta, že $f(y)$, $h(x)$, $Q(t)$ jsou spojité na intervalu $(-\infty, +\infty)$ a že existují kladné konstanty a_1, H, Q tak, že pro všechna y, x, t platí

$$f(y) \geqq a_1, \qquad |h(x)| \leqq H, \qquad |Q(t)| \leqq Q.$$

Věta 1: Každé řešení $x(t)$ rovnice (1), splňující pro $t = t_0$ podmínky $x(t_0) = x_0$, $x'(t_0) = x_0'$, $x''(t_0) = x''$ existuje v intervalu $\langle t_0, +\infty)$ a hoví nerovnostem

$$\limsup_{t\to+\infty} |x'(t)| \leqq D, \qquad \limsup_{t\to+\infty} |x''(t)| \leqq D,$$

kde konstanta D splňuje (29) a je společná pro všechny uspořádané trojice (x_0, x_0', x_0'') a všechna t_0.

Důkaz: $x(t)$ existuje v jistém maximálním „pravém" intervalu $\langle t_0, t_1)$ a splňuje tam vztah

$$x''' + f(x')\,x'' + bx' = Q(t) - h(x). \tag{30}$$

Položme $x'(t) = y(t)$, $Q(t) - h[x(t)] = p(t)$. Při tomto označení nabývá vztah (30) tvaru

$$y'' + f(y)\,y' + by = p(t). \tag{31}$$

Díváme-li se na (31) jako na diferenciální rovnici druhého řádu, pak tato rovnice patří do množiny M_{t_0} a počátečními podmínkami $y(t_0) = x_0'$, $y'(t_0) = x_0''$ je jedno její řešení, označme je $y_0(t)$, jednoznačně určeno [6]. Funkce $x'(t)$ tedy splývá s $y_0(t)$ a to podle tvrzení 1° pomocné věty na celém intervalu $\langle t_0, t_1)$. Podle existenční věty ([5], str. 135, věta 2), užité na soustavu

$$x' = y, \qquad y' = z, \qquad z' = -f(y)\,z - by - h(x) + Q(t),$$

ekvivalentní rovnici (1), je $t_1 < +\infty$ právě když platí aspoň jeden ze vztahů

$$\lim_{t_1\to t_1-} |x(t)| = +\infty \tag{32}$$

$$\lim_{t\to t_1-} |y(t)| = +\infty, \qquad \lim_{t\to t_1-} |z(t)| = +\infty. \tag{33}$$

Protože $y(t) = x'(t)$, $z(t) = x''(t)$, plyne bezprostředně z tvrzení 1° pomocné věty, že nemůže platit (33). Pro $t \in \langle t_0, t_1)$ však platí $|x(t)| \leqq |x(t_0)| + \sup_{t_0 \leqq t < t_1} |y(t)|\,(t_1 - t_0)$ a proto nemůže z týchž příčin platit ani (32). Musí tedy být $t_1 = +\infty$. Zbytek tvrzení věty už přímo plyne z tvrzení 2° pomocné věty.

Poznámka 2. Vzniká přirozeně otázka, zda je možno pomocí věty 1 dokázat i omezenost $x(t)$ při zachování podmínky na $f(y)$. Rovnice

$$x''' + f(x')\,x'' + bx' + h(x) = 1 - h\left(\frac{b}{t}\right)$$

má řešení $x(t) = \frac{t}{b}$. Z toho vidíme, že kladením dalších podmínek jen na funkci $h(x)$ nelze dosáhnout omezenosti $x(t)$. Totéž řešení má však i rovnice

$$x''' + f(x')\,x'' + bx' + Q(bx) = 1 + Q(t),$$

takže ani dodatečné podmínky kladené jen na $Q(t)$ nemohou zajistit omezenost $x(t)$.

Věta 2: Nechť existují konstanty $h > 0$, $Q_1 > 0$ tak, že pro funkce $h(x)$ a $Q(t)$ z rovnice (1) *platí*

$$\operatorname{sgn} xh(x) \geqq 0 \text{ pro } |\,x\,| \geqq h, \qquad \left|\int_0^t Q(s)\,\mathrm{d}s\right| \leqq Q_1 \text{ pro všechna } t. \tag{34}$$

Potom jsou všechna řešení této rovnice omezená.

Důkaz: Zvolme pevně řešení $x(t)$ rovnice (1). Podle věty 1 existuje τ tak, že pro $t \geqq \tau$ platí

$$|\,x'(t)\,| < D + 1, \qquad |\,x''(t)\,| < D + 1. \tag{35}$$

Předpokládejme nyní, že v jistém intervalu $\langle t_1, t_2) \subset \langle \tau, +\infty)$ platí

$$|\,x(t)\,| \geqq h. \tag{36}$$

Rovnici (1) pišme ve tvaru

$$bx'(t) = Q(t) - h[x(t)] - f(x')\,x''(t) - x'''(t) \tag{37}$$

a integrujme v mezích t_1, $t \in \langle t_1, t_2)$. Znásobíme-li takto vzniklou identitu $\operatorname{sgn} x(t) =$ konst. a přejdeme k absolutním hodnotám, vyjde nám nerovnost

$$b[x(t) - x(t_1)] \operatorname{sgn} x \leqq \left|\int_{t_1}^{t} Q(s)\,\mathrm{d}s\right| - \int_{t_1}^{t} h[x(s)] \operatorname{sgn} x\,\mathrm{d}s + \tag{38}$$
$$+ |\,F[x'(t)] - F[x'(t_1)]\,| + |\,x''(t) - x''(t_1)\,|.$$

