1971 ACTA UNIVERSITATIS PALACKIANAE OLOMUCENSIS
FACULTAS RERUM NATURALIUM TOM 37

Katedra algebry a geometrie přírodovědecké fakulty
Vedoucí katedry: Doc. RNDr. Josef Šimek

ÜBER BEZIEHUNGEN DER DARSTELLENDEN GEOMETRIE UND NOMOGRAPHIE ZU EINANDER

FRANTIŠEK HAVELKA

(Eingelangt am 31. 5. 1971)

Die Anfänge der heute weitverzweigten wissenschaftlichen Disziplinen der darstellenden Geometrie und der Nomographie sind ungefähr in derselben Zeit, in den Jahren 1780—1810, zu suchen. Sie stehen in Verbindung mit den wohlbekannten Namen G. Monge und J. Pouchet. G. Monge, wie bekannt, fügte die bisher unzusammenhängenden Kentnisse über Abbildungen von räumlichen Gebilden in die Ebene zu einem wissenschaftlichen System zusammen und Pouchet konstruierte das erste Schnittpunkten-Nomogramm einer Funktion zweier Veränderlichen und war sich sehr gut der Vorteile einer solchen graphischen Methode in der Praxis bewusst.

Im Laufe des 19. Jahrhunderts wurde beiden Disziplinen eine schnelle Entwicklung zuteil. Insbesondere die darstellende Geometrie bediente sich der Ergebnisse der projektiven Geometrie, die zur selben Zeit von J. V. Poncelet gegründet wurde und stand in Beziehung auch zu anderen geometrischen Teilwissenschaften, z. B. zur analytischen und Differential-Geometrie. Man kann sagen, dass beide Teilwissenschaften: die darstellende Geometrie sowie die Nomographie sich meist unabhängig voneinander entwickelten. Das Interesse an gemeinsamen Berührungspunkten beider geometrischen Gebiete zeigt sich erst in der letzten Zeit. Früher, soweit mir bekannt ist, fanden beide Disziplinen einen gemeinsamen Berührungspunkt um das Jahre 1830, als gezeigt wurde, dass eine Funktion etwa der Art:

$$f(x, y, z) = 0$$

als Orthogonalprojektion von Schichtenlinien dieser Funktion mit den Gleichungen:

$$f(x, y, z) = 0, \; z = k$$

im rechtwinkligen Koordinatensystem $0(x, y, z)$ darstellbar ist.

In neuster Zeit finden wir in den Abhandlungen der darstellenden Geometrie Anwendungen nomographischer Rechenmethoden (L. 3, L. 11) und genau so in den Abhandlungen über Nomographie bedient man sich häufig geometrischer Darstellungsmethoden bei Konstruktion neuer Nomogramme (L. 5).

1. Applikationen der Nomographie in der darstellenden Geometrie

Hier werde ich an erster Stelle die graphische Ausdruksweise anführen, deren man sich bedient um stereometrische Beziehungen zwischen Basis-Elementen einer gegebenen Projektion auszudrücken. Ein ganz einfaches Beispiel solchen Verfahrens sei hier angeführt:

Im sogenannten Dürerschen System der Zentral-Projektion, welches eingeführt wurde um die Ein-Eindeutigkeit des abzubildenden Objektes und seiner Zentral-Projektion mit der Basis $(0, \pi)$ zu sichern, (womit ihre Anwendbarkeit in der Praxis ermöglicht wird) gilt die Beziehung:

$$tg\alpha = v : d.$$

Dieses System ist äquivalent mit der perspektiv-kollinearen Beziehung der Grundebene ϱ und der perspektiven Projektionsebene π. In der Theorie dieser Verwandtschaft spielen eine wichtige Rolle die sogenannten Perspektiv-Geraden, die entweder der Hauptvertikalen oder einem anderen der selbstentsprechenden Kollineationsstrahlen entsprechen. Eine Perspektiv-Gerade bildet mit dem entsprechenden Kollineationsstrahle den Winkel α, der abhängig von der Höhe v und der Distanz d der Abbildung ist (L. 4).

Mit Hilfe des Nomogramms der gegebenen Beziehung lassen sich die Grössen dieses Winkels für jedes Paar v, d ermitteln und sogleich die entsprechende Konstruktion durchführen. Es handelt sich offenbar um die wohlbekannte kanonische Form: $f_1 = f_2 . f_3$ einer Funktion zweier Veränderlichen.

