

Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum
Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica

Jaroslav Pospíšil

Experimentální metody modelů pro studium elektrostatických polí

Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica, Vol.
10 (1969), No. 1, 109--126

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/119903>

Terms of use:

© Palacký University Olomouc, Faculty of Science, 1969

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

*Katedra experimentální fyziky a metodiky fyziky přírodovědecké fakulty
Vedoucí katedry: Prof. dr. Josef Fuka*

EXPERIMENTÁLNÍ METODY MODELŮ PRO STUDIUM ELEKTROSTATICKÝCH POLÍ

JAROSLAV POSPÍŠIL

(Předloženo 22. 5. 1968)

1. Úvod

Praktická důležitost studia elektrostatických polí elektricky nabitých elementů a soustav (např. polí v elektronkách, polí elektronových čoček apod.) si vynutila vývoj vhodných měřicích metod.

V současné době existuje celá řada metod k proměřování elektrostatických polí, založených na různých principech a různě modifikovaných podle typů proměřovaných elektrostatických polí, které bývají rychlejší a jednodušší než metody výpočtové.

Mezi všemi metodami proměřování elektrostatických polí zaujímají důležité místo metody modelování těchto polí, a to pro svoji názornost, jednoduchost a rychlost. V metodách modelů je využito moderního pohledu na elektrostatické pole z hlediska analogie matematických vztahů pro studovaná pole a pro jejich modely, vytvořené buď jiným polem v jiném prostředí nebo jiným vhodným analogem.

V článku je proveden ucelený popis základních realizací metod modelování elektrostatických polí, je provedeno jejich teoretické zdůvodnění a zhodnocení. V další části článku je referováno o měření elektrostatických polí modelovou metodou elektrolytické vany. Výsledky měření jsou srovnány s výsledky získanými výpočty studovaných polí.

2. Charakteristika elektrostatických polí

Elektrostatické pole je speciálním případem elektromagnetického pole. Úvahy se budou vztahovat na izotropní prostředí, pro něž lze makroskopické elektromagnetické pole charakterizovat Maxwellovými rovnicemi v diferenciálním tvaru:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, & \operatorname{div} \mathbf{D} &= \rho, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

kde \mathbf{H} a \mathbf{E} jsou intenzity magnetického a elektrostatického pole, $\mathbf{B} = \mu_0\mu_r \mathbf{H}$ a $\mathbf{D} = \varepsilon_0\varepsilon_r \mathbf{E}$ označují magnetickou a elektrickou indukci, $\mu = \mu_0\mu_r$ je permeabilita prostředí a $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$ je permitivita prostředí, ρ je objemová hustota elektrických nábojů a \mathbf{j} je proudová hustota.

Pro elektrostatické pole jsou magnetické veličiny rovny nule a dále platí:

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad \mathbf{j} = 0, \quad (2)$$

takže rovnice, charakterizující elektrostatické pole, jsou:

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0 \quad (3)$$

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho. \quad (4)$$

Elektrostatické pole je pole nevírové a zřídlové. Je v každém bodu prostoru charakterizováno svou intenzitou \mathbf{E} nebo potenciálem V , mezi nimiž platí vztah:

$$\mathbf{E} = - \text{grad } V. \quad (5)$$

Rovnici (4) je možno napsat ve tvaru:

$$\text{div } \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0\varepsilon_r},$$

z něhož pomocí vztahu (5) plyne:

$$- \text{div grad } V = \frac{\rho}{\varepsilon_0\varepsilon_r}$$

neboli

$$\Delta V = - \frac{\rho}{\varepsilon_0\varepsilon_r}, \quad (6)$$

což je základní rovnice elektrostatického pole a nazývá se Poissonova rovnice. Pro $\rho = 0$ nabývá vztah (6) tvaru:

$$\Delta V = 0, \quad (7)$$

což je Laplaceova rovnice.

Lze tedy říci, že potenciál elektrostatického pole obecně vyhovuje Poissonově rovnici, ve zvláštním případě vyhovuje rovnici Laplaceově.

Známe-li některou z veličin \mathbf{E} , V v prostoru elektrostatického pole, pak toto pole je dokonale určeno. Stačí a je jednodušší určovat prostorové rozložení potenciálu V proměřovaných polí, neboť je to veličina skalární a její stanovení je úloha jednoznačná. Určíme-li rozložení potenciálu elektrostatického pole, lze z něho pomocí předcházejících vztahů ostatní veličiny určit.

3. Metody modelů elektrostatických polí

Metody modelů elektrostatických polí zahrnují experimentální metody, v kterých je využito napodobení proměřovaného elektrostatického pole buď jiným polem (modelem) v jiném prostředí, nebo pomocí jiného uspořádání a na vlastnosti

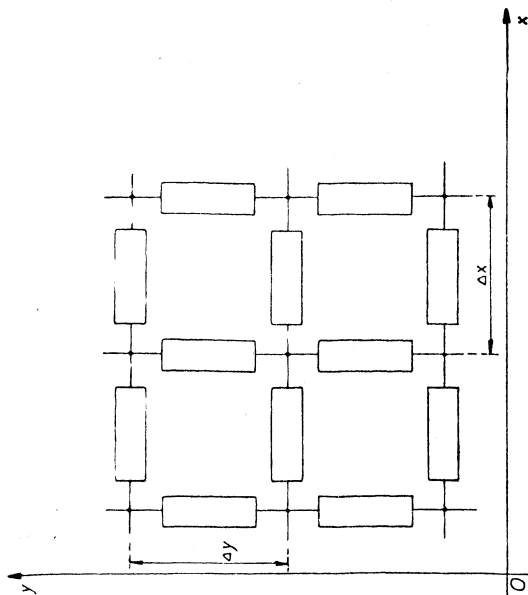
studovaného pole se usuzuje z výsledků získaných na jeho modelu. K hlavním metodám modelů patří metoda odporové sítě, metoda odporového papíru s kapacitní vazbou, metoda pružné membrány, metoda zviditelnění elektrostatických polí pomocí částic suspendovaných v kapalných izolantech, metoda elektrolytické vany a metoda kovového listu. O těchto metodách bude pojednáno dále.

Je třeba poznamenat, že obecné řešení elektrostatického pole je úloha prostorová. V praxi se však často stává, že potenciál pole v jistých mezích prakticky nezávisí na jedné ze souřadnic x , y , z . Lze proto elektrostatické pole studovat v jedné rovině, což bude také vzhledem k větší názornosti a srozumitelnosti popisovaných metod prováděno.

