František Krutský

Über eine algebraische Ausnutzung der messbaren Transformationen

Sborník prací Přírodovědecké fakulty University Palackého v Olomouci. Matematika, Vol. 13 (1973), No. 1, 5--13

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/120018`

1973 — ACTA UNIVERSITATIS PALACKIANAE OLOMUCENSIS
FACULTAS RERUM NATURALIUM — TOM 41

Katedra algebry a geometrie přírodovědecké fakulty University Palackého v Olomouci
Vedoucí katedry: Doc. RNDr. Josef Šimek

ÜBER EINE ALGEBRAISCHE AUSNUTZUNG DER MESSBAREN TRANSFORMATIONEN

FRANTIŠEK KRUTSKÝ
(Eingegangen am 5. September 1972)

In dieser Arbeit werden gewisse genügende Bedingungen abgeleitet, die ein Monoid $\mathbf{E}$ in ein anderes Monoid $\mathbf{M}^*$ isomorph einzubetten ermöglichen und zwar so, daß zu einer gewissen Untermenge von $\mathbf{E}$ inverse Elemente in $\mathbf{M}^*$ existieren.

Zu Beginn führen wir einige Definitionen und Bezeichnungen ein, die wir im weiteren stets benutzen werden.

1.1. Definition: $\mathbf{E}$ *sei ein Monoid. Für* $a \in \mathbf{E}$ *werden wir die Abbildung* $x \to ax$ *von* $\mathbf{E}$ *in sich als die linke Translation* γ_a *die dem Elemente* $a \in \mathbf{E}$ *entspricht bezeichnen.*

Für jedes $x \in \mathbf{E}$ haben wir also $\gamma_a(x) = ax$.

1.2. Definition: *Jedes Element aus* $\mathbf{E}$, *das mit allen Elementen vertauschbar ist, heißt Zentralelement von* $\mathbf{E}$. *Die Menge aller Zentralelemente heißt das Zentrum von* $\mathbf{E}$ *und wird stets mit* $\mathbf{Z}$ *bezeichnet.*

1.3. Bezeichnung: $\mathbf{E}$ sei ein Monoid. $\mathbf{L} \subseteqq \mathbf{E}$ wird die Menge aller solcher Elemente in $\mathbf{E}$ bezeichnen, deren linke Translationen injektiv sind.

1.4. Definition: *Jedes nichtleere System* $\mathscr{F}$ *der Untermengen von* $\mathbf{E} \neq \emptyset$ *wird Filter über* $\mathbf{E}$ *genannt, wenn es folgenden Bedingungen genügt:*
1° *Der Durchschnitt beliebiger zwei Elemente aus* $\mathscr{F}$ *gehört wieder in* $\mathscr{F}$.
2° *Wenn* $\mathbf{F} \subseteqq \mathbf{G} \subseteqq \mathbf{E}$ *für ein beliebiges* $\mathbf{F} \in \mathscr{F}$ *gilt, so ist auch* $\mathbf{G} \in \mathscr{F}$.
3° *Die leere Menge* $\emptyset$ *gehört nicht in* $\mathscr{F}$.

Kapitel II.

2.1 Definition: $\mathbf{E}$ sei eine nichtleere Menge und $\mathscr{F}$ ein Filter über $\mathbf{E}$. *Das System* $\mathscr{F}' = \{\mathbf{E} - \mathbf{X};\ \mathbf{X} \in \mathscr{F}\}$ *wird ein Nullmengensystem genannt.*

2.2. Lemma: *Das Nullmengensystem* $\mathscr{F}'$ *ist ein Antifilter in* $\mathbf{E}$.

Beweis: Wenn $\mathbf{X} \in \mathscr{F}'$ ist, so gilt auch $\mathbf{Y} \in \mathscr{F}'$ für jedes $\mathbf{Y} \subset \mathbf{X}$, denn aus $\mathbf{X} \in \mathscr{F}'$

folgt die Existenz eines $\mathbf{M} \in \mathscr{F}$ so, daß $\mathbf{X} = \mathbf{E} - \mathbf{M}$. Ist $\mathbf{Y} \subset \mathbf{X}$, dann ist auch $\mathbf{Y} = \mathbf{E} - \mathbf{N}$, wo $\mathbf{M} \subset \mathbf{N}$ und also $\mathbf{N} \in \mathscr{F}$, $\mathbf{Y} \in \mathscr{F}'$.

Wenn $\mathbf{X} \in \mathscr{F}' \ni \mathbf{Y}$ ist, so existieren $\mathbf{M} \in \mathscr{F}' \ni \mathbf{N}$ so, daß $\mathbf{X} = \mathbf{E} - \mathbf{M}$, $\mathbf{Y} = \mathbf{E} - \mathbf{N}$ und es gilt $\mathbf{X} \cup \mathbf{Y} = (\mathbf{E} - \mathbf{M}) \cup (\mathbf{E} - \mathbf{N}) = \mathbf{E} - (\mathbf{M} \cap \mathbf{N})$. Da aber $\mathbf{M} \cap \mathbf{N} \in \mathscr{F}$ ist, so haben wir auch $\mathbf{X} \cup \mathbf{Y} \in \mathscr{F}'$.

2.3 Lemma: *Für jedes* $\mathbf{A} \in \mathscr{F}$, $\mathbf{N} \in \mathscr{F}'$ *gilt* $\mathbf{A} \cup \mathbf{N} \in \mathscr{F}$, $\mathbf{A} - \mathbf{N} \in \mathscr{F}$.

Beweis: Es gilt $\mathbf{A} \in \mathscr{F}$ und $\mathbf{A} \subseteqq \mathbf{A} \cup \mathbf{N}$. Wir haben also $\mathbf{A} \cup \mathbf{N} \in \mathscr{F}$. Da $\mathbf{N} \in \mathscr{F}'$ ist, existiert $\mathbf{B} \in \mathscr{F}$ so, daß $\mathbf{N} = \mathbf{B}'$. Wir haben schließlich $\mathbf{A} - \mathbf{N} = \mathbf{A} \cap \mathbf{N}' = \mathbf{A} \cap \mathbf{B} \in \mathscr{F}$.

2.4. Definition: Wir betrachten zwei Abbildungen f: $\mathbf{E} \to \mathbf{E}$ und g: $\mathbf{E} \to \mathbf{E}$. *Wir setzen* $f \equiv g$ *genau dann, wenn ein* $\mathbf{N} \in \mathscr{F}'$ *existiert so, daß* $f(x) = g(x)$ *für jedes* $x \in \mathbf{E} - \mathbf{N}$.