Z (36) plyne, že pro tato t platí první nerovnost z (34), takže (38) bude platit tím spíše, vynecháme-li v ní člen s $h[x(s)]$. Podle předpokladů věty a (35) pak dostáváme

$$b[x(t) - x(t_1)] \operatorname{sgn} x \leqq$$
$$\leqq 2[Q_1 + \operatorname{Max}\,[F(D + 1), -F(-D - 1)] + D + 1] = M.$$

Pro t z uvažovaného intervalu tedy platí

$$|\,x(t)\,| \leqq |\,x(t_1)\,| + \frac{M}{b},$$

takže věta je dokázána.

Dalším zesílením podmínky na funkci $h(x)$ lze dosáhnout dissipativnosti naší rovnice.

Věta 3: Nechť existuje konstanta Q_1 tak, že pro funkce $h(x)$ a $Q(t)$ z rovnice (1) *platí*

$$\liminf_{|x| \to +\infty} xh(x) > 0, \qquad \left| \int_0^t Q(s) \, \mathrm{d}s \right| \leqq Q_1 \text{ pro } \textit{pro všechna } t. \tag{39}$$

Potom existuje konstanta D_1 tak, že pro libovolné řešení $x(t)$ rovnice (1) *platí*

$$\limsup_{t \to +\infty} |x(t)| \leqq D_1, \qquad \limsup_{t \to +\infty} |x'(t)| \leqq D_1,$$
$$\limsup_{t \to +\infty} |x''(t)| \leqq D_1. \tag{40}$$

Důkaz: Označme $\liminf_{|x| \to +\infty} xh(x) = 2d$; podle (39) je $d > 0$. Existuje $h > 0$ tak, že pro $|x| \geqq h$ platí $xh(x) \geqq d$, takže podle (39) je splněno (34) a podle věty 2 je každé řešení diferenciální rovnice (1) omezené. Zvolme pevně jedno takové řešení $x(t)$ a označme $\sup |x(t)| = X < +\infty$. Poznamenejme ještě, že podle věty 1 existuje T tak, že pro $t \geqq T$ platí

$$|x'(t)| < D + 1, \qquad |x''(t)| < D + 1.$$

Integrací rovnice (1) dostáváme pak pro libovolná dvě čísla t a t_1, vázaná vztahem $t \geqq t_1 \geqq T$, po přechodu k absolutním hodnotám nerovnost

$$\left| \int_{t_1}^t h[x(s)] \, \mathrm{d}s \right| \leqq 2(a_1 + 1)(D + 1) + 2X + 2Q_1. \tag{41}$$

Pro $|x| \geqq h$ platí podle předchozího $h(x) \operatorname{sgn} x \geqq \dfrac{d}{|x|}$ a podle věty o střední hodnotě $|x(t)| \leqq |x(t_1)| + (D + 1)(t - t_1)$. Předpokládejme nyní, že existuje $t_1 \geqq T$ tak, že pro $t \geqq t_1$ je stále $|x(t)| \geqq h$. Z provedených úvah plyne, že pro tato t platí

$$h[x(t)] \operatorname{sgn} x(t) \geqq \frac{d}{|x(t_1)| + (D + 1)(t - t_1)}; \tag{42}$$

navíc je ovšem $\operatorname{sgn} x(t) = \text{konst.}$ Z toho dále

$$\operatorname{sgn} x(t) \int_{t_1}^t h[x(s)] \, \mathrm{d}s \geqq d \int_{t_1}^t \frac{\mathrm{d}s}{|x(t_1)| + (D + 1)(s - t_1)} =$$
$$= \frac{d}{D + 1} \lg \left[1 + \frac{(D + 1)(t - t_1)}{|x(t_1)|} \right] = \alpha(t; t_1). \tag{43}$$

Podle (42) je pro $t \geqq t_1$ $\operatorname{sgn} x(t) = \operatorname{sgn} h[x(t)] = \operatorname{sgn} \int_{t_1}^t h[x(s)] \, \mathrm{d}s$, takže (43) dává

$$\left| \int_{t_1}^t h[x(s)] \, \mathrm{d}s \right| \geqq \alpha(t; t_1)]. \tag{44}$$

Při pevném t_1 je ovšem $\lim\limits_{t\to+\infty} \alpha(t; t_1) = +\infty$, takže (44) je pro dost velká t ve sporu s nerovností (41). Proto musí platit

$$\liminf_{t\to+\infty} |x(t)| \leqq h. \tag{45}$$

Zvolme $\lambda > 0$. Podle (45) mohou nastat jen dva případy: a) existuje $\bar{t}$ tak, že pro $t \geqq \bar{t}$ je stále $|x(t)| < h + \lambda$. b) existuje rostoucí a divergentní posloupnost $\{\bar{t}_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ tak, že $\bar{t}_1 > T$ a že $|x(\bar{t}_k)| = h + \lambda$ $(k = 1,2, \ldots)$. V případě a) je vše jasné. Nastane-li b), pak v intervalech (t_i, t_{i+1}), v nichž platí $|x(t)| > h + \lambda$, dostáváme stejně jako v důkaze věty 2 nerovnost

$$|x(t)| \leqq \frac{2}{b}\{Q_1 + \mathrm{Max}\,[F(D+1), -F(-D-1)] + D + 1\} + h + \lambda.$$

Tím je věta dokázána a navíc jsme získali odhad pro D_1.