3.1. Metoda odporové sítě

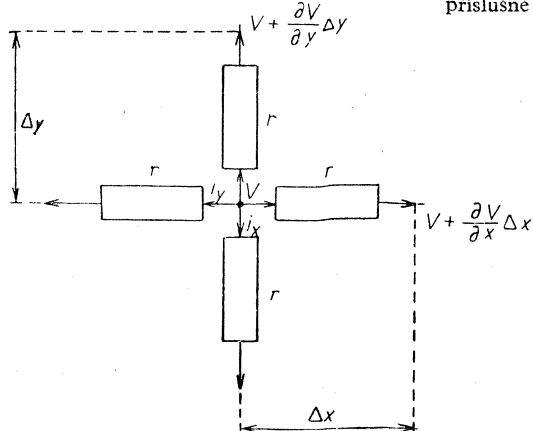
Metodou odporové sítě se přenáší řešení elektrostatického pole na vyšetřování proudového pole v odporové síti. Na místa, která odpovídají elektrodám originálu, je přivedeno napětí a měří se potenciálové rozdíly jednotlivých uzlů odporové sítě. Pomocí naměřených hodnot potenciálových rozdílů lze sestavit ekvipotenciální čáry (plochy) a tedy též siločáry proměřovaného elektrostatického pole.

Rozbor metody bude proveden pro rovinnou odporovou síť, přičemž bude uvažována čtvercová síť (obr. 1) (struktura sítě může však být trojúhelníková, čtvercová nebo šestiúhelníková). Jeden uzel vyšetřované sítě je na obr. 2.



Obr. 1 Část rovinné čtvercové odporové sítě

Obr. 2 Větev čtvercové odporové sítě
příslušné jednomu jejímu uzlu



Předpokládejme, že všechny odpory sítě jsou stejné. Je-li r odpor větve sítě, vztahený k jednotce její délky, pak pro odpory větvi, vždy mezi dvěma uzly sítě o stejných vzdálenostech $\Delta x = \Delta y$ ve směrech x a y (obr. 1), bude platit:

$$r\Delta x = r\Delta y. \quad (8)$$

Není-li v uzlu žádný proudový zdroj, pak z Kirchhoffova zákona o uzlech plyne:

$$\frac{\partial i_x}{\partial x} + \frac{\partial i_y}{\partial y} = 0, \quad (9)$$

kde i_x a i_y jsou proudy ve směrech x a y (obr. 2).

Je-li potenciál v libovolném uzlu V (obr. 2), pak potenciály v koncových bodech větví ve směrech x a y jsou:

$$V_x = V + \frac{\partial V}{\partial x} \Delta x \quad (10)$$

$$V_y = V + \frac{\partial V}{\partial y} \Delta y, \quad (11)$$

příčemž použitím Ohmova zákona pro uvažované větve lze změny potenciálů ve směrech x a y vyjádřit ve tvarech:

$$\frac{\partial V}{\partial x} \Delta x = -r \Delta x i_x \quad (12)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} \Delta y = -r \Delta y i_y. \quad (13)$$

Dosadíme-li vztahy (12) a (13) do (9), dostaneme po úpravě Laplaceovu rovnici (7) ve tvaru:

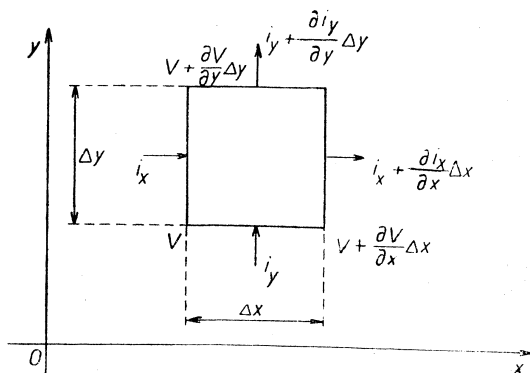
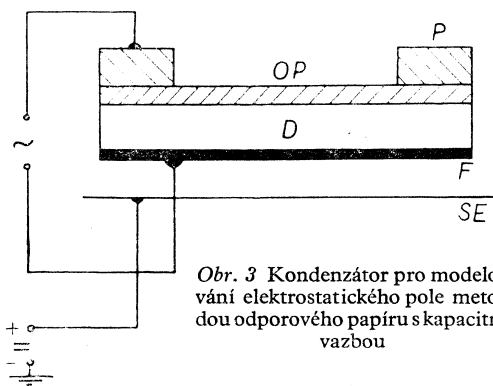
$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0. \quad (14)$$

Ze vztahu (14) vyplývá, že pro rovinnou odporovou síť, bez proudových zdrojů v uvažované oblasti, platí Laplaceova rovnice, která též charakterizuje elektrostatické pole v oblastech bez elektrických nábojů, jak bylo ukázáno v části 2. tohoto článku. Lze tedy řešit elektrostatická pole v oblastech bez elektrických nábojů pomocí modelu vytvořeného odporovou sítí. Je možno též ukázat, že elektrostatická pole v oblasti s elektrickými náboji lze též řešit odporovou sítí, ale s proudovým zdrojem, přičemž v uzlech této sítě jsou proudy funkcí proměnných x a y . Analýza takové sítě vede k Poissonově rovnici (6).

Model se napájí stejnosměrným proudem. Při použití impedancí v jeho větvích je třeba použít střídavého proudu.

3.2. Metoda odporového papíru s kapacitní vazbou

Zařízením k vytváření modelu elektrostatického pole je v tomto případě kondenzátor, jehož stavba je patrná z obr. 3. Jednu elektrodu tvoří papírová odporová vrstva (odporový papír) OP a druhou elektrodou je kovová fólie F . Elektrody jsou odděleny dielektrikem D . K obvodu odporového papíru OP je připevněn vodivý prstenec P , který je přizpůsoben okrajovým podmínkám řešeného problému, SE je stínicí elektroda se stejnosměrným potenciálem; ostatní elektrody jsou napájeny střídavým napětím.



Obr. 4
Element v rovině odporového papíru

Rozdělení napětí v odporovém papíru *OP* kondenzátoru na obr. 3 splňuje Poissonovu rovnici (6), jak plyne z následujících úvah.

Předpokládejme, že úbytek napětí v odporovém papíru je zanedbatelný oproti napájecímu napětí. Potom lze též předpokládat, že plošná hustota σ posuvného proudu, vstupujícího do odporového papíru, je nepřímo úměrná tloušťce dielektrika.

Uvažujme plošný element v rovině odporového papíru o stranách Δx a Δy (obr. 4). Pak proud, vytékající z povrchu elementu $\Delta x \Delta y$, je

$$\sigma \Delta x \Delta y = \frac{\partial i_x}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial i_y}{\partial y} \Delta y, \quad (15)$$

jak plyne z obr. 4.