2.5. Lemma: *Die eben definierte Relation* $\equiv$ *stellt eine Äquivalenz auf der Menge aller Abbildungen* $\mathbf{E}$ *in sich dar.*

Beweis: Es ist unmittelbar klar, daß $\equiv$ reflexiv und symmetrisch ist. Es gelte gleichzeitig $f \equiv g$ und $g \equiv h$. Dann gibt es $\mathbf{M} \in \mathscr{F}' \ni \mathbf{N}$ so, daß $f(x) = g(x)$ für jedes $x \in \mathbf{E} - \mathbf{M}$ und $g(x) = h(x)$ für jedes $x \in \mathbf{E} - \mathbf{M}$. Daraus folgt $f(x) = h(x)$ für jedes $x \in (\mathbf{E} - \mathbf{M}) \cap (\mathbf{E} - \mathbf{N}) = \mathbf{E} - (\mathbf{M} \cup \mathbf{N})$. Es ist aber $\mathbf{M} \cup \mathbf{N} \in \mathscr{F}'$ und also $f \equiv h$; die Relation $\equiv$ ist danach transitiv.

2.6. Definition: *Die Abbildung* f: $\mathbf{E} \to \mathbf{E}$ *heißt* $\mathscr{F}$*-meßbar, wenn* $f^{-1}(\mathbf{X}) \in \mathscr{F}$ *für jedes* $\mathbf{X} \in \mathscr{F}$.

2.7. Lemma: *Es seien* f: $\mathbf{E} \to \mathbf{E}$ *und* g: $\mathbf{E} \to \mathbf{E}$. *Wenn* f $\mathscr{F}$*-meßbar ist und* $f \equiv g$ *gilt, so ist auch* g $\mathscr{F}$*-meßbar.*

Beweis: Es gibt $\mathbf{N} \in \mathscr{F}$ so, daß $f(x) = g(x)$ für jedes $x \in \mathbf{E} - \mathbf{N}$ ist. Es sei weiter $\mathbf{Y} \in \mathscr{F}$. Aus der Relation $f(x) \in \mathbf{Y}$ folgt dann entweder $f(x) = g(x)$ und gleichzeitig $g(x) \in \mathbf{Y}$, oder $f(x) \neq g(x)$; also $f^{-1}(\mathbf{Y}) \subseteqq g^{-1}(\mathbf{Y}) \cup \mathbf{N}$. Hiervon haben wir $f^{-1}(\mathbf{Y}) \cap \mathbf{N}' \subseteqq (g^{-1}(\mathbf{Y}) \cap \mathbf{N}') \cup (\mathbf{N} \cap \mathbf{N}') \subseteqq g^{-1}(\mathbf{Y})$. Wegen $f^{-1}(\mathbf{Y}) \in \mathscr{F}$, $\mathbf{N}' \in \mathscr{F}$ haben wir $f^{-1}(\mathbf{Y}) \cap \mathbf{N}' \in \mathscr{F}$ und da auch $f^{-1}(\mathbf{Y}) \cap \mathbf{N}' \subseteqq g^{-1}(\mathbf{Y})$ gilt, folgt schließlich $g^{-1}(\mathbf{Y}) \in \mathscr{F}$.

2.8. Lemma: *f sei* $\mathscr{F}$*-meßbar,* $\mathbf{N} \in \mathscr{F}'$. *Dann gilt* $f^{-1}(\mathbf{N}) \in \mathscr{F}'$.

Beweis: Wenn $\mathbf{N} \in \mathscr{F}'$ gilt, so gibt es ein $\mathbf{X} \in \mathscr{F}$ so, daß $\mathbf{N} = \mathbf{E} - \mathbf{X}$. Des weiteren haben wir $f^{-1}(\mathbf{N}) = f^{-1}(\mathbf{E} - \mathbf{X}) = f^{-1}(\mathbf{E}) - f^{-1}(\mathbf{X}) = \mathbf{E} - f^{-1}(\mathbf{X})$. Da $f^{-1}(\mathbf{X}) \in \mathscr{F}$ ist, so haben wir auch $f^{-1}(\mathbf{N}) \in \mathscr{F}'$.

2.9. Lemma: *f und g seien* $\mathscr{F}$*-meßbare Abbildungen. Dann ist auch* fg $\mathscr{F}$*-meßbar. Die identische Abbildung* $\mathbf{id}_{\mathbf{E}}$ *ist* $\mathscr{F}$*-meßbar.*

Beweis: Wir betrachten ein $\mathbf{Y} \in \mathscr{F}$. Es gilt $(fg)^{-1}(\mathbf{Y}) = f^{-1}(g^{-1}(\mathbf{Y}))$. Dann haben wir $g^{-1}(\mathbf{Y}) \in \mathscr{F}$, da g $\mathscr{F}$-meßbar ist und $f^{-1}(g^{-1}(\mathbf{Y})) \in \mathscr{F}$ da f auch $\mathscr{F}$-meßbar ist. Die letzte Behauptung ist trivial.

2.10. Lemma: *f, f', g, g' seien $\mathscr{F}$-meßbar. Es gelte $f \equiv f'$, $g \equiv g'$. Dann gilt auch $fg \equiv f'g'$.*

Beweis: Es gibt $\mathbf{M} \in \mathscr{F}' \ni \mathbf{N}$ so, daß $f(x) = f'(x)$ für alle $x \in \mathbf{E} - \mathbf{M}$ und $g(x) = g'(x)$ für alle $x \in \mathbf{E} - \mathbf{N}$.

Es sei $(fg)(x) \neq (f'g')(x)$. Für $x \in \mathbf{E}$ tritt genau eine der Möglichkeiten auf: 1° $x \in \mathbf{N}$ oder 2° $x \in \mathbf{E} - \mathbf{N}$. Im Falle 2° haben wir $g(x) = g'(x) = y$ und da wir $(fg)(x) = (f'g')(x)$ vorausgesetzt haben, muß also $f(y) \neq f'(y)$ gelten, d. h. $y \in \mathbf{M}$. Im Falle 2° erhalten wir also $x \in g^{-1}(\mathbf{M})$. Dabei ist $g^{-1}(\mathbf{M}) \in \mathscr{F}'$ laut 2.8. Aus der Relation $(fg)(x) \neq (f'g')(x)$ folgt also $x \in \mathbf{N} \cup g^{-1}(\mathbf{M}) \in \mathscr{F}'$ laut 2.2. Wenn $x \in \mathbf{E} - \mathbf{N} \cup g^{-1}(\mathbf{M}) = (\mathbf{E} - \mathbf{N}) \cap (\mathbf{E} - g^{-1}(\mathbf{M}))$, ist, muß $g(x) = g'(x)$ und $g(x) \in \mathbf{E} - \mathbf{M}$ sein und deßhalb gilt auch $f(g(x)) = f'(g'(x))$. Es gilt also $fg \equiv f'g'$.