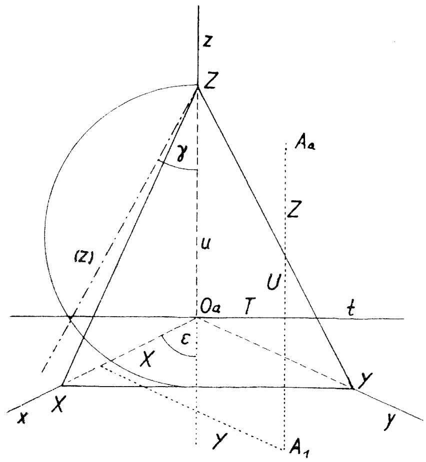
An dieser Stelle kann man die Arbeiten der Autoren: A. Müller (L. 6), Glazunov — Tschetveruchin (L. 2) anführen, die — meines Wissens — als erste in der darstellenden Geometrie nomographische Methoden gebrauchen. Auch einige unserer jüngeren Geometer befassen sich mit diesen Fragen (L. 3, L. 11). Erwähnt sei J. Zámožník, der sich bei der Bestimmung von Beziehungen unter Basiselementen einer Zentralprojektion der Nomogramme bedient, und A. Hartmannová, welche in ihrer Dissertations-Arbeit die Beziehungen unter verschiedenen Parametern (z. B. Winkel der Projektionsgeraden mit den Koordinaten-Achsen des Dreikants, Winkel dieser Achsen mit der axonometrischen Projektionsebene, Deformationen an den Achsen und an den Koordinaten-Ebenen usw.) in der orthogonalen und Zentral-Axonometrie behandelt und diese Probleme mit Hilfe nomographischer Methoden löst.

Weiter kann man die Relationen zwischen Elementen der Abbildungs-Basis und der Lage der Punkte des abzubildenden Objektes untersuchen. Z. B. bei geeigneter Durchschnitts-Methode lassen sich die Entfernungen der Perspektivbilder der Punkte des Objektes vom Hauptpunkt mittels eines Nomogramms bestimmen und so kann die Herstellung der Perspektive des Objektes vereinfacht und beschleunigt werden (L. 11).

2. Nomographie als Abbildungsmethode der darstellenden Geometrie

Diese Gedankengänge lassen sich weiterführen bis zum Augenblick, wo die Nomographie nicht nur ein Hilfsmittel der darstellenden Geometrie ist, sondern beinahe zu einer selbständigen Abbildungs-Methode der darstellenden Geometrie wird. Zur leichteren Orientation sei ein Beispiel aus der Literatur angeführt (L. 7).

Es sei ein System der orthogonalen Axonometrie gegeben, d. h. ein Koordinaten-Dreikant $0(x, y, z)$ mit der axonometrischen Abbildungsebene (axonometrisches Dreieck XYZ) gegeben. Das axonometrische Bild des Gipfelpunktes 0 sei mit 0_a bezeichnet. Die Gerade ZO_a ist die Orthogonal-Projektion der Koordinatenachse $z = OZ$ in die Projektions — Ebene π, P bezeichne den Schnittpunkt des Bildes ZO_a mit der Seite XY des axonometrischen Dreiecks XYZ, $P = ZO_a \cdot XY$. Mit t bezeichnen wir weiter die Gerade der axonometrischen Abbildungsebene, welche durch den Punkt O_a und parallel zur Spurlinie XY geht. Die Geraden t und $u = ZO_a$ können als rechtwinkelliges Koordinatensystem $O_a(t, u)$ aufgefasst werden. (obr. 1)



Obr. 1

Sei nun A ein Punkt des Objektes mit den rechtwinkeligen Raum-Koordinaten X, Y, Z im System $O(x, y, z)$ und seien T, U die Ebenen-Koordinaten seiner Orthogonalprojektion A_a im System $O_a(t, u)$, dann gelten folgende Transformations-Formeln:

$$T = Y \cdot \cos\varepsilon - X \cdot \sin\varepsilon$$
$$U = Z \cdot \cos\gamma - X \cdot \sin\gamma \cdot \cos\varepsilon - Y \cdot \sin\gamma \cdot \sin\varepsilon\,;$$

γ bezeichnet den Winkel, den die Koordinatenachse z mit der Projektionsebene π bildet, ε denjenigen der Geraden OP mit der Achse x.