Je-li r plošný odpor elementu odporového papíru o velikosti $\Delta x \Delta y$, pak lze vyjádřit úbytky napětí ve směrech x a y takto:

$$-\Delta V_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \Delta x = r i_x \frac{\Delta x}{\Delta y} \quad (16)$$

$$-\Delta V_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \Delta y = r i_y \frac{\Delta y}{\Delta x}. \quad (17)$$

Vyjádřeme si ve vztazích (16) a (17) explicitně proudy i_x a i_y a provedme parciální derivace podle x a y . Dostaneme:

$$\frac{\partial i_x}{\partial x} = -\frac{\Delta y}{r} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \quad (18)$$

$$\frac{\partial i_y}{\partial y} = -\frac{\Delta x}{r} \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}. \quad (19)$$

Dosaďme nyní rovnice (18) a (19) do (15). Po úpravě obdržíme výsledný vztah ve tvaru:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -r\sigma, \quad (20)$$

který lze chápat jako Poissonovu rovnici. Tím bylo ukázáno, že rozdělení napětí v odporovém papíru *OP* může být modelem elektrostatického pole.

Hlavní význam mají modely s konstantní hustotou posuvného proudu, u nichž má dielektrikum konstantní tloušťku, jejíž velikost řídí velikost celkového posuvného proudu. Odpor papíru se volí malý ve srovnání s impedancí celého kondenzátoru, čímž se dosáhne splnění podmínky malých napěťových úbytků v odporovém papíru oproti střídavému napětí přiloženému k elektrodám. Tvar a velikost vazební elektrody F odpovídají rozložení náboje studovaného elektrostatického pole. Stínící elektroda SE slouží k omezení rozptylového toku.

Nejdůležitější částí kondenzátoru je dielektrikum, které musí být homogenní a všude stejné touštky a dielektrické konstanty (vhodné je sklo). Odporový papír, nalepený na dielektrikum vodivým lakem, nesmí být hygroskopický a musí být homogenní. Vodivý prstenec bývá k odporovému papíru připevněn stříbrnou pastou. Spodní vodivou elektrodu F nejčastěji tvoří hliníková fólie, která se nalepuje vodivým lakem na dielektrikum. Stínící elektroda SE je izolována od spodní elektrody F . Přívodní vodiče se připevní k folii stříbrnou pastou.

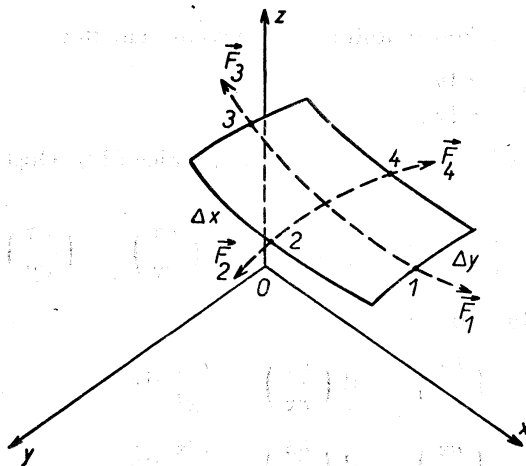
K napájení modelu se používá střídavého napětí o kmitočtu 1 kc/c. K měření potenciálových úbytků, které vznikají v odporovém papíru, je třeba použít přesných přístrojů. Měření se provádí můstkovou metodou a jako nulového indikátoru se používá sluchátek zapojených přes vhodný zesilovač. Jako sondy je nevhodnější použít ostré vodivé jehly, která se při měření zapíchává do odporového papíru v proměřovaných místech. Důležité při měření je, aby všechny části obvodů měly konstantní hodnoty svých charakteristických veličin.

Metoda je zvláště vhodná pro řešení rovinných elektrostatických polí a má význam pro četné aplikace.

3.3. Metoda pružné membrány

Metoda pružné membrány slouží k plastickému znázorňování rozložení potenciálu rovinných elektrostatických polí. Stejněměrně napnutá pružná membrána se na místech, odpovídajících elektrodám zařízení produkujícího studované elektrostatické pole, kolmo vychýlí tak, aby výchylka byla úměrná potenciálu příslušné elektrody. Tím se z membrány vytvoří prostorový útvar, který plasticky znázorňuje rozložení potenciálu ve studovaném elektrostatickém poli. Vrstevnice modelu odpovídají čarám stejného potenciálu elektrostatického pole a maximální spád v každém místě odpovídá intenzitě tohoto pole.

Uvedené závěry vyplývají z rovnice pro deformaci pružné membrány. Tuto rovnici lze odvodit z rovnovážných podmínek. K tomuto účelu studujeme nejdříve pravoúhlý element napnuté pružné membrány (obr. 5).



Obr. 5 Element napjaté pružné membrány

Účinek membrány na element si vyjádříme tečnými silami F_1, F_2, F_3, F_4 , které působí kolmo k zakřiveným okrajům elementu. Protože element je v rovnováze, je vektorový součet těchto sil nulový, tj. platí:

$$F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = 0. \quad (21)$$

Je-li odchylka membrány od směru roviny x, y malá, lze předpokládat, že vodorovné složky sil jsou přibližně rovné jednotlivým silám. Pro svislé složky sil z podmínky rovnováhy plyne:

$$F_{1z} + F_{2z} + F_{3z} + F_{4z} = 0, \quad (22)$$

příčemž

$$\begin{aligned} F_{1z} &= F_1 \sin \alpha_1 \doteq F_1 \operatorname{tg} \alpha_1 \\ F_{2z} &= F_2 \sin \alpha_2 \doteq F_2 \operatorname{tg} \alpha_2 \\ F_{3z} &= F_3 \sin \alpha_3 \doteq F_3 \operatorname{tg} \alpha_3 \\ F_{4z} &= F_4 \sin \alpha_4 \doteq F_4 \operatorname{tg} \alpha_4, \end{aligned} \quad (23)$$

kde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ a α_4 jsou úhly sklonu sil F_1, F_2, F_3 a F_4 k vodorovné rovině x, y .

V místech 1, 2, 3, 4 elementu na obr. 5 pro úhly $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ platí:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_1 &= \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_{z_1} \\ \operatorname{tg} \alpha_2 &= \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_{z_2} \\ \operatorname{tg} \alpha_3 &= - \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_{z_3} \\ \operatorname{tg} \alpha_4 &= - \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_{z_4}. \end{aligned} \quad (24)$$

Pro membránu s konstantním povrchovým napětím $\tau = \text{konst.}$ lze psát:

$$\begin{aligned} F_1 &= F_3 = \tau \Delta y \\ F_2 &= F_4 = \tau \Delta x. \end{aligned} \quad (25)$$

Dosaďme nyní vztahy (23), (24), (25) do rovnice (22). Dostaneme následující vztah:

$$\tau \Delta y \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_{z_1} - \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_{z_3} \right] + \tau \Delta x \left[\left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_{z_2} - \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_{z_4} \right] = 0. \quad (26)$$

Pro $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$ lze psát:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_{z_1} - \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_{z_3} &= d \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx \\ \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_{z_2} - \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_{z_4} &= d \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy, \end{aligned}$$

takže rovnice (26) se změní na tvar:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \quad (27)$$

což je Laplaceova rovnice.