2.11. Definition: *Die Menge aller $\mathscr{F}$-meßbaren Abbildungen $\mathbf{E}$ in sich bezeichnen wir mit $\mathscr{M}$. Weiter setzen wir $\mathbf{R} = \equiv \cap (\mathscr{M} \times \mathscr{M})$.*

2.12. Satz: *Die Relation $\mathbf{R}$ ist eine Kongruenz auf $\mathscr{M}$.*

Beweis: Die Behauptung folgt aus Lemmas 2.5, 2.7, 2.9 und 2.10

2.13. Satz: *Die Faktorstruktur $\mathscr{M}/\mathbf{R}$ ist ein Monoid.*

Beweis: Folgt aus 2.9 und 2.12.

2.14. Vereinbarung: Im weiteren wird das Symbol $\mathscr{S}$ ein Monoid bezeichnen, das aus Abbildungen der Menge $\mathbf{E}$ in sich zusammengesetzt ist, deren jede zwei Abbildungen vertauschbar sind.

Bemerkung: Es ist klar, daß für $\mathbf{E} \neq \emptyset$ wir auch $f(\mathbf{E}) \neq \emptyset$, $(fg)\,\mathbf{E}) \neq \emptyset$ für jede zwei $f, g \in \mathbf{E}^{\mathbf{E}}$ haben.

2.15. Lemma: *Es sei $\mathbf{E} \neq \emptyset$ und $\mathscr{G} = \{f(\mathbf{E}); f \in \mathscr{S}\}$. Das Ende in $2^{\mathbf{E}}$, generiert durch $\mathscr{G}$, bezeichnen wir mit $\mathscr{F}$. Dann ist $\mathscr{F}$ ein Filter.*

Beweis: Wir nehmen $\mathbf{X} \in \mathscr{F} \ni \mathbf{Y}$. Es gibt also $f \in \mathscr{S} \ni g$ so, daß $f(\mathbf{E}) \subseteqq \mathbf{X}$, $g(\mathbf{E}) \subseteqq \mathbf{Y}$. Daraus bekommen wir $(fg)(\mathbf{E}) = (gf)(\mathbf{E}) \subseteqq g(\mathbf{E}) \subseteqq \mathbf{Y}$. Gleichzeitig haben wir $fg \in \mathscr{S}$ und deshalb $(fg)(\mathbf{E}) \subseteqq \mathbf{X} \cap \mathbf{Y}$. Weiter also $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} \in \mathscr{F}$, $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} \neq \emptyset$.

Weiter für jedes $\mathbf{X} \in \mathscr{F}$ gehört auch jedes $\mathbf{Y} \supset \mathbf{X}$ zu $\mathscr{F}$. Es ist klar, daß $\emptyset \neq \mathscr{F}$.

2.16. Lemma: *Es sei $\mathbf{E} \neq \emptyset$, $\mathscr{G} = \{f(\mathbf{E}); f \in \mathscr{S}\}$ und $\mathscr{F}$ das Filter in $2^{\mathbf{E}}$, generiert durch $\mathscr{G}$. Jede Abbildung $f \in \mathscr{S}$ ist dann $\mathscr{F}$-meßbar.*

Beweis: Wir nehmen $\mathbf{X} \in \mathscr{F}$, $f \in \mathscr{S}$. Es gibt dann ein $g \in \mathscr{S}$ so, daß $g(\mathbf{E}) \subseteqq \mathbf{X}$. Wir haben dann $f(g(\mathbf{E})) = (fg)(\mathbf{E}) = (gf)(\mathbf{E}) = g(f(\mathbf{E})) \subseteqq g(\mathbf{E}) \subseteqq \mathbf{X}$ und also $g(\mathbf{E}) \subseteqq f^{-1}(f(g(\mathbf{E})) \subseteqq f^{-1}(\mathbf{X})$. Da $g \in \mathscr{S}$ ist, muß auch $f^{-1}(\mathbf{X}) \in \mathscr{F}$ sein.

2.17. Lemma: *$\mathbf{E}$ sei eine nichtleere Menge, $\mathscr{G} = \{f(\mathbf{E}); f \in \mathscr{S}\}$ und $\mathscr{F}$ das Filter in $2^{\mathbf{E}}$, generiert durch $\mathscr{G}$. Es sei weiter $f \in \mathscr{S}$, $\mathbf{X} \in \mathscr{F}$. Dann gilt $f(\mathbf{X}) \in \mathscr{F}$.*

Beweis: Es gibt $g \in \mathscr{S}$ so, daß $g(\mathbf{E}) \subseteqq \mathbf{X}$. Daraus folgt $(fg)(\mathbf{E}) = f(g(\mathbf{E})) \subseteqq f(\mathbf{X})$. Da $fg \in \mathscr{S}$ ist, haben wir $(fg)(\mathbf{E}) \in \mathscr{G}$ und $f(\mathbf{X}) \in \mathscr{F}$.

2.18. Lemma: *Es sei* $\mathbf{E} \neq \emptyset$, $\mathscr{G} = \{f(\mathbf{E});\ f \in \mathscr{S}\}$ *und* $\mathscr{F}$ *das Filter in* $2^{\mathbf{E}}$, *generiert durch* $\mathscr{G}$. $f \in \mathscr{S}$ *sei injektiv. Wir definieren die Abbildung* f_1 *durch*

$$f_1(x) = \begin{cases} f^{-1}(x) & \text{für} \quad x \in f(\mathbf{E}) \\ x & \text{für} \quad x \in \mathbf{E} - f(\mathbf{E}). \end{cases}$$

f_1 *ist dann* $\mathscr{F}$*-meßbar.*

Beweis: Es sei $\mathbf{X} \in \mathscr{F}$, $x \in f(\mathbf{X})$. Dann existiert ein $y \in \mathbf{X}$ so, daß $f(y) = x$ ist und also $y = f^{-1}(x) = f_1(x)$. Aus $x \in f(x)$ folgt dann $f_1(x) \in \mathbf{X}$, d. h. $x \in f_1^{-1}(\mathbf{X})$. Wir haben also $f(\mathbf{X}) \subseteqq f_1^{-1}(\mathbf{X})$. Dabei ist laut 2.17 $f(\mathbf{X}) \in \mathscr{F}$. Da $\mathscr{F}$ ein Filter ist, gilt $f_1^{-1}(\mathbf{X}) \in \mathscr{F}$.