Věta 4: V rovnici (1) *nechť je* $\left|\int_0^t Q(s)\,\mathrm{d}s\right| \leqq Q_1$ *pro všechna* t *a navíc*

$$\limsup_{|x|\to+\infty} xh(x) < -R, \tag{46}$$

kde (D je konstanta z poznámky (1)*)*

$$R = \frac{H}{b}[D + \mathrm{Max}\,(F(D), -F(-D)) + Q_1]. \tag{47}$$

Uvažovaná rovnice má potom řešení, pro které platí

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = +\infty. \tag{48}$$

Důkaz: Budeme užívat označení z odstavce 1. Uvažujme funkci

$$2V(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{1}{b}\left[-x_3 - F(x_2) - bx_1 + \int_0^t Q(s)\,\mathrm{d}s\right]^2. \tag{49}$$

Je zřejmé, že pro $|x_2| \leqq D$, $|x_3| \leqq D$, $-\infty < t < +\infty$ platí

$$\lim_{|x_1|\to+\infty} V(x_1, x_2, x_3, t) = +\infty. \tag{50}$$

Označme ještě pro $k > 0$ $S(k) = \sup V(x_1, x_2, x_3, t)$ na množině $|x_1| \leqq k$, $|x_2| \leqq D$, $|x_3| \leqq D$, $-\infty < t < +\infty$. Podle (46) existují kladná čísla h_1, d tak, že pro $|x_1| \geqq h_1$ je $x_1h(x_1) < -R - d$ a z vlastnosti (50) funkce V plyne existence $h > h_1$ tak, že pro $|x_1| > h$, $|x_2| \leqq D$, $|x_3| \leqq D$, $-\infty < t < \infty$ je

$$V(x_1, x_2, x_3, t) > S(h_1). \tag{51}$$

Zvolme nyní pevně řešení $x(t)$ rovnice (1), pro které platí $x(t_0) = x_0$, $x'(t_0) = x_0'$ $x''(t_0) = x_0''$, přičemž tato čísla splňují vztahy $|x_0| > h$, $[x_0', x_0'' + F(x_0')] \in K^\circ(\eta_1)$. Položíme-li $x'(t) = y(t)$, $z(t) = y'(t) + F[y(t)]$, $p_y(t) = Q(t) - h[x(t)]$, je $y(t)$, $z(t)$ řešením soustavy (5). Z důkazu pomocné věty víme, že pro $t \geqq t_0$ je $[y(t), z(t)] \in K^\circ(\eta_1)$, takže vzhledem k poznámce 1 je pro tato t

$$| x'(t) | \leqq D, \qquad | x''(t) | \leqq D. \tag{52}$$

Dosaďme nyní do (49) za x_1, x_2, x_3 funkce $x(t), x'(t), x''(t)$. Vznikne tak složená funkce proměnné t, kterou označíme stručně $V(t)$ a pro jejíž derivaci platí

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{b}\left[-x'' - F(x') - bx + \int_0^t Q(s)\,\mathrm{d}s\right]h(x) \geqq$$

$$\geqq -xh(x) - \frac{H}{b}[D + \mathrm{Max}\,(F(D), -F(-D)) + Q_1] = -xh(x) - R.$$

Pro $t = t_0$ je ovšem $-xh(x) - R > d > 0$ a tedy

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} > d > 0; \tag{53}$$

tato nerovnost platí rovněž pro všechna $t \geqq t_0$, pro něž je $| x(t) | \geqq h_1$. Kdyby existovalo číslo $\Theta > t_0$ tak, že $x(\Theta) = h_1$ a $x(t) > h_1$ pro $t_0 \leqq t < \Theta$, bylo by podle (52) a (51)

$$V(t_0) > S(h_1) \geqq V(\Theta),$$

což je spor s (53). Musí proto být $| x(t) | > h_1$ pro všechna $t \geqq t_0$. Z toho ovšem plyne, že pro všechna tato t je správná nerovnost (53), takže zřejmě

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{b}\left[-x''(t) - F(x') - bx(t) + \int_0^t Q(s)\,\mathrm{d}s\right]^2 = \lim_{t\to+\infty} V(t) = +\infty.$$

Z toho a z (52) vidíme, že platí (48). Věta 4 je tím dokázána.

Následující věta se zabývá asymptotickými vlastnostmi řešení rovnice (1):

Věta 5: V rovnici (1) *nechť platí*

$$xh(x) > 0 \text{ pro } x \neq 0, \ \left| \int_0^t Q(s)\,\mathrm{d}s \right| \leqq Q_1 \text{ pro všechna } t. \tag{54}$$

Potom každé řešení této rovnice splňuje vztah

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0, \tag{55}$$

nebo je oscilující (t.j. ke každému t existuje $t_1 > t$ tak, že $x(t_1) = 0$).