Je tedy patrné, že pro malé výchylky membrány (prakticky takové, pro něž spád membrány, tj. tangenta úhlu sklonu membrány v daném místě, je menší než jedna) platí analogie mezi výchylkami membrány a velikostmi potenciálů rovinného elektrostatického pole.

Vhodným materiálem pro membránu je guma, tloušťky asi 1 mm, větších lineárních rozměrů (doporučují se lineární rozměry větší než 1 m). Před měřením je třeba membránu stejnoměrně napnout v kovovém rámu tak, aby byla vodorovná. Na membránu se přiloží elementy, jejichž obrysy odpovídají elektrodám studovaného elektrostatického pole. Těmito elementy se vychýlí pružná membrána nahoru, resp. dolů podle polarity elektrod, úměrně k velikosti jejich potenciálů.

Proměrování modelu pole se provádí tak, že se délkovým měřidlem zjišťují vrstevnice deformované membrány.

Metoda je vhodná zvláště při řešení problémů elektronové optiky a konstrukce elektronek, neboť pohyb elektronů v elektrostatickém poli je možno sledovat fotografováním drah malých kuliček pohybujících se po napjaté membráně. Metody lze použít jen pro malé deformace membrány a nelze jí zkoumat trojrozměrná elektrostatická pole.

3.4. Metoda zviditelnění elektrostatických polí pomocí částic suspendovaných v kapalných izolantech

Při této metodě se v kapalném izolantu rozptýlí malé částice z dielektrického materiálu tak, aby se v něm vznášely. Tyto suspendované částice musí mít vůči kapalnému izolantu relativně velkou dielektrickou konstantu, neboť pro její větší hodnoty se částice lehčeji postaví do směru siločar elektrostatického pole i v těch oblastech, kde je jeho intenzita malá. Hustota kapalného izolantu musí být taková, aby se v něm suspendované částice vznášely. Izolant musí mít značnou elektrickou pevnost, malou viskozitu a musí být bezbarvý. Splněním uvedených podmínek se dosáhne zviditelnění studovaného elektrostatického pole.

Někdy se užívá dvou kapalných izolantů, které se vzájemně nerozpouštějí. Dielektrické konstanty obou izolantů jsou malé a pokud možno rozdílné. Hustoty obou kapalin musí být takové, aby suspendované částice ve spodní těžší kapalině stoupaly, v horní, lehčí kapalině, klesaly ke dnu. Tak se částice nahromadí na rozhraní obou kapalných izolantů. Změnou množství užitých kapalin lze získat znázornění studovaného elektrostatického pole v žádané rovině.

3.5. Metoda elektrolytické vany

Všimněme si základních vlastností stacionárního proudového pole v rovnoměrně vodivém prostředí.

Pro stacionární proudové pole platí Ohmův zákon, jehož diferenciální tvar je

$$\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}, \quad (28)$$

kde \mathbf{E} je intenzita elektrického pole, \mathbf{j} je hustota proudu a γ je měrná vodivost prostředí.

Složky intenzity \mathbf{E} v dvojrozměrném prostoru lze v souladu se vztahem (5) napsat ve tvarech:

$$\begin{aligned} E_x &= - \frac{\partial V}{\partial x} \\ E_y &= - \frac{\partial V}{\partial y}. \end{aligned} \quad (29)$$

Z teorie elektromagnetického pole plyne, že v rovnoměrně vodivém prostředí má rovnice kontinuity, charakterizující toto prostředí, tvar:

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad (30)$$

kteřou lze pomocí vztahu (28) upravit na tvar:

$$\gamma \operatorname{div} \mathbf{E} = 0. \quad (31)$$

Pro vodivé prostředí je $\gamma \neq 0$, takže z rovnice (31) plyne rovnost

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0. \quad (32)$$

Dosadíme-li nyní vztahy (29) do rovnice (32), obdržíme rovnici:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0, \quad (33)$$

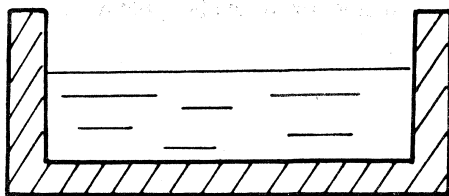
což je Laplaceova rovnice (7). Lze tedy vyslovit závěr, že pro stacionární proudové pole v rovnoměrně vodivém prostředí platí stejné zákonitosti jako pro pole elektrostatické. Je tedy možno vyšetřování prostorového průběhu potenciálu v elektrostatickém poli, v oblastech bez elektrických nábojů, nahradit vyšetřováním pole stacionárního proudu v rovnoměrně vodivém prostředí. Tento závěr je základem metody elektrolytické vany, u které je rovnoměrně vodivé prostředí tvořeno elektrolytem.

Metodou elektrolytické vany lze vyšetřovat jak rovinná, tak prostorová elektrostatická pole hlavně ta, která mají středovou symetrii. Použitím metody elektrolytické vany se zjišťuje rozložení potenciálu studovaného elektrostatického pole.

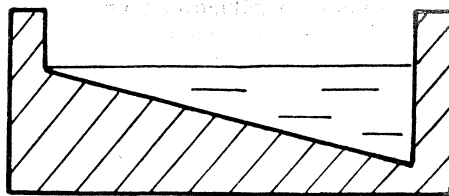
Elektrolytická vana je nádoba z izolačního materiálu (sklo, plexisklo apod.), v níž je elektrolyt. Pro některá měření se užívá van mělkých, pro jiná měření jsou vhodnější vany hluboké. Pro studium prostorových polí se středovou symetrii stačí vyšetřovat pouze výseč studovaného pole, omezenou dvěma rovinami symetrie procházejícími osou uspořádání pole.

Do vany s elektrolytem se ponoří elektrody stejného tvaru jaký mají elektrody studovaného zařízení, v němž se vytváří elektrostatické pole.

Nejčastěji se používá van stálé hloubky, tj. s rovným dnem (obr. 6), nebo van se šikmým dnem (obr. 7) (v případě polí se středovou symetrii). Do vany se šikmým dnem stačí ponořit jen polovinu symetrického řezu modelu studovaného pole s osou symetrie totožnou s průsečnicí hladiny elektrolytu a šikmého dna.