2.19. Lemma: *Es sei* $\mathbf{E} \neq \emptyset$, $\mathscr{G} = \{f(\mathbf{E});\ f \in \mathscr{S}\}$ *und* $\mathscr{F}$ *das Filter in* $2^{\mathbf{E}}$, *generiert durch* $\mathscr{G}$. $f \in \mathscr{S}$ *sei injektiv. Für die Abbildung* f_1 *aus Lemma* 2.17 *gilt* $ff_1 \equiv id_{\mathbf{E}}$, $f_1 f \equiv id_{\mathbf{E}}$.

Beweis: Es sei $x \in \mathbf{E}$. Wenn $x \in f(\mathbf{E})$ gilt, muß auch $f_1(x) = f^{-1}(x)$ sein und also $(ff_1)(x) = f(f^{-1}(x)) = x$. Da $f \in \mathscr{S}$ ist, ist laut 2.17 $f(\mathbf{E}) \in \mathscr{F}$ und daraus $\mathbf{N} = \mathbf{E} - f(\mathbf{E}) \in \mathscr{F}'$, $(ff_1)(x) = id_{\mathbf{E}}(x)$ für jedes $x \in \mathbf{E} - \mathbf{N} = f(\mathbf{E})$. Wir erhalten so $ff_1 \equiv id_{\mathbf{E}}$. Wenn $x \in \mathbf{E}$ ist, ist $f(x) \in f(\mathbf{E})$ und also auch $f_1(f(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$, hiervon schließlich $f_1 f \equiv id_{\mathbf{E}}$.

2.20. Bezeichnung: Es sei f eine beliebige $\mathscr{F}$-meßbare Abbildung $\mathbf{E} \to \mathbf{E}$. Mit $[f]$ wird diejenige Klasse aus $\mathscr{M}/_{\mathbf{R}}$ bezeichnet, die f enthält.

2.21. Satz: *Es sei* $\mathbf{E} \neq \emptyset$, $\mathscr{G} = \{f(\mathbf{E});\ f \in \mathscr{S}\}$ *und* $\mathscr{F}$ *sei ein Filter, welches das Ende in* $2^{\mathbf{E}}$ *darstellt und durch* $\mathscr{G}$ *generiert wird. Die Abbildung* $f \in \mathscr{S}$ *sei injektiv. Für die Abbildung* f_1 *aus den vorhergehenden Lemmas gilt* $[f] . [f_1] = [id_{\mathbf{E}}] = [f_1] . [f]$ – d. h. $[f_1]$ *ist zu* $[f]$ *invers.*

Beweis: Alles folgt aus 2.12, 2.16, 2.17, 2.18, 2.19.

Kapitel III.

In diesem Kapitel werden wir die algemeinen Behauptungen (namentlich den Satz 2.21) aus zweitem Kapitel auf einem Spezialfall anwenden, wo $\mathbf{E}$ ein Monoid darstellt und die betrachteten Abbildungen linke Translation aus $\mathbf{E}$ in $\mathbf{E}$ sind, die – wie bereits gesagt – mit γ_a, γ_b, ... bezeichnet werden.

3.1. Lemma: $\mathbf{E}$ *sei ein Monoid. Dann*

1° *für* $a \in \mathbf{E} \ni b$ *gilt* $\gamma_a \gamma_b = \gamma_{ab}$,

2° $\gamma_e = id_e$ (*wo e das Einheitselement aus* $\mathbf{E}$ *bedeutet*).

Beweis: 1° Für jede $a \in \mathbf{E} \ni b$, $x \in \mathbf{E}$ gilt $(\gamma_a \gamma_b)(x) = \gamma_a(\gamma_b)(x) = \gamma_a(bx) = a(bx) = ab(x) = \gamma_{ab}(x)$.

2° Für ein beliebiges $x \in \mathbf{E}$ haben wir $\gamma_e(x) = ex = x$ und daraus $\gamma_e(x) = id_{\mathbf{E}}$.

3.2. Lemma: $\mathbf{E}$ *sei ein Monoid und* $\mathscr{L}$ *die Menge aller seiner linken Translationen. Dann* $\mathscr{L}$ *ist ein Monoid.*

Beweis: Aus 3.1 sehen wir, daß $\mathscr{L}$ in bezug auf die Multiplikation der Translationen geschlossen ist, daß Einheitselement $\gamma_e = \boldsymbol{id}_e$ darstellt. Das assoziative Gesetz der Multiplikation von Translationen gilt auch, da es in $\mathbf{E}$ gültig ist.

3.3. Bemerkung: Für beliebige zwei vertauschbare Elemente a, b $\in \mathbf{E}$ $(ab = ba)$ gilt auch $\gamma_a\gamma_b = \gamma_b\gamma_a$ laut 1° aus 3.1.

3.4. Lemma: *$\mathbf{E}$ sei ein Monoid. Wir setzen $\mathbf{F}(a) = \gamma_a$, für ein beliebiges $a \in \mathbf{E}$. $\mathbf{F}$ ist dann ein Isomorphismus des Monoids $\mathbf{E}$ auf $\mathscr{L}$.*

Beweis: Aus 3.2 sehen wir, daß $\mathbf{F}(ab) = \gamma_{ab} = \gamma_a\gamma_b = \mathbf{F}(a)\,\mathbf{F}(b)$ gilt so, daß $\mathbf{F}$ ein Homomorphismus des Monoids $\mathbf{E}$ auf $\mathscr{L}$ ist.

Für $a \ni \mathbf{E} \ni b$, $a \neq b$ haben wir $\gamma_a(e) = ae = a \neq b = be = \gamma_b(e)$ und also $\gamma_a \neq \gamma_b$, d. h. $\mathbf{F}(a) \neq \mathbf{F}(b)$. Also $\mathbf{F}$ ist ein Isomorphismus des Monoids $\mathbf{E}$ auf $\mathscr{L}$.