Důkaz: Poznamenejme nejprve, že platí-li pro některé t vztah $x(t) \geqq \delta > 0$, pak plyne ze spojitosti funkce $h(x)$ a z první nerovnosti (54), že existuje $\varepsilon(\delta) > 0$ tak, že pro tato t je

$$| h[x(t)] | \geqq \varepsilon(\delta) > 0, \tag{56}$$

neboť $x(t)$ je podle věty 2 omezené.

Předpokládejme nyní, že $x(t)$ neosciluje a že neplatí (55). Potom existuje $\delta > 0$ a k němu posloupnost $\{t_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ tak, že je $|x(t_n)| \geqq 2\delta$ pro všechna n. Označme ještě $X = \sup |x(t)|$, $X' = \sup |x'(t)|$, $X'' = \sup |x''(t)|$, $t_0 \leqq t < +\infty$. Podle vět 1 a 2 jsou to konečná čísla. Posloupnost $\{t_n\}$ je rostoucí a divergentní a můžeme o ní předpokládat, že platí

$$t_1 > t_0 + \frac{\delta}{X'}, \qquad |x(t)| > 0 \text{ pro } t \geqq t_1, \qquad t_{n+1} - t_n > \frac{2\delta}{X'} \tag{57}$$

pro všechna n. Označíme-li

$$J_n = \left(t_n - \frac{\delta}{X'}, \qquad t_n + \frac{\delta}{X'}\right) \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

dostáváme posloupnost po dvou disjunktních intervalů; pro $t \in J_n$ platí podle věty o střední hodnotě

$$|x(t) - x(t_n)| \leqq |t - t_n| X' < \delta$$

a tedy podle (57)

$$|x(t)| > |x(t_n)| - \delta \geqq \delta.$$

Odtud, z (56) a z (54) plyne pro $t \geqq t_{n+2}$ nerovnost

$$\left| \int_{t_1}^{t} h[x(s)] \, ds \right| = \int_{t_1}^{t} |h[x(s)]| \, ds > \frac{2n\delta\varepsilon(\delta)}{X'}$$

$(n = 1, 2, \ldots)$, neboli

$$\lim_{t \to +\infty} \left| \int_{t_1}^{t} h[x(s)] \, ds \right| = +\infty. \tag{58}$$

Z rovnice (1) však vyplývá pro $t \geqq t_1$ integrací nerovnost (podobně jako v důkaze věty 3)

$$\left| \int_{t_1}^{t} h[x(s)] \, ds \right| \leqq 2[Q_1 + \operatorname{Max}(F(X'), -F(-X')) + bX].$$

To je ovšem ve sporu s (58) a věta je dokázána.

Poznámka 3: Jestliže funkce $h(x)$ splňuje lokálně Lipschitzovu podmínku pak vidíme, že soustava

$$x' = y, \qquad y' = z - F(y), \qquad z' = -by - h(x) + Q(t),$$

ekvivalentní rovnici (1) splňuje lokálně Lipschitzovu podmínku vzhledem k proměnným x, y, z. Potom jsou tedy řešení určena počátečními podmínkami jednoznačně. V tomto případě je možno, je-li $Q(t)$ periodická, dokázat pomocí Levinsonovy transformace existenci periodického řešení ([7]), jsou-li splněny předpoklady věty 3. Je-li navíc $xh(x) > 0$ pro $x \neq 0$, plyne z věty 5, že periodické řešení je oscilující.

V důkaze věty 3 byl nejdůležitější důkaz vztahu (45), z věty 5 však vyplývá pro $x(t)$ silnější vztah

$$\liminf_{t \to +\infty} |x(t)| = 0. \tag{59}$$

Z toho je vidět, že je možno dokázat i takovouto větu o dissipativnosti rovnice (1):

Věta 6: V rovnici (1) *nechť platí* (54). *Potom je tato rovnice dissipativní* (*t.j. všechna její řešení se dají prodloužit pro* $t \to +\infty$ *a existuje konstanta* D_1 *tak, že platí* (40)).

Důkaz: Z (59) plyne, že mohou nastat jen dva případy, analogické případům a), b) z důkazy věty 3.

3. V této části si všimneme diferenciální rovnice (2). V celé třetí části budeme předpokládat, že konstanta a je kladná, funkce $h(x)$, $h'(x)$, $g(x)$ a $Q(t)$ spojité. Položíme rovněž $G(t) = \int_0^t g(s)\,\mathrm{d}s$. K důkazu dissipativnosti rovnice (2) užijeme Yoshisawovy věty, která je uvedena např. v [8]. Pro naše účely postačí její zvláštní případ, který můžeme formulovat takto:

Věta: Buď dána soustava diferenciálních rovnic

$$x' = f_1(x, y, z, t), \qquad y' = f_2(x, y, z, t), \qquad z' = f_3(x, y, z, t), \tag{60}$$

kde funkce f_i *jsou spojité v* E_4. *Nechť existuje funkce* $V(x, y, z)$ *se spojitými derivacemi podle všech proměnných, s těmito vlastnostmi:*

$$\lim_{|x|+|y|+|z| \to +\infty} V(x, y, z) = +\infty, \tag{61}$$

existuje $R > 0$ *tak, že pro* $|x| + |y| + |z| > R$ *platí nerovnost*

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial V}{\partial x} f_1 + \frac{\partial V}{\partial y} f_2 + \frac{\partial V}{\partial z} f_3 \leqq -\varepsilon < 0. \tag{62}$$