Obr. 6 Elektrolytická vana s rovným dnem



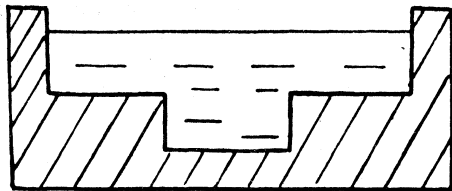
Obr. 7 Elektrolytická vana se šikmým dnem

Při modelování elektrostatických polí je nutné dbát toho, aby výsledky měření nebyly ovlivněny polarizací elektrod. Tento požadavek se splňuje volbou vhodné kombinace elektrod a elektrolytu (např. elektrody z Cu a elektrolyt KCL).

Pro odstranění přechodových odporů mezi elektrolytem a elektrodami je nutné povrch elektrod dokonale vyčistit a použít velmi slabého elektrolytu. Stačí i normální voda. Rovněž je třeba elektrody napájet střídavým napětím (nejvhodnější frekvence je 50 c/s až 1 kc/s).

Aby vlivy stěn vany na výsledky měření byly malé, je třeba aby její velikost byla vzhledem k velikosti modelu velká. Model však nelze libovolně zmenšovat, neboť by se současně zmenšovala přesnost měření. Je však často možné rozdělit vyšetřované pole rovinami symetrie na stejné prostorové díly a vyšetřovat pole těchto dílů. Přitom se stěny elektrolytické vany vhodně ztotožní s uvedenými rovinami symetrie. Rovina symetrie proudových čar musí splýnout s povrchem izolační stěny vany, takže do ní žádné proudové čary neústí.

Metodou elektrolytické vany lze vyšetřovat elektrostatická pole i v dielektriku, které se skládá ze dvou nebo více izolantů o různých dielektrických konstantách. Modelování se provádí s několika elektrolyty nebo s jedním elektrolytem, při použití vany s vhodně stupňovitým dnem podle druhu modelovaného pole. Přitom větší hloubka vany odpovídá větší dielektrické konstantě dielektrika. Příklad elektrolytické vany se stupňovitým dnem je na obr. 8.



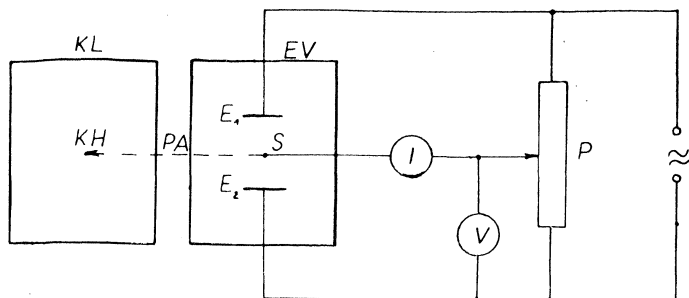
Obr. 8 Elektrolytická vana se stupňovitým dnem

Sonda k proměřování potenciálů v různých místech pole musí být malá (nejvhodnější je tenký drát buď z téhož kovu jako elektrody nebo ze vzácného kovu). Vhodné též je, aby sonda až na špičku byla zatavena v tenké skleněné kapiláře.

Na jednotlivé elektrody se přikládají střídavá napětí, aby se omezila polarizace. Poměry napětí na elektrodách musí souhlasit s poměry napětí na originálu.

Sonda může být připevněna k pantografu, takže při vyšetřování elektrostatického pole se jeho obraz (tj. místa stejných potenciálů) současně přenáší na papír. Je-li vana průhledná, je možné ji podložit milimetrovým papírem se stupnicemi souřadnic ve vzájemně kolmých směrech a přímo při měření odečítat souřadnice proměřovaných míst elektrostatického pole. Na jiném archu milimetrového papíru lze proměřovaná místa zakreslovat s uvedením velikostí potenciálů. Příslušné ekvipotenciální čary lze pak snadno nakreslit. Tento způsob je jednoduchý, avšak poměrně zdlouhavý. Lze však užít i jiného způsobu zakreslování elektrostatických polí. V držáku sondy se zamontuje malá lampa, která vysílá svisle vzhůru úzký svazek světelných paprsků na skleněnou desku pokrytou průsvitným papírem. Deska musí být umístěna vhodně nad vanou. Na papíru je pak možno vyznačovat body, ve kterých jsou potenciály proměřovány. Pro rychlá proměřování se užívá i automatického zapisování ekvipotenciálních čar.

Při měření je třeba přesně zjišťovat polohy proměřovaných míst a provádět jejich přesné zakreslování. Pro přesné určování potenciálů v jednotlivých místech modelu je nejvhodnější můstková metoda, např. v zapojení podle obr. 9,



Obr. 9 Měřicí uspořádání při použití můstkové metody a pantografu pro proměřování elektrostatického pole dvou rovnoběžných vodivých desek metodou elektrolytické vany

kde je znázorněno uspořádání pro proměřování elektrostatického pole mezi dvěma rovinnými elektrodami E_1, E_2 . EV je elektrolytická vana, S je proměřovací sonda, KL je kreslicí list, na kterém jsou pomocí pantografu PA kreslicím hrotem KH zakreslovány polohy proměřovaných míst pole v elektrolytické vaně. Můstkové zapojení obsahuje potenciometr P k regulování velikosti střídavého napětí, I je nulový indikátor a V je voltmetr k měření přiváděného střídavého napětí.

Metoda elektrolytické vany je názorná, jednoduchá a patří k nejpřesnějším metodám modelování elektrostatických polí.

3.6. Metoda kovového listu

Metoda kovového listu je založena na stejném principu jako metoda elektrolytické vany, tj. na formální analogii rovnic stacionárního proudového pole a rovnic elektrostatického pole (vztahy 28 až 33). Metody se užívá pro řešení rovinných elektrostatických polí; lze ji též užít i pro řešení rovinných magnetických polí.

Názorná analogie mezi elektrostatickým polem a polem stacionárního proudu v rovnoměrně vodivém prostředí je patrná z následujících úvah. Vyjděme ze vztahu (32), který platí pro pole stacionárního proudu, a porovnejme jej se vztahem pro elektrostatické pole odvozeným následujícími úvahami.