3.5. Lemma: *$\mathbf{E}$ sei ein Monoid, $\mathbf{L} \subseteqq \mathbf{E}$ die Menge aller solcher Elemente aus $\mathbf{E}$, deren linke Translationen injektiv sind. $\mathbf{L}$ ist dann ein Untermonoid in $\mathbf{E}$.*

Beweis: Es seien $a \in \mathbf{L} \ni b$. γ_a, γ_b injektiv. Also auch $\gamma_a\gamma_b$ sind injektiv. Laut 3.1 ist $\gamma_{ab} = \gamma_a\gamma_b$ injektiv, woraus $ab \in \mathbf{L}$ folgt. Nach 3.1 ist auch $\gamma_e = \boldsymbol{id}_e$ injektiv und deshalb $e \in \mathbf{L}$.

3.6. Bemerkung: $\mathbf{E}_{\mathbf{L}}^{*} \subseteqq \mathbf{E}$ sei die Menge aller linken regulären Elemente in $\mathbf{E}$. Dann $\mathbf{E}_{\mathbf{L}}^{*} = \mathbf{L}$.

Beweis: Es seien $x \in \mathbf{E}_{\mathbf{L}}^{*}$, a, $b \in \mathbf{E}$, $a \neq b$. Wäre $\gamma_x(a) = \gamma_x(b)$, so würde daraus $xa = xb$ folgen und weiter $a = b$, also ein Widerspruch. Es ist dann $\mathbf{E}_{\mathbf{L}}^{*} \subseteqq \mathbf{L}$.

Es seien $x \in \mathbf{L}$, $a \in \mathbf{E} \ni b$, $xa = xb$. Es muß also $\gamma_x(a) = \gamma_x(b)$ richtig sein und da $\gamma_x \in \mathbf{E}^{\mathbf{E}}$ injektiv ist, bekommen wir $a = b$. Daraus folgt $\mathbf{L} \subseteqq \mathbf{E}_{\mathbf{L}}^{*}$. Zusammen also $\mathbf{E}_{\mathbf{L}}^{*} = \mathbf{L}$.

3.7. Lemma: *Es seien $\mathbf{E}$ ein Monoid und $\mathbf{Z} \subseteqq \mathbf{E}$ das Zentrum von $\mathbf{E}$. $\mathbf{Z}$ ist ein Untermonoid in $\mathbf{E}$.*

Beweis: Wir nehmen $a \in \mathbf{Z} \ni b$. Für jedes $x \in \mathbf{E}$ haben wir $(ab)\;x = a(bx) = (ax)\,b = (xa)\,b = x(ab)$ so, daß $ab \in \mathbf{Z}$. Da weiter für jedes $x \in \mathbf{E}$ $ex = xe = x$ gilt, ist auch $e \in \mathbf{Z}$.

3.8. Korollar: *$\mathbf{E}$ sei ein Monoid. $\mathbf{L} \cap \mathbf{Z}$ ist ein Untermonoid in $\mathbf{E}$.*

3.9. Lemma: *$\mathbf{E}$ sei ein Monoid, $\mathbf{S} \subseteqq \mathbf{Z}$ sein Untermonoid. Wir setzen $\mathscr{S} = \mathbf{F}(\mathbf{S})$, $\mathscr{G} = \{\boldsymbol{f}(\mathbf{E});\, \boldsymbol{f} \in \mathscr{S}\}$, und $\mathscr{F}$ sei das Ende in $2^{\mathbf{E}}$, generiert durch $\mathscr{G}$. Jede Abbildung $\boldsymbol{f} \in \mathscr{L}$ ist dann $\mathscr{F}$-meßbar.*

Beweis: Es seien $\mathbf{X} \in \mathscr{F}, \boldsymbol{f} \in \mathscr{L}$. Dann gibt es ein $\boldsymbol{g} \in \mathscr{S}$ so, daß $\boldsymbol{g}(\mathbf{E}) \subseteqq \mathbf{X}$. Es muß also ein $a \in \mathbf{S}$ existieren so, daß $g = \gamma_a$, also $\gamma_a(\mathbf{E}) \subseteqq \mathbf{X}$. Es gibt weiter ein $b \in \mathbf{E}$ so, daß $\boldsymbol{f} = \gamma_b$. Daraus folgt $\gamma_b(\gamma_a(\mathbf{E})) = (\gamma_b\gamma_a)\,(\mathbf{E}) = \gamma_{ba}(\mathbf{E}) = \gamma_{ab}(\mathbf{E}) = (\gamma_a\gamma_b)\,(\mathbf{E}) = \gamma_a(\gamma_b(\mathbf{E}) \subseteqq \gamma_a(\mathbf{E}) \subseteqq \mathbf{X}$. Hiervon folgern mit weiter $\gamma_a(\mathbf{E}) \subseteqq \gamma_b^{-1}(\gamma_b(\gamma_a(\mathbf{E}))) \subseteqq \gamma_b^{-1}(\mathbf{X})$, also $\gamma_b^{-1}(\mathbf{X}) \in \mathscr{F}$. Daraus schließlich $\boldsymbol{f}^{-1}(\mathbf{X}) \in \mathscr{F}$ und $\boldsymbol{f}$ ist $\mathscr{F}$-meßbar.

3.10. Korollar: *Unter den Voraussetzungen von Lemma 3.9 gilt* $\mathscr{L} \subseteqq \mathscr{M}$.

3.11. Lemma: $\mathbf{E}$ *sei ein Monoid,* $\mathbf{S} \subseteqq \mathbf{Z} \cap \mathbf{L}$ *sein Untermonoid. Wir setzen* $\mathscr{S} = \mathbf{F}(\mathbf{S})$. *Es seien* $\mathscr{G} = \{f(\mathbf{E});\ f \in \mathscr{S}\}$ *und* $\mathscr{F}$ *das Filter welches das Ende in* $2^{\mathbf{E}}$ *darstellt und durch* $\mathscr{G}$ *generiert wird. Wenn* $a \in \mathbf{E} \ni b$, $a \neq b$ *gilt, so ist* $\gamma_a \not\equiv \gamma_b$.

Beweis: Wir setzen das Gegenteil voraus, d. h. $a \neq b$, $\gamma_a \equiv \gamma_b$. Dann existiert ein $\mathbf{N} \in \mathscr{F}$ so, daß $\gamma_a(x) = \gamma_b(x)$ für jedes $x \in \mathbf{E} - \mathbf{N}$. Da $\mathbf{E} - \mathbf{N} \in \mathscr{F}$ ist, gibt es ein $s \in \mathbf{S}$ so, daß $\gamma_s(\mathbf{E}) \subseteqq \mathbf{E} - \mathbf{N}$. Dann gilt $s = se = \gamma_s(e) \in \mathbf{E} - \mathbf{N}$ und also $\gamma_a(s) = \gamma_b(s)$, d. h. $as = bs$. Da $s \in \mathbf{Z}$ ist, haben wir $sa = sb$ und wegen $s \in \mathbf{L}$ ist γ_s injektiv, d. h. aus $a \neq b$ folgt $sa = \gamma_s(a) = \gamma_s(b) = sb$, was einen Widerspruch ergibt. Es muß also $\gamma_a \not\equiv \gamma_b$ gelten.