Potom je soustava (60) *dissipativní.*

Věta 7: Nechť existují kladné konstanty H, G, Q_1, δ *a konstanta* $\delta' < \delta$ *tak, že platí*

1. $|h(x)| \leqq H$, $|g(x)| \leqq G$, $\left|\int_0^t Q(s)\,\mathrm{d}s\right| < Q_1$ *pro všechna* x, t *z intervalu* $(-\infty, +\infty)$.
2. $h'(x) \leqq \delta' < \delta$ *pro všechna* x, $\liminf_{|x| \to +\infty} xh(x) > 0$.
3. $\liminf_{|x| \to +\infty} h(x)\,[aG(x) - \delta x] > C$,

kde $C = \dfrac{aU^2}{4\delta_1} + aV$ *při označení* $H(Q_1 + 1) + \dfrac{Q_1^2}{4} + a = V$,

$$\frac{\delta}{a} Q_1 + G = U, \qquad \delta_1 = \delta - \delta'.$$

Potom je rovnice (2) *dissipativní.*

Důkaz: Místo (2) budeme uvažovat ekvivalentní soustavu

$$x' = y, \quad y' = z - ay + \int_0^t Q(s)\,\mathrm{d}s, \quad z' = -yg(x) - h(x). \tag{63}$$

Hlavním nástrojem důkazu bude funkce $V(x, y, z)$, definovaná takto:

$$2V(x, y, z) = \left(z + G(x) - \frac{\delta}{a}x\right)^2 + \frac{\delta}{a}\left(y + \frac{a}{\delta}h(x)\right)^2 +$$
$$+ 2a\int_0^x \left(1 - \frac{h'(s)}{\delta}\right) h(s)\,\mathrm{d}s + \frac{2\delta}{a^2}\int_0^x (aG(s) - \delta s)\,\mathrm{d}s - \frac{2yz}{(1 + |y|)(1 + |z|)}. \tag{64}$$

Ukážeme, že tato funkce má vlastnosti (60) a (61). Podle druhé podmínky 2) existuje $h_1 > 0$ tak, že pro $|x| \geqq h_1$ je $\operatorname{sgn} xh(x) > 0$. Podle 3) existuje $h_2 > 0$ tak, že pro $|x| \geqq h_2$ platí $h(x)(aG(x) - \delta x) > 0$. Je-li $|x| \geqq h$, kde $h = \operatorname{Max}(h_1, h_2)$, platí $[aG(x) - \delta x] \operatorname{sgn} x > 0$ a rovněž $C < h(x)[aG(x) - \delta x] = h(x) \operatorname{sgn} x \,.\, \operatorname{sgn} x \,.\, [aG(x) - \delta x] \leqq H[aG(x) - \delta x] \operatorname{sgn} x$. Z toho plyne dále (můžeme ovšem předpokládat $|x| \geqq h$):

$$\lim_{|x| \to +\infty} \int_0^x [aG(s) - \delta s]\,\mathrm{d}s = \lim_{|x| \to +\infty} \left| \int_0^{h \operatorname{sgn} x} + \int_{h \operatorname{sgn} x}^x \right| \geqq$$

$$\geqq \operatorname*{Min}_{-h \leqq y \leqq h} \int_0^y [aG(s) - \delta s]\,\mathrm{d}s + \lim_{|x| \to +\infty} \frac{C}{H}(x - h \operatorname{sgn} x) \operatorname{sgn} x = +\infty. \tag{65}$$

Dále je podle 2) $1 - \dfrac{h'(x)}{\delta} > 0$ pro všechna x, takže pro $|x| \geqq h_1$ je $\displaystyle\int_{h_1 \operatorname{sgn} x}^x \left(1 - \frac{h'(s)}{\delta}\right) h(s)\,\mathrm{d}s \geqq 0$. Musí tedy být

$$\int_0^x \left(1 - \frac{h'(s)}{\delta}\right) h(s)\,\mathrm{d}s \geqq \operatorname*{Min}_{-h \leqq y \leqq h} \int_0^y \left(1 - \frac{h'(s)}{\delta}\right) h(s)\,\mathrm{d}s > -\infty. \tag{66}$$

Nerovnost

$$\left| \frac{yz}{(1 + |y|)(1 + |z|)} \right| < 1 \tag{67}$$

je zřejmá.

Z definice (64) funkce $V(x, y, z)$ a z nerovností (65), (66) a (67) vidíme, že je

$$\lim_{|x| \to +\infty} V(x, y, z) = +\infty. \tag{68}$$

Z (65), (66), (67) a (64) je ihned zřejmo, že platí rovněž $\lim\limits_{|y|\to+\infty} V(x, y, z) = +\infty$. Konečně neplatí-li $\lim \left(z + G(x) - \frac{\delta}{a} x\right)^2 = +\infty$, musí být $\lim\limits_{|z|\to+\infty} |x| = +\infty$, takže v každém případě je podle (68) $\lim\limits_{|z|\to+\infty} V(x, y, z) = +\infty$.