Z rovnice (4) vyplývá, že elektrická indukce \mathbf{D} elektrostatického pole v dielektriku, kde prostorová hustota elektrických nábojů $\rho = 0$, je dána vztahem:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0$$

neboli

$$\varepsilon_0 \varepsilon_r \operatorname{div} \mathbf{E} = 0,$$

čili

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0.$$

Dostali jsme tedy rovnici totožnou se vztahem (32). Takže pro elektrostatické pole a pole stacionárního proudu platí stejný vztah (32). Je možno též napsat

následující analogické vztahy pro pole elektrostatičké a jemu odpovídající pole stacionárního proudu, které mají význam pro metodu kovového listu:

elektrostatičké pole:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} \\ \operatorname{div} \mathbf{D} &= 0 \end{aligned}$$

pole stacionárního proudu:

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= \gamma \mathbf{E} \\ \operatorname{div} \mathbf{j} &= 0. \end{aligned} \quad (34)$$

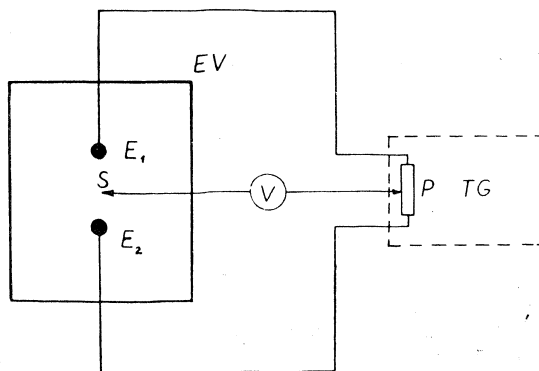
Z předcházejících vztahů (34) vyplývá, že veličině \mathbf{D} lze přiřadit veličinu \mathbf{j} , dielektrické konstantě $\varepsilon_0 \varepsilon_r$, vodivost γ . Sestrojíme-li tedy model elektrostatičkého pole tak, aby dielektrické konstantě $\varepsilon_0 \varepsilon_r$ odpovídala v příslušném poměru vodivost γ , dostaneme proměřením proudového pole topografii pole elektrostatičkého.

K modelování elektrostatičkého pole se používá tenkých kovových plechů, jejichž vodivosti jsou v poměru dielektrických konstant $\varepsilon_0 \varepsilon_r$ uvažovaných dielektrik. Z těchto plechů se vyříznou tvary geometricky podobné uspořádání, v němž je studované elektrostatičké pole rozloženo. V místech rozhraní se plechy sletují. Pro malé rozdíly v dielektrických konstantách stačí pouze zvolit tloušťky plechů v poměru dielektrických konstant. Na okraje takto zhotoveného vodivého listu z plechů přivádíme pak takové proudy, aby se napodobily okrajové podmínky originálu a aby celkový proud listu byl několik desítek ampér.

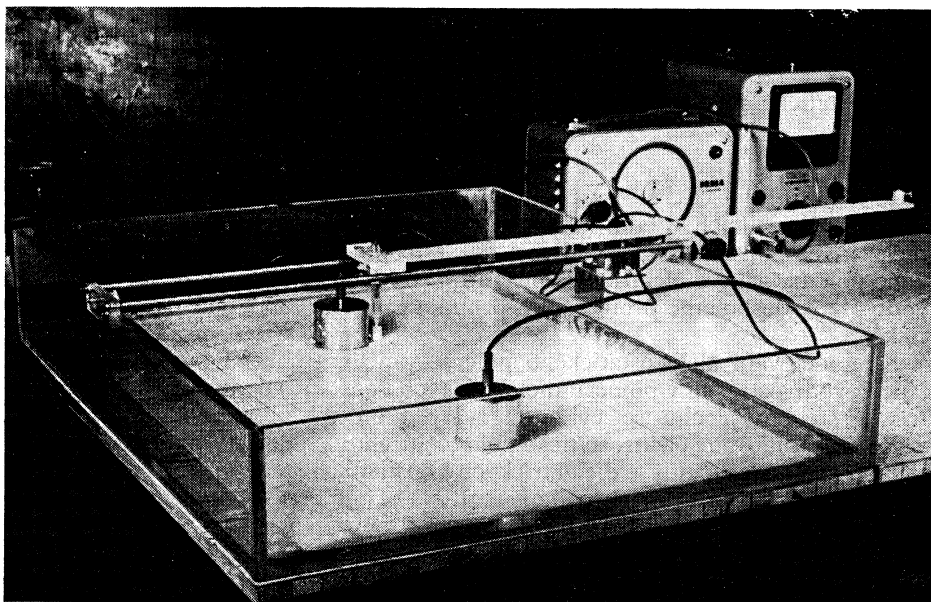
Proměřování pole se provádí jemným hrotem z ocele nebo z fosforového bronzu, který je přes galvanometr připojen k jednomu bodu listu. Vyšetřování se provádí bod po bodu. Body stejných výchylek galvanometru se spojí křivkami, které mají význam ekvipotenciálních čar. Tím dostaneme dostatečnou informaci o průběhu potenciálu vyšetřovaného elektrostatičkého pole.

4. Měření elektrostatičkých polí

Byla proměřována různá elektrostatičká pole pomocí metody elektrolytické vany. K měření bylo použito realizované elektrolytické vany z plexiskla (rozměry $75 \times 60 \times 10 \text{ cm}^3$) s rovným dnem a zapojení bylo provedeno podle G. P. Harnwella, jež je pro pole dvou bodových nábojů znázorněno na obr. 10. Fotografie měřicího uspořádání je na obr. 11. E_1, E_2 jsou elektrody, S je sonda, tvořená stříbrným hrotem o průměru 0,5 mm, zatavená v tenké skleněné trubičce a vodivě spojená stíněným vodičem přes voltmetr V k jezdcí potenciometru P napájecího tónového generátoru TG .



Obr. 10 Použité experimentální uspořádání při proměřování elektrostatičkého pole dvou bodových nábojů metodou elektrolytické vany



Obr. 11 Fotografie měřícího uspořádání podle obr. 10

Elektrolytem v elektrolytické vaně *EV* byl 0,1 % roztok chloridu sodného (výška hladiny 1 cm). Elektrody byly vyrobeny z hliníku.

Sonda byla upevněna v držáku, který byl nad elektrolytem křížově posuvný. K odčítání souřadnic proměřovaných míst sloužily stupnice pravoúhlých souřadnic pod elektrolytickou vanou. Polohy proměřovaných míst a velikosti příslušných potenciálů byly zaznamenávány na milimetrovém papíru.

Elektrody byly napájeny střídavým napětím o frekvenci 1 kc/s z tónového generátoru *TG*.

Při měření bylo dbáno toho, aby elektrolytická vana byla ve vodorovné poloze, při níž elektrolyt měl ve všech místech vany stejnou výšku. Při použití dvou stejných elektrod se umístí hrot sondy do středu jejich vzdálenosti a na potenciometru *P* se nastaví jezdec na střed, takže sonda *S* má takový potenciál, že mezi ní a kteroukoliv z obou elektrod je stejný rozdíl potenciálů. Je-li vrstva elektrolytu všude stejná, pak je ve středu vzdálenosti elektrod právě takový potenciál jako na sondě (nebo na jezdcí potenciometru) a proto na indikátoru *V* dostáváme nulovou výchylku. Není-li tomu tak, není elektrolytická vana ve vodorovné poloze.