3.12. Korollar: *Es seien* $\mathbf{E}$ *ein Monoid,* $\mathbf{S} \subseteqq \mathbf{Z} \cap \mathbf{L}$ *sein Untermonoid,* $\mathscr{S} = \mathbf{F}(\mathbf{S})$, $\mathscr{G} = \{f(\mathbf{E}); f \in \mathscr{S}\}$, $\mathscr{F}$ *das Filter in* $2^{\mathbf{E}}$ *generiert durch* $\mathscr{G}$ *und* φ *eine kanonische Surjektion* $\mathscr{M}$ *auf* $\mathscr{M}/\mathbf{R}$. φ *stellt den Isomorphismus* $\mathscr{L}$ *auf ein bestimmtes Untermonoid in* $\mathscr{M}/\mathbf{R}$.

Beweis: Aus den bekannten Sätzen über Algebrenisomorphismen folgt daß φ ein Homomorphismus $\mathscr{M}$ auf $\mathscr{M}/\mathbf{R}$ ist; aus dem Korollar 3.10 folgt, daß $\mathscr{L} \subseteqq \mathscr{M}$ ist und laut 3.2 ist $\mathscr{L}$ ein Monoid – es ist also ein Untermonoid in $\mathscr{M}$. Die Restriktion $\varphi/\mathscr{L}$ stellt deshalb einen Homomorphismus $\mathscr{L}$ auf das Untermonoid $\mathscr{M}/\mathbf{R}$ dar.

Laut 3.4 folgt aus $f \in \mathscr{L} \ni g$, $f \neq g$ die Existenz zweier Elemente $a \in \mathbf{E} \ni b$, $a \neq b$ so, daß $f = \gamma_a$, $g = \gamma_b$. Laut 3.11 folgt hiervon $f = \gamma_a \not\equiv \gamma_b = g$, d. h. $(f, g) \notin \equiv \cap (\mathscr{M} \times \mathscr{M}) = \mathbf{R}$. Also $\varphi/\mathscr{L}$ ist ein schlichter Homomorphismus $\mathscr{L}$ in $\mathscr{M}/\mathbf{R}$, d. h. ein Isomorphismus.

3.13. Hauptsatz: $\mathbf{E}$ *sei ein Monoid und* $\mathbf{S} \subseteqq \mathbf{Z} \cap \mathbf{L}$ *sein Untermonoid. Dann existiert ein Monoid* $\mathbf{M}$ *und ein Isomorphismus* f: $\mathbf{E} \to \mathbf{M}(f(\mathbf{E}) = \mathbf{A} \subseteqq \mathbf{M})$ *so, daß zu jedem Elemente der Menge* $f(\mathbf{S})$ *in* $\mathbf{M}$ *sein inverses Element existiert.*

Beweis: Wir definieren $\mathbf{F}, \mathscr{S}, \mathscr{G}, \mathscr{F}, \mathbf{R}, \varphi$ auf dieselbe Weise wie im Korollar 3.12. Wir setzen weiter $\mathbf{M} = \mathscr{M}/\mathbf{R}$. Aus dem Korollar 3.12 folgt die Existenz des Isomorphismus $\varphi: \mathscr{L} \to \mathscr{M}/\mathbf{R}$. Laut Lemma 3.4 ist $\mathbf{F}$ ein Isomorphismus $\mathbf{E}$ auf $\mathscr{L}$. $\mathbf{F}$ ist also ein Isomorphismus $\mathbf{E}$ in $\mathbf{E}/\mathbf{R}$. Ist $a \in \mathbf{S}$, dann $\mathbf{F}(a) = \gamma_a \in \mathscr{S}$ und ist injektiv. Beliebige zwei Translationen aus $\mathscr{S}$ sind laut Bemerkung 3.3 vertauschbar. Aus Satz 2.21 nun folgt, daß $f(a) = \varphi(\mathbf{F}(a))$ für jedes $a \in \mathbf{S}$, das inverses Element in $\mathscr{M}/\mathbf{R}$ besitzt.

Kapitel IV.

Da es sich im Satze 4.5 um Eindeutigkeit bis auf einen Isomorphismus handelt, kann man anstelle eines Monoids $\mathbf{M}$ aus dem Satze 3.13 ein beliebiges Übermonoid $\mathbf{F} \supseteqq \mathbf{E}$ mit $\mathbf{M}$ isomorph betrachten. Für die Abbildung: $\mathbf{E} \to \mathbf{M}$ kann man seinerseits die identische Abbildung $\mathbf{E}$ auf $\mathbf{E}$ nehmen. Satz 3.13 sichert dann die Existenz inverser Elemente im Monoid $\mathbf{F}$ zu allen Elementen aus $(\mathbf{Z} \cap \mathbf{L}) \subseteqq \mathbf{E}$.

Bemerkung: Die Definitionen von $\mathbf{Z}$ und $\mathbf{L}$ beziehen sich immer auf das Monoid $\mathbf{E}$. Die Menge aller solcher Elemente aus $\mathbf{F}$, die invers zu einem der Elemente aus $(\mathbf{Z} \cap \mathbf{L}) \subseteqq \mathbf{E}$ sind, wollen wir durch $(\mathbf{Z} \cap \mathbf{L})^{-1}$ bezeichnen. Dann gelten folgende Lemmen und Sätze:

4.1. Lemma: *$\mathbf{E} \subseteqq \mathbf{F}$ seien Monoide, $\mathbf{Z} \cap \mathbf{L} \subseteqq \mathbf{E}$ und $\mathbf{F}$ möge die Eigenschaft haben, daß jedes Element $a \in \mathbf{Z} \cap \mathbf{L}$ inverses Element in $\mathbf{F}$ besitzt, d. h. $(\mathbf{Z} \cap \mathbf{L})^{-1} \subseteqq \mathbf{F}$. Dann sind folgende Aussagen richtig:*

1° *Für jedes $x \in \mathbf{E}$, $y^{-1} \in (\mathbf{Z} \cap \mathbf{L})^{-1}$ gilt $xy^{-1} = y^{-1}x$.*

2° *$\mathbf{E}(\mathbf{Z} \cap \mathbf{L})^{-1}$ ist ein Untermonoid in $\mathbf{F}$.*

Beweis: 1° Es seien $x \in \mathbf{E}$, $y^{-1} \in (\mathbf{Z} \cap \mathbf{L})^{-1}$; dann gilt $y \in (\mathbf{Z} \cap \mathbf{L})$ und aus $yx = xy$ folgt $yxy^{-1} = x$ und weiter $xy^{-1} = y^{-1}x$.