Die Koordinaten T, U des Bildes A_a werden aus den Transformationsformeln mittels ihrer Nomogramme berechnet und im rechtwinkeligen System $O_a(t, u)$ eingetragen.

Dieses Verfahren unterscheidet sich nicht wesetlich von demjenigen der Durchschnittsmethode. Der sowietische Geometer Kuzněcov aber zeigte, wie in diesem Falle die Koordinaten T, U mit Hilfe dreier mit X, Y, Z bezeichneten Skalen in geeignet gewähltem Binarfeld direkt angegeben werden könenn und so das axonometrische Bild des Objektes hergestellt werden kann.

Die Konstruktion Kuzněcovs beruht auf der Theorie der sogenannten *Rhomboidalnomogramme*, die vom Spanier Urcelaj stammt (L. 1) und vom sowietischen Geometer G. S. Chovanskij weiter ausgebildet wurde.

Auf ähnliche Weise wird man fortschreiten bei der Konstruktion von Perspektivbildern in gegebener Perspektiv-Axonometrie, in welcher $OS \perp \pi$ zu wählen ist, wobei S das Projektionszentrum, O den Scheitel des axonometrischen Dreikants $O(x, y, z)$ und π die axonometrische Projektions-Ebene bedeuten. Anstatt des axonometrischen Bildes im Binarfeld (T, U) des vorigen Beispiels wird nun eine Zentral-Projektion des gegebenen Objektes im selben Binarfeld konstruiert (L. 8).

Die angeführten Beispiele zeigen die Anwendungen der Nomographie in der darstellenden Geometrie von den einfachsten Applikationen bis zur unmittelbaren Konstruktion anschaulicher Bilder von Objekten.

3. Methoden der darstellenden Geometrie als Hilfsmittel bei der Konstruktion neuer Nomogramme

Wie schon erwähnt, kann man auch umgekehrt bei Herstellung neuer Nomogramme von den Methoden der darstellenden Geometrie, besonders der Monge-Projektion Gebrauch machen. Zu grösserem Verständis möge wieder das folgende Beispiel dienen (L. 5). Gegeben sei die Funktion:

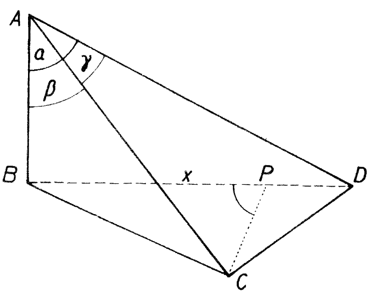
$$x = \frac{\cos\gamma}{\sin\alpha \cdot \cos\beta} - \operatorname{cotg}\alpha \,.$$

Diese Funktion dreier Veränderlichen lässt sich — wie bekannt — durch ein Nomogramm mit Binarfeld darstellen. Es wird leicht aus der kanonischen Form:

$$x \cdot \sin\alpha - \frac{\cos\gamma}{\cos\beta} + \cos\alpha = 0$$

konstruiert.

Ein neues Nomogramm wird auf folgende Weise hergestellt. Wir betrachten ein Tetraeder $ABCD$, dessen Kante AB senkrecht zur Seite BCD ist, $\alpha(\beta, \gamma)$ bezeichnen Kantenwinkel BAD $(BAC,\ CAD)$, $x = BP$, wobei $CP \perp BD$,



Obr. 2

$P \in BD$ ist. Das Tetraeder ABCD legen wir mit der Kante BD in die Grundlinie x des Monge-Systems, sodass die Seiten BDA in der Aufrissebene und BCD in der Grundrissebene liegen. Die Seiten ABD und ADC legen wir sodann um ihre Spurlinien in die Aufrissebene um. Dadurch bekommen wir alle vier Grössen in der Aufrissebene. Unter diesen Grössen ist es möglich eine Beziehung herauszufinden, die dann die Konstruktion eines neuen Nomogramms mit einem Transparent ermöglicht (L. 5), (obr. 2).

In diese Gruppe der Berührungspunkte beider Disziplinen gehört die Herstellung von Nomogrammen mit Kreisen, deren Grundgedanke auf der zyklographischen Projektion beruht in Zusammenhang mit der Laguerre-Lie-schen Kreisgeometrie (L. 9, L. 10). Ähnlich verhält es sich mit der Herstellung von Nomogrammen von Funktionen mehrerer Veränderlichen, welche zur Grundlage die darstellende Geometrie im vierdimensionalen Raume hat (V. Štěpánský in Ostrava).

