Sborník prací Přírodovědecké fakulty University Palackého v Olomouci. Matematika

František Machala

Über Automorphismen eines Annullatorenverbandes gewisser Teilringe im Endomorphismenring eines homogenen vollständig reduziblen Moduls

Sborník prací Přírodovědecké fakulty University Palackého v Olomouci. Matematika, Vol. 13 (1973), No. 1, 15--26

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/120021`

1973 — ACTA UNIVERSITATIS PALACKIANAE OLOMUCENSIS
FACULTAS RERUM NATURALIUM — TOM 41

Katedra algebry a geometrie přírodovědecké fakulty University Palackého v Olomouci
Vedoucí katedry: Doc. RNDr. Josef Šimek

ÜBER AUTOMORPHISMEN EINES ANNULLATORENVERBANDES GEWISSER TEILRINGE IM ENDOMORPHISMENRING EINES HOMOGENEN VOLLSTÄNDIG REDUZIBLEN MODULS

FRANTIŠEK MACHALA

(Eingegangen am 9. Juni 1972)

Unitärer Linksmodul M über einem Ring R mit Einselement wird ein vollständig reduzibler Modul genannt, wenn er direkte Summe der gegenseitig isomorphen einfachen Moduln ist. Wenn $M = \sum_{\nu \in J} \oplus N_\nu$ gilt, wo N_υ einfache Moduln sind, dann heißt die Mächtigkeit der Menge J die Dimension des Moduls M. Im folgenden wird stets unter M ein homogener vollständig reduzibler Modul verstanden. Zu jedem Untermodul U von M besteht ein komplementärer Modul V in M, d. h. $M = U \oplus V$. /Lit. [1]/

Bezeichnen wir mit Φ einen Endomorphismenring des Moduls M. Nach [4] ist der Verband $\overline{M}$ der Untermoduln aus M isomorph mit dem Verband Φ_L der Linkshaupt-Ideale von Φ und dual isomorph mit dem Verband Φ_P der Rechtshaupt-Ideale von Φ. $\Phi\varphi$, $\Phi\varrho$ seien von Elementen φ, ϱ generierte Linkshaupt-Ideale von Φ. Bezeichnet man mit $M\varphi$, $M\varrho$ die Bilder von M in den Endomorphismen φ, ϱ, dann ist $\Phi\varphi \leqq \Phi\varrho$ genau dann, wenn $M\varphi \leqq M\varrho$ ist. Analog gilt $\varphi\Phi \leqq \varrho\Phi$ genau dann, wenn Ker $(\varrho) \leqq$ Ker (φ) ist, wo Ker (φ), Ker (ϱ) die Kerne der Endomorphismen φ, ϱ sind.

Im folgenden sei stets vorausgesetzt, daß dim $M > 1$ ist. Wählen wir die Untermoduln A, B von M und bezeichnen wir mit $\Omega(A, B)$ die Menge der Endomorphismen $\omega \in \Phi$, für die $B\omega \leqq A$ gilt. Betrachten wir zunächst triviale Fälle: Ist $B = o$, so ist $B\omega = o\omega = o$ für jedes $\omega \in \Phi$ und man erhält $\Omega(A, B) = \Phi$. Ist $A = M$, so ist stets $B\omega \leqq A$ und es gilt wieder $\Omega(A, B) = \Phi$.

Satz 1. *Es seien $A \neq M$, $B \neq o$ die Untermoduln von M. Folgende Behauptungen sing äquivalent:*

a) $A \leqq B$

b) $\Omega(A, B)$ *ist ein Teinlring von* Φ.

Beweis: a $\Rightarrow$ b. Für belibeige ω_1, $\omega_2 \in \Omega(A, B)$ ist offenbar $B