2° Es gilt offensichtlich $\mathbf{E}(\mathbf{Z} \cap \mathbf{L})^{-1} \subseteqq \mathbf{F}$. Es sei $x \in \mathbf{E}(\mathbf{Z} \cap \mathbf{L})^{-1} \ni y$. Dann gilt $x = x_1 y_1^{-1}$, $y = x_2 y_2^{-1}$, wo $x_1 \in \mathbf{E} \ni x_2$ und $y_1 \in (\mathbf{Z} \cap \mathbf{L}) \ni y_2$ ist. Wenn wir nun die bereits bewiesene Behauptung 1° anwenden, bekommen wir $xy = x_1 y_1^{-1} x_2 y_2^{-1} = x_1 x_2 y_1^{-1} y_2^{-1} = (x_1 x_2)(y_2 y_1)^{-1} \in \mathbf{E}(\mathbf{Z} \cap \mathbf{L})^{-1}$. Weiter gilt offensichtlich die Relation $e \in \mathbf{E}(\mathbf{Z} \cap \mathbf{L})^{-1}$.

4.2. Lemma: *$\mathbf{E}(\mathbf{Z} \cap \mathbf{L})^{-1}$ ist das kleinste, die Menge $\mathbf{E} \cup (\mathbf{Z} \cap \mathbf{L})^{-1}$ enthaltende Untermonoid in $\mathbf{F}$.*

Beweis: Da $e \in \mathbf{E} \cap (\mathbf{Z} \cap \mathbf{L})^{-1}$ gilt, haben wir für beliebige Elemente $x \in \mathbf{E}$, $y \in (\mathbf{Z} \cap \mathbf{L})^{-1}$ folgendes: $x = xe \in \mathbf{E}(\mathbf{Z} \cap \mathbf{L})^{-1}$, $y = ey \in \mathbf{E}(\mathbf{Z} \cap \mathbf{L})^{-1}$. Es ist also $\mathbf{E} \cup (\mathbf{Z} \cap \mathbf{L})^{-1} \subseteqq \mathbf{E}(\mathbf{Z} \cap \mathbf{L})^{-1}$. Der Durchschnitt aller Monoide, die $\mathbf{E}(\mathbf{Z} \cap \mathbf{L})^{-1}$ enthalten, ist wieder ein Monoid und es gibt also (vgl. [2], Rez. § 6, n° 5) ein solches kleinstes Monoid, das wir mit $\mathbf{M}^*$ bezeichnen wollen. $\mathbf{M}^*$ ist bestimmt ein Untermonoid von $\mathbf{E}(\mathbf{Z} \cap \mathbf{L})^{-1}$. Wenn x ein Element aus $\mathbf{E}(\mathbf{Z} \cap \mathbf{L})^{-1}$ ist, so haben wir $x = x_1 y_1$, wo $x_1 \in \mathbf{E}$, $y_1 \in (\mathbf{Z} \cap \mathbf{L})^{-1}$ ist und also $x_1 \in \mathbf{E} \cup (\mathbf{Z} \cap \mathbf{L})^{-1} \ni y_1$ und daraus auch $x_1 \in \mathbf{M}^* \ni y_1$. Da $\mathbf{M}^*$ ein Monoid ist, muß auch $x = x_1 y_1 \in \mathbf{M}^*$ sein und hiervon $\mathbf{E}(\mathbf{Z} \cap \mathbf{L})^{-1} \subseteqq \mathbf{M}^*$. Zusammen also $\mathbf{M}^* = \mathbf{E}(\mathbf{Z} \cap \mathbf{L})^{-1}$.

4.3. Lemma: *Es seien $x_1 \in \mathbf{E} \ni x_2$, y_1, $y_2 \in (\mathbf{Z} \cap \mathbf{L}) \subseteqq \mathbf{E}$. Zur Gleichheit zweier Elemente $x_1 y_1^{-1}$, $x_2 y_2^{-1}$ ist dann die Gültigkeit der Relation $x_1 y_2 = x_2 y_1$ genügend und hinreichend.*

Beweis: Wenn $x_1 y_1^{-1} = x_2 y_2^{-1}$ gilt, dann ist auch $(x_1 y_1^{-1})(y_1 y_2) = (x_2 y_2^{-1}) \cdot (y_1 y_2)$ und also $x_1 y_2 = x_2 y_1$.

Es gelte umgekehrt $x_1 y_2 = x_2 y_1$. Dann haben wir $(x_1 y_2)(y_2^{-1} y_1^{-1}) = (x_2 y_1)(y_2^{-1} y_1^{-1})$ und daraus $x_1(y_2 y_2^{-1}) y_1^{-1} = x_2(y_1 y_2^{-1}) y_1^{-1}$. Laut 1° aus 4.1 gilt auch $x_1 y_1^{-1} = x_2(y_2^{-1} y_1) y_1^{-1}$ und also $x_1 y_1^{-1} = (x_2 y_2^{-1})(y_1 y_1^{-1})$, voraus wir $x_1 y_1^{-1} = x_2 y_2^{-1}$ erhalten.

4.4. Satz: *$\mathbf{F}$, $\mathbf{M}$ seien Monoide, $\mathbf{E} \subseteqq \mathbf{F}$ ein Untermonoid. Zu allen Elementen der Menge $\mathbf{Z} \cap \mathbf{L} \subseteqq \mathbf{E}$ mögen in $\mathbf{F}$ inverse Elemente existieren. Weiter sei f ein Isomorphismus $\mathbf{E}$ in $\mathbf{M}$ und alle Elemente der Menge $f(\mathbf{Z} \cap \mathbf{L})$ mögen in $\mathbf{M}$ ihre inversen*

Elemente besitzen. Dann kann man f zu einem Isomorphismus $\mathbf{E}(\mathbf{Z} \cap \mathbf{L})^{-1}$ in $\mathbf{M}$ erweitern.

Beweis: Für jedes $\mathbf{L} \in (\mathbf{Z} \cap \mathbf{L})^{-1}$ setzen wir $f(t) = (f(t^{-1}))^{-1}$. Es sei $z \in \mathbf{E}(\mathbf{Z} \cap \mathbf{L})^{-1}$. Dann gilt $z = xy$, wo $x \in \mathbf{E}$, $y \in (\mathbf{Z} \cap \mathbf{L})^{-1}$. Wir setzen $f(z) = f(x)f(y)$.