Alle angeführten Zusammenhänge der darstellenden Geometrie und Nomographie werden systematisch untersucht.

LITERATUR

[1] *Belgrano, I. C., Nieto A. L., Urcelaj I. M.:* Tratado de nomografia, Madrid, Instituto Tecnico, 1953.
[2] *Glazunov – Četveruchin:* Anoxometrja, Moskva.
[3] *Hartmanová, A.:* Aplikace nomografie v soustavě axonometrie, rigorosní práce, 1970.
[4] *Havelka, F.:* Teorie Dürerovy soustavy, Acta Universitatis Palackianae Olomucensis, 1962.
[5] *Chaninajev, Ž. S.:* Postrojenije odnoj nomogramy s vraščajuščimsja transparantom, Nomografičeskij sbornik, Moskva, 1965.
[6] *Müller, A.:* Die Schaubarkeit in der Axonometrie, Berlin, 1952.
[7] *Kuzněcov, A. V.:* Metod postrojenija axonometričeskich čertězej, Nomograf. sbornik 3, Moskva, 1965.
[8] *Kuzněcov, A. V.:* Nomografirovanije postrojenij nagladnych izobraženij, Nomograf. sbornik 3, Moskva, 1965.
[9] *Müller, E.:* Vorlesungen über darstellenden Geometrie II, Leipzig und Wien, 1929.
[10] *Záhora, J.:* Dotykové nomogramy s kružnicemi, Košice, 1970.
[11] *Zámožík, J.:* Mechanizácia niektorých konštrukcií v deskriptivnej geometrii, kandidátská disertace, Bratislava, 1965.

SHRNUTÍ

NĚKTERÉ SOUVISLOSTI DESKRIPTIVNÍ GEOMETRIE A NOMOGRAFIE

FRANTIŠEK HAVELKA

Počátky deskriptivní geometrie a nomografie jako vědeckých odvětví matematiky spadají do téže doby, zhruba do let 1780—1810. Obě, zvláště deskriptivní geometrie, prošly v minulém století rušným vývojem vcelku samostatně. Teprve v novější době shledáváme, že mezi oběma obory jsou hlubší souvislosti, které můžeme zařadit do tří hlavních skupin.

1. Předně se projevuje v deskr. geometrických pracích (*Zámožík*, *Hartmannová*) snaha vyjadřovat vztahy prvků bazí různých zobrazovacích metod nomogramy, které poskytují o těchto vztazích názorné představy. I vztahy bodů zobrazovaných objektů k bazi té které projekce je možno vyjadřovat nomogramy a různě jich využít. Jde tedy o užití nomografie v deskriptivní geometrii.

2. V literatuře se projevují snahy po důsledném užití nomografie v deskr. geometrii. Vztahy mezi souřadnicemi bodů objektu v prostoru a mezi souřadnicemi obrazů těchto bodů v průmětně je možno vyjadřovat nomogramy a pomocí nich určovat uvedené obrazy bodů a celých objektů. Nomografie tak postupuje na zobrazovací metodu deskriptivní geometrie. Např. je možno kreslit touto metodou axonometrické a perspektivní obrazy objektů.

3. Třetí styčný bod deskriptivní geometrie a nomografie záleží v užití deskriptivní geometrie v rozvoji nomografieckých metod. Např. mnohé vztahy tří a více proměnných jsou aplikovatelné na prvky geometrických těles (úhly hran, stěn, velikosti hran, . . .). Tato tělesa je možno zobrazit např. v Mongeově nebo jiné projekci, provést deskr. geometrické operace, jako je sklopení stěn, . . . atd. a po takové úpravě je možno vztahy mezi upravenými prvky vyjádřit nomogramy. Jde tedy o aplikace deskr. geometrie v rozvoji nomografie. Sem náleží též využití cyklografického zobrazení a zobrazovacích metod čtyřrozměrného prostoru ke konstrukci nových nomogramů.

Prohlašuji, že článek: Frant. Havelka: Über Beziehungen der darstellenden Geometrie und Nomographie zu einander přeložila do německého jazyka s. RNDr.Božena Věchtová, odb. as. přírodovědecké fakulty UP v Olomouci.

V Olomouci 31. 5. 1971.

Doc. Ing. Dr. Frant. Havelka