Tím je dokázáno, že funkce $V(x, y, z)$ má vlastnost (61). Abychom dokázali i (62), vypočteme nejprve $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$ pomocí soustavy (63). Vychází

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -h(x)\left(G(x) - \frac{\delta}{a} x\right) - y^2[\delta - h'(x)] + \frac{\delta}{a} y \int_0^t Q(s)\,\mathrm{d}s +$$

$$+ h(x) \int_0^t Q(s)\,\mathrm{d}s + \frac{ayz}{(1 + |z|)(1 + |y|)^2} + \frac{y^2 g(x)}{(1 + |y|)(1 + |z|)^2} +$$

$$+ \frac{yh(x)}{(1 + |y|)(1 + |z|)^2} - \frac{1}{(1 + |z|)(1 + |y|)^2}\left(z^2 + z \int_0^t Q(s)\,\mathrm{d}s\right).$$

Užitím předpokladů věty tedy můžeme provést odhad

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} \leqq -h(x)\left(G(x) - \frac{\delta}{a} x\right) - y^2\delta_1 + \frac{\delta}{a} |y| Q_1 + HQ_1 +$$

$$+ a + |y| G + H - \frac{1}{(1 + |z|)(1 + |y|)^2}\left(z^2 + z \int_0^t Q(s)\,\mathrm{d}s\right). \tag{69}$$

Protože platí

$$z^2 + z \int_0^t Q(s)\,\mathrm{d}s \geqq z^2 - |z| Q_1 \geqq -\frac{Q_1^2}{4},$$

je

$$-\frac{1}{(1 + |z|)(1 + |y|)^2}\left(z^2 + z \int_0^t Q(s)\,\mathrm{d}s\right) \leqq \frac{Q_1^2}{4},$$

takže nakonec

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} \leqq -h(x)\left(G(x) - \frac{\delta}{a} x\right) - y^2\delta + |y| U + V. \tag{70}$$

Snadno vypočteme, že platí

$$\max_{-\infty<y<+\infty} (-y^2\delta_1 + |y| U + V) = \frac{U^2}{4\delta_1} + V. \tag{71}$$

Označme $\liminf\limits_{|x|\to+\infty} h(x)\,[aG(x) - \delta x] - C = 2a\varepsilon$, takže podle 3) je $\varepsilon > 0$ a existuje $k > 0$ tak, že pro $|x| \geqq k$ je $h(x)\left(G(x) - \frac{\delta}{a}x\right) > \frac{U^2}{4\delta_1} + V + \varepsilon$. Podle (70) a (71) platí pro $|x| \geqq k$, y a z libovolná, nerovnost $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} < -\varepsilon < 0$. Užitím (70) můžeme rovněž psáti nerovnost, správnou pro všechna x, y, z

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} \leqq \operatorname*{Max}_{|x|\leqq k}\left[-h(x)\left(G(x) - \frac{\delta}{a}x\right)\right] - \delta_1 y^2 + |y|\,U + V = m(y)$$

a protože $\lim\limits_{|y|\to+\infty} m(y) = -\infty$, existuje zřejmě číslo $l > 0$ takové, že pro $|y| \geqq l$, x a z libovolná bude platit $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} < -\varepsilon < 0$. Konečně platí-li $|x| + |y| \leqq \leqq k + l$, dostáváme pro dostatečně veliké $|z|$:

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} \leqq \operatorname*{Max}_{|x|+|y|\leqq k+l}\left[-h(x)\left(G(x) - \frac{\delta}{y}x\right) - y^2\delta_1 + yU + V\right] -$$
$$- \frac{1}{(1+k+l)^2}\,(|z| - Q_1)\,\frac{|z|}{1+|z|} = n(z).$$

Opět platí $\lim\limits_{|z|\to+\infty} n(z) = -\infty$, takže existuje číslo $r > 0$ tak, že pro $|z| \geqq r$ a $|x| + |y| \leqq k + l$ platí $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} < -\varepsilon < 0$. Je-li tedy $|x| + |y| + |z| \geqq \geqq k + l + r$, platí $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} < -\varepsilon < 0$, tj. (62). Věta 7 je tím dokázána.

Věta 8: Za předpokladů věty 7 nechť $xh(x) > 0$ pro $x \neq 0$. Potom jsou všechna řešení rovnice (2) oscilující nebo platí (55).

Důkaz: Je zcela analogický důkazu věty 5.

4. V této části budeme předpokládat, že v rovnici (3) jsou a, b kladné konstanty, funkce $h(x)$, $Q(t)$ jsou spojité v intervalu $(-\infty, +\infty)$ a že platí $|h(x)| \leqq H$, $|Q(t)| \leqq Q$, $\left|\int_0^t Q(s)\,\mathrm{d}s\right| \leqq Q_1$ pro všechna x, t.