Vzhledem k tomu, že elektrolytická vana má konečné rozměry, její stěny z izolačního materiálu působí jako zrcadlo. Elektrolytická vana se chová tak, jako kdyby model byl obklopen nekonečně mnoha stejnými modely. Aby byl tento jev zmírněn, byly voleny rozměry použitých elektrod a modelů malé vzhledem k rozměrům celé vany. K zmírnění přechodových odporů elektrod byly elektrody před každým měřením vyčištěny. Proto bylo též použito slabého elektrolytu.

Střídavého napájení elektrod bylo použito proto, aby byla odstraněna polarizace elektrod. Frekvence napětí nebyla volena příliš vysoká (1 kc/s), aby nedocházelo k fázovým posunům proudů v modelu. Pro vyšší frekvence by bylo třeba fázové posuny vyloučit použitím vhodných kompenzačních elementů (např. kondenzátorů), kterými se modelový systém před měřením vyváží.

Dále jsou uvedeny grafické výsledky měření elektrostatického pole dvou bodových nábojů a elektrostatického pole mezi dvěma rovnoběžnými vodivými deskami. Grafická znázornění výsledků jsou provedena pomocí ekvipotenciálních čar (vrstevnicové znázornění), z kterých lze snadno sestrojít průběhy intenzit studovaných polí a vykreslit jejich profilové znázornění.

Výsledky měření jsou srovnány s výsledky získanými početně metodou bodové sítě v šestinasobném přiblížení, pro stejné případy studovaných polí (v grafech jsou výsledky pro nejdůležitější oblasti polí vyjádřeny křížky). Princip metody bodové sítě, které bylo při výpočtech použito, je uveden např. v knize *J. Stránský: Vysokofrekvenční elektrotechnika I, SNTL Praha, 1956, str. 86—88.*

Vzhledem k tomu, že proměřovaná elektrostatická pole mají dvě osy symetrie ekvipotenciálních čar, bylo dostačující proměřovat a počítat jen čtvrtiny polí a ze získaných výsledků lze pak grafické znázornění studovaných polí snadno provést.

4.1. Elektrostatické pole dvou bodových nábojů

Bodové náboje byly realizovány přibližně, a to dvěma stejnými válečky o průměru 6 cm a výšce 5 cm. Středů elektrod byly od sebe vzdáleny 45 cm. Napětí mezi elektrodami bylo 2 V. Graficky znázorněné výsledky měření ve formě plných ekvipotenciálních čar a křížkem označené výsledky výpočtů jsou pro nejdůležitější oblasti pole uvedeny na obr. 12.

4.2. Elektrostatické pole dvou rovnoběžných desek

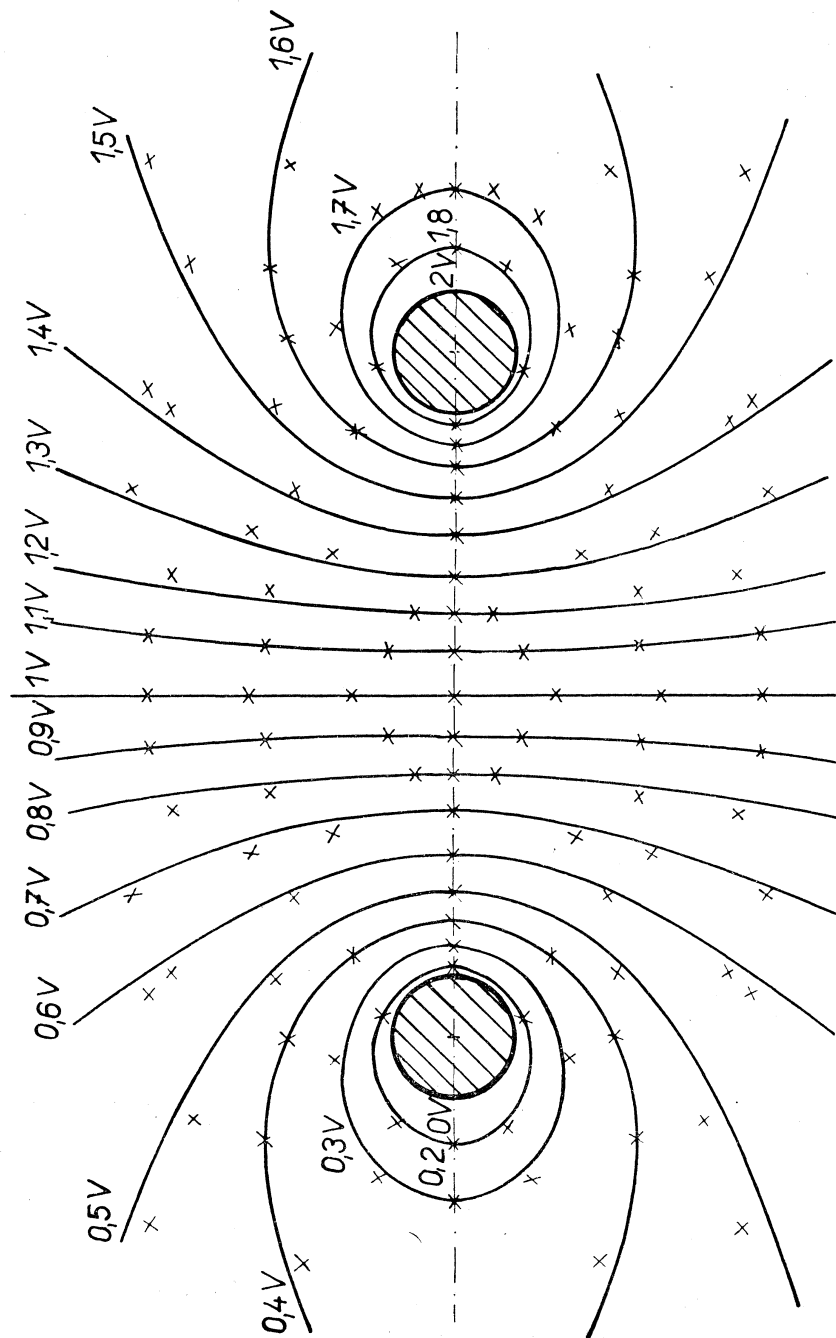
Bylo použito dvou stejných rovnoběžných desek o rozměrech $22 \times 5 \times 1$ cm³, umístěných rovnoběžně ve vzdálenosti 10 cm od sebe. Střídavé napětí, přiváděné mezi obě desky, bylo 1 V. Grafická znázornění měření a výpočtem získaných výsledků jsou na obr. 13.