Die Abbildung f: $\mathbf{E}(\mathbf{Z} \cap \mathbf{L})^{-1} \to \mathbf{M}$ ist in korrekter Weise definiert. Wirklich, es sei $xy = z = x_1y_1$ für jedes $x \in \mathbf{E} \ni x_1$, $y \in (\mathbf{Z} \cap \mathbf{L})^{-1} \ni y_1$. Aus 4.3 folgt, daß $xy_1^{-1} = x_1y^{-1}$ist. Hier sind y_1^{-1}, $y^{-1} \in \mathbf{Z} \cap \mathbf{L} \subseteqq \mathbf{E}$ und da f ein Isomorphismus $\mathbf{E}$ in $\mathbf{M}$ ist, haben wir $f(x)f(y_1^{-1}) = f(x_1)f(y^{-1})$. Es gilt nun $f(y) = (f(y^{-1}))^{-1}$, $f(y_1) = (f(y_1^{-1}))^{-1}$ und $f(xy) = f(x).\ (f(y^{-1}))^{-1}$, $f(x_1y_1) = f(x_1)\ ((f(y_1^{-1}))^{-1}$. Weiter haben wir $f(x), f(x_1) \in f(E), f(y^{-1}), f(y_1^{-1}) \in f(\mathbf{Z} \cap \mathbf{L})$. Aus der Gleichheit $f(x)f(y_1^{-1}) = f(x_1).f(y^{-1})$ folgt laut 4.3 $f(x)(f(y^{-1}))^{-1} = f(x_1)(f(y_1^{-1}))^{-1}$. Also $f(xy) = f(x_1y_1)$.

Die Abbildung f ist schlicht.

Es seien z, $z_1 \in \mathbf{E}(\mathbf{Z} \cap \mathbf{L})^{-1}, f(z) = f(z_1)$. Dann gibt es x, $x_1 \in \mathbf{E}$, y, $y_1 \in (\mathbf{Z} \cap \mathbf{L})^{-1}$ derart, daß $z = xy$, $z_1 = x_1y_1$ gilt. Dann ist auch $f(x)\,(f(y)^{-1}))^{-1} = f(x)\,.\,f(y) = f(z) = f(z_1) = f(x_1)f(y_1) = f(x_1)\,(f(y_1^{-1}))^{-1}$. Hiervon haben wir laut 4.3 $f(x)f(y_1^{-1}) = f(x_1)f(y^{-1})$ und also auch $f(xy_1^{-1}) = f(x_1y^{-1})$. Da f ein Isomorphismus $\mathbf{E}$ in $\mathbf{M}$ ist, folgt daraus $xy_1^{-1} = x_1y^{-1}$ und also laut 4.3 $xy = x_1y_1$, d. h. $z = z_1$.

Die Abbildung f ist ein Homomorphismus.

Es seien z, $z_1 \in \mathbf{E}(\mathbf{Z} \cap \mathbf{L})^{-1}$. Dann gibt es x, $x_1 \in \mathbf{E}$, y, $y_1 \in (\mathbf{Z} \cap \mathbf{L})^{-1}$ so, daß $z = xy$, $z_1 = x_1y_1$. Es ist also (siehe 1° aus 4.1) $zz_1 = xx_1yy_1$ und daraus $f(zz_1) = f(xx_1)\,(f(yy_1)^{-1}))^{-1}$. Nun also $f(zz_1) = f(x)f(x_1)\,(f(y^{-1}))^{-1}\,.\,(f(y_1^{-1}))^{-1} = f(x)\,(f(y_1^{-1}))^{-1}f(x_1)\,(f(y_1^{-1}))^{-1} = f(z)f(z_1)$ unter Benutzung von 4.3.

4.5. Hauptsatz: *$\mathbf{E}$ sei ein Monoid, $\mathbf{Z} \cap \mathbf{L} \subseteqq \mathbf{E}$ sein Untermonoid, $\mathbf{S} \subseteqq \mathbf{Z} \cap \mathbf{L}$. Dann existiert ein Monoid $\mathbf{M}^*$ und sein Untermonoid $\mathbf{A} \subseteqq \mathbf{M}^*$ derart, daß folgende Behauptungen richtig sind:*

1° *Es gibt einen Isomorphismus f: $\mathbf{E} \to \mathbf{M}^*$ so, daß $f(\mathbf{E}) = \mathbf{A}$ und jedes Element aus der Menge $f(\mathbf{S})$ in $\mathbf{M}^*$ sein inverses Element besitzt.*

2° *$\mathbf{M}^*$ ist das kleinste Monoid, das $\mathbf{A} \cup [f(\mathbf{Z} \cap \mathbf{L})]^{-1}$ enthält.*

3° *Die obenangeführten Bedingungen bestimmen das Monoid $\mathbf{M}^*$ eindeutig bis auf Isomorphismus.*

Beweis: Dieser Satz folgt unmittelbar aus Satz 3.13, aus Lemma 4.2 und aus Satz 4.4.

SHRNUTÍ

O JEDNOM VYUŽITÍ MĚŘITELNÝCH TRANSFORMACÍ V ALGEBŘE

FRANTIŠEK KRUTSKÝ

Je-li **E** monoid, **L** množina všech jeho prvků, jejichž levé translace jsou injektivní a **Z** jeho centrum, pak **E** lze vnořit do monoidu **F** tak, že všechny prvky v $\mathbf{L} \cap \mathbf{Z}$ mají v **F** prvky inversní. Toto je obsahem hlavní věty článku a sice věty 4.5. Tato věta je v práci dokazována za použití metod teorie míry a sice zejména použitím měřitelných transformací.

РЕЗЮМЕ

ОБ ОДНОМ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ИЗМЕРИМЫХ ТРАНСФОРМАЦИЙ В АЛГЕБРЕ

ФРАНТИШЕК КРУТСКИЙ

Если означает **E** моноид, **L** множество тех его элементов, для которых левая трансляция иньективная и **Z** его центр, тогда можно **E** вложить в моноид **F** так, что для всех элементов из $\mathbf{L} \cap \mathbf{Z}$ существуют в **F** обратные элементы.

Это является содержанием основной теоремы работы а именно теоремы 4.5. Эта теорема доказывается с использованием методов теории меры а именно при помощи использования измеримых трансформаций.