Věty z odstavců 2. a 3. je ovšem možno specialisovat na rovnici (3). Pro větu 4 je důležitý odhad první a druhé derivace řešení diferenciální rovnice (3). V tomto speciálním případě je výhodné užít věty 1 z práce [9], kde je uveden i jednoduchý způsob výpočtu konstant A, B, pro které platí

$$\limsup_{t\to+\infty} |x'(t)| \leqq B, \qquad \limsup_{t\to+\infty} |x''(t)| \leqq A.$$

V tomto zvláštním případě je možno zlepšit i odhad konstanty R z věty 4. Platí

Věta 4': V rovnici (3) nechť je

$$\limsup_{|x|\to+\infty} xh(x) < -\frac{H}{b}(A + Q_1). \tag{72}$$

Potom existuje řešení rovnice (3), *pro které platí*

$$\lim_{t \to +\infty} |x(t)| = +\infty.$$

Důkaz: Úvahy jsou stejné jako v důkaze věty 4, místo funkce $V(x_1, x_2, x_3, t)$ však užijeme funkce

$$V_1(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{a}{b} \int_0^{x_1} h(s) \, ds + \frac{1}{2b} \left(-x_3 - ax_2 - bx_1 + \int_0^t Q(s) \, ds \right)^2. \tag{73}$$

Z předpokladu (72) snadno vidíme, že $\int_0^t h(s) \, ds$ je shora omezený, takže při $|x_2| \leqq B$, $|x_3| \leqq A$ platí i pro V_1 vztah (50). Podle (72) a (50) je zajištěna existence čísel $\bar{h}_1, \bar{h}$, která mají stejný význam pro V_1, jako h_1, h pro V v důkaze věty 4. Buď $x(t)$ řešení diferenciální rovnice (3), pro které platí $|x(t_0)| > \bar{h}\, x'(t_0) = 0, x''(t_0) = 0$. Z důkazu věty 1 v [9] je vidět, že pro všechna $t \geqq t_0$ platí nerovnosti $|x'(t)| \leqq B$, $|x''(t)| \leqq A$. Dosadíme-li do V_1 za x_1, x_2, x_3 funkce $x(t)$, $x'(t)$, $x''(t)$, získáme funkci $V_1(t)$, pro jejíž derivaci platí

$$\frac{dV_1}{dt} = -\frac{1}{b} x'' h(x) - xh(x) + \frac{1}{b} h(x) \int_0^t Q(s) \, ds \geqq -xh(x) - \frac{H}{b} (A + Q_1).$$

Nyní doplníme tvrzení věty 5 ve speciálním případě rovnice (3).

Věta 9: V rovnici (3) *buď* $xh(x) > 0$ *pro* $x \neq 0$ *a* $Q(t) \not\equiv 0$ *periodická funkce. Potom všechna řešení rovnice* (3) *oscilují a neplatí* (55).

Důkaz: Srovnáme řešení rovnice (3) s řešením rovnice

$$y''' + ay'' + by' + cy = Q(t), \tag{74}$$

kde c je voleno tak, aby bylo $ab > c > 0$. Perioda $Q(t)$ buď w. Rovnice (74) má zřejmě periodické řešení s periodou w; označme je $y_p(t)$ a položme $Y_p = \sup y_p(t)$, $Y'_p = \sup y'_p(t)$, $Y''_p = \sup y''_p(t)$ na intervalu $\langle 0, w \rangle$. Dosaďme do (74) za y y_p a vzniklou identitu integrujeme od 0 do $t > 0$. Vychází

$$\left| \int_0^t y_p(s) \, ds \right| \leqq \frac{2}{c} (Q_1 + bY_p + aY'_p < Y''_p).$$

Z toho vyplývá, že $y_p(t)$ nabývá v intervalu $\langle 0, w \rangle$ ja kladných, tak záporných hodnot. Buď p největší kladná hodnota $y_p(t)$, n jeho nejmenší záporná hodnota a položme $\varepsilon = \text{Min}\,(p, -n)$. Buďtež r_1, r_2, r_3 kořeny charakteristické rovnice $r^3 + ar^2 + br + c = 0$ a $l = \operatorname*{Max}_{i=1,2,3} (\text{RE}(r_i))$; je ovšem $l < 0$. Definujme funkci

$$\psi(u) = \frac{e^{r_1 u}}{(r_1 - r_2)(r_1 - r_3)} + \frac{e^{r_2 u}}{(r_1 - r_2)(r_3 - r_2)} + \frac{e^{r_3 u}}{(r_1 - r_3)(r_2 - r_3)}$$

a konstantu

$$Q = \frac{1}{|r_2 - r_1| \, |r_3 - r_1|} + \frac{1}{|r_1 - r_2| \, |r_3 - r_2|} + \frac{1}{|r_1 - r_3| \, |r_2 - r_3|}.$$

Platí zřejmě nerovnost

$$|\psi(u)| \leqq Q \, \mathrm{e}^{lu} \qquad (u \geqq 0) \tag{75}$$

Všimněme si ještě funkce $h(x)$ z rovnice (3). Protože $h(0) = 0$, existuje $d_1 > 0$ tak, že pro $|x| \leqq d_1$ platí $|h(x)| \leqq \frac{-\varepsilon l}{3Q(c+1)}$. Položme ještě $d = \operatorname{Min}\left(d_1, \frac{-\varepsilon l}{3Q(c+1)}\right)$ a buď $x_1(t)$ některé z těch řešení rovnice (1), pro která platí (55). Existuje T tak, že pro $t \geqq T$ platí nerovnost

$$c\,|x_1(t)| + |h[x_1(t)]| \leqq cd + \frac{-\varepsilon l}{3Q(c+1)} \leqq \frac{-\varepsilon l}{3Q} \tag{76}$$