5. Závěr

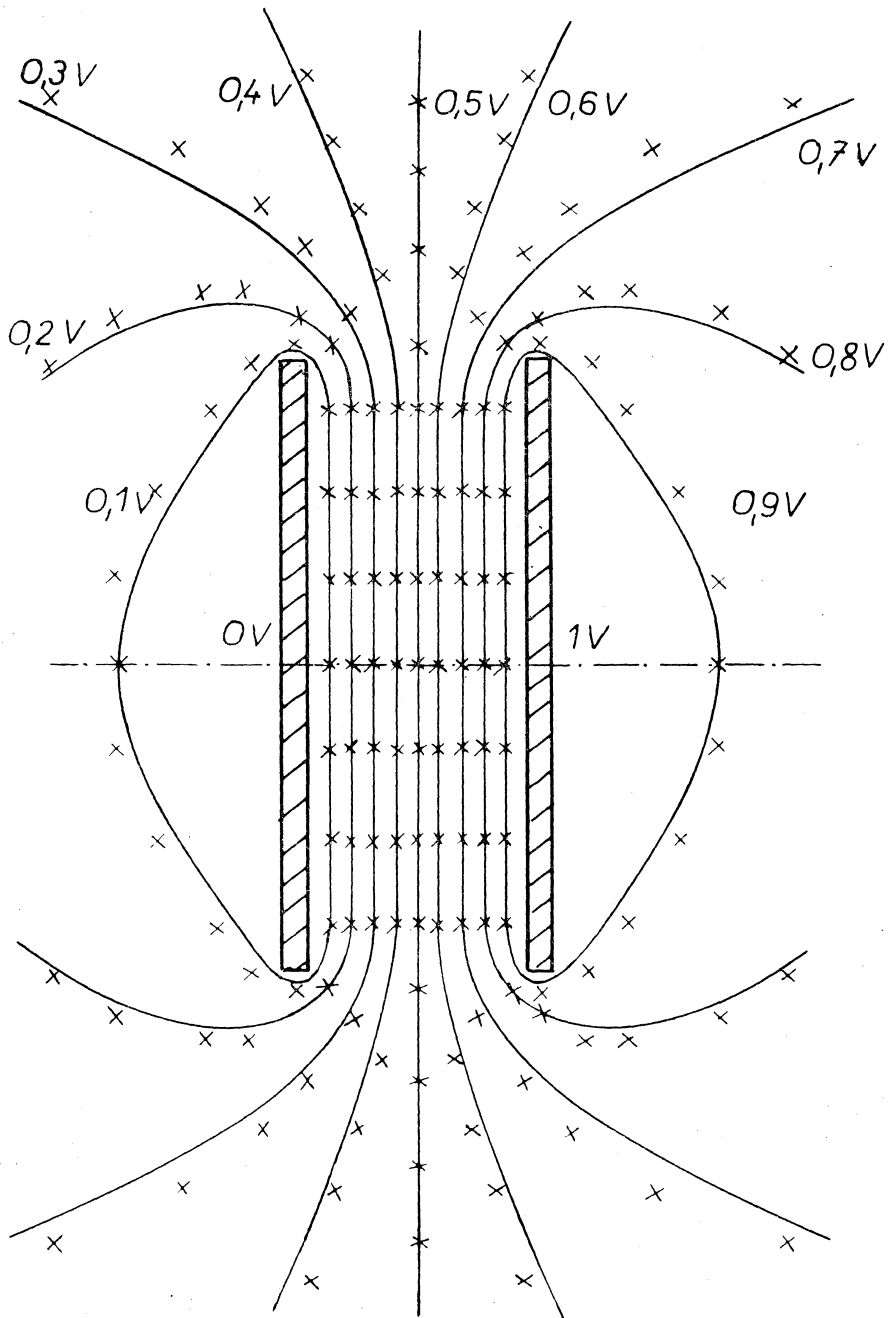
Lze říci, že metoda elektrolytické vany je svou přesností dostačující k laboratornímu proměřování elektrostatických polí. Popisovaná realizace metody elektrolytické vany dává výsledky, které jsou v dobré shodě s početními výsledky. Hlavními zdroji chyb při měření byla konečnost rozměrů elektrolytické vany vzhledem k použitým rozměrům elektrod.

Popsané zařízení je svou názorností a jednoduchostí vhodné pro laboratorní měření ve fyzikálním praktiku na vysokých školách.

Závěrem lze říci, že kromě popisovaných metod existuje řada jiných metod k proměřování elektrostatických polí založených na jiných principech. Popisované metody modelů jsou však názorné a mnohdy jednodušší než ostatní metody.



Obr. 12 Graficky znázorněné výsledky studia elektrostatického pole dvou bodových nábojů. Plné čáry znázorňují ekvipotenciální čáry zjištěné realizovanou metodou elektrolytické vany. Křížky jsou vyznačeny vypočtené polohy míst stejných potenciálů metodou bodové sítě, pro stejné uspořádání elektrod



Obr. 13 Graficky znázorněné výsledky zkoumání elektrostatického pole dvou rovnoběžných vodivých desek. Význam grafických znázornění je stejný jako na obr. 12

LITERATURA

- [1] *Stratton, J. A.*: Theorie elektromagnetického pole, SNTL, Praha (1961).
- [2] *Fuka, J., Havelka, B.*: Elekřina a magnetismus, SPN, Praha (1965), 39–74.
- [3] *Nejman, L. R., Kalantarov, P. L.*: Teoretické základy elektrotechniky III, VSAV, Bratislava (1958), 32–73.
- [4] *Stránský, J.*: Vysokofrekvenční elektrotechnika I, SNTL, Praha (1956), 78–95.
- [5] *Petržilka, V., Sařrata, St.*: Elekřina a magnetismus, NČSAV, Praha (1956), 122–184.
- [6] *Heller, B., Veverka, A.*: Elekřická pevnost, NČSAV, Praha (1957), 96–118.
- [7] *Harnwell, G. P.*: Principles of Electricity and Electromagnetism, Mc Graw-Hill Book Company, New York (1949), 29–43.

ABSTRACT

THE EXPERIMENTAL MODELS METHODS FOR STUDY OF ELECTROSTATIC FIELDS

JAROSLAV POSPÍŠIL

This article describes the methods for experimental study of electrostatic fields by means of models. The fundamental equations for described methods are derived and some results by means of electrolytic bath tube are shown. The results obtained experimentally are compared with results obtained by mathematical spot network method for the same conditions. The sufficient agreement of both methods is shown.

РЕЗЮМЕ

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ МОДЕЛЕЙ ИЗУЧЕНИЯ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

ЯРОСЛАВ ПОСПИШИЛ

В статье описаны методы экспериментального изучения электростатических полей при помощи моделей, выведены формулы данных методов и показаны результаты измерений методом электролитической ванны.

Результаты экспериментальных исследований сравниваются с результатами математического метода сети точек.