Podle (3) a (74) je

$$(x_1 - y_p)''' + a(x_1 - y_p)'' + b(x_1 - y_p)' + c(x_1 - y_p) = cx_1 - h(x_1)$$

identicky v $\langle T, +\infty)$. Z toho dostáváme pro $t \geqq T$

$$x_1 - y_p = Y(t) + \int_T^t \psi(t-s)\,[cx_1(s) - h(x_1(s))]\,\mathrm{d}s, \tag{77}$$

kde $Y(t)$ je vhodné partikulární řešení rovnice (74) bez pravé strany. Ježto ovšem $\lim\limits_{t\to+\infty} Y(t) = 0$, můžeme nalézt $t_1 \geqq T$ tak, že pro $t \geqq t_1$ platí nerovnost $|Y(t)| < \frac{\varepsilon}{3}$ a tedy také, podle (77), (76) a (75)

$$|x_1 - y_p| < \frac{\varepsilon}{3} + \int_T^t |\psi(t-s)|\,(c\,|x_1(s)| + |h[x_1(s)]|)\,\mathrm{d}s \leqq$$

$$\leqq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{-\varepsilon l}{3Q} Q \int_T^t \mathrm{e}^{l(t-s)}\,\mathrm{d}s < \frac{2\varepsilon}{3}. \tag{78}$$

Zřejmě platí $\limsup\limits_{t\to+\infty} y_p(t) \geqq \varepsilon$ a z toho užitím (78) plyne nerovnost $\limsup\limits_{t\to+\infty} x_1(t) = \limsup\limits_{t\to+\infty} (y_p + (x_1 - y_p)) > 0$, což je spor s (55). Věta je dokázána.

Věta 10: *V rovnici* (3) *buď* $xh(x) > 0$ *pro* $x > 0$, $\lim\limits_{|x|\to+\infty} |h(x)| = +\infty$, $h'(x) \leqq c < ab$ *pro* $|x| \geqq h$ *a* $Q(t) \not\equiv 0$ *periodická funkce, pro kterou platí* $\left|\int_0^t Q(s)\,\mathrm{d}s\right| \leqq Q_1$ *pro všechna* t. *Potom všechna řešení uvažované rovnice oscilují a neplatí* (55).

Důkaz: Z věty 6 v [9] plyne, že se dá provést stejně, jako důkaz věty **9.**

LITERATURA

[1] *Ezeilo, J. O. C.:* A note on a boundedness theorem for some third order differential equation. Journal of the London math. Society 31, 1961.
[2] *Ezeilo, J. O. C.:* A stability result for the solutions of certain third order differential equation. Journal of the London math. Society 37, 1962.
[3] *Ezeilo, J. O. C.:* On the boundedness of solutions of a certain differential equation of of the third order. Journal of the London math. Soc. (3) 9, 1959.
[4] *Opial, Z.:* Sur les solutions de l'équation différentielle $x'' + h(x)\,x' + f(x) = e(t)$. Ann. Polon. Math. VIII. 1960.
[5] *Kamke, E.:* Differentialgleichungen reeller Funktionen. Leipzig 1956.
[6] Contributions to nonlinear oscillations (M. L. Cartwright), Princeton 1960.
[7] *Ezeilo, J. O.C.:* On the existence of periodic solutions of a certain third order differential equation. Proc. of the Cambridge phil. Soc. (Math. — Phys. sc), 56, 1960.
[8] *La Salle—Lefschetz:* Stability by Ljapunov's direct Method. Academic Press, 1961.
[9] *Voráček, J.:* Einige Bemerkungen über eine nichtlineare Differentialgleichung dritter Ordnung. Tagungsbericht aus der III. Konferenz über nichtlineare Schwingungen, Nachrichten der DAW, Berlin 1965.

ZUSAMMENFASSUNG

ÜBER EINIGE NICHTLINEARE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN DRITTER ORDNUNG

JAN VORÁČEK

Die Arbeit beschäftigt sich mit den Differentialgleichungen (1), (2), (3). Insbesondere sind Sätze über die gleichmässig vollständige Beschränkheit aufgestellt. Für (1) werden u. A. folgenden Behauptungen bewiesen:

Satz 3: Die Funktionen f, h, Q seien stetig für alle Werte ihrer Argumente und $h(x)$ und $Q(t)$ noch beschränkt. Wenn noch eine positive Konstante Q_1 so existiert, dass (39) gilt und ausserdem für alle $y\ f(y) \geqq a_1 > 0$ ist, so kann man alle Lösungen von (1) bis nach $+\infty$ verlängern und es gibt eine Gleichungkonstante D_1 so, dass für jede Lösung (40) gilt.

Haben wir dagegen (46) unter sonst gleichen Voraussetzungen (R kann man mittels (47) abschätzen), so besitzt (1) Lösungen mit der Eigenschaft (48) *(Satz 4)*.

Die Eigenschaften von (2) werden mittels einer Ljapounoffschen Funktion (64) untersucht.

Satz 3 stellt eine Verallgemeinerung von [1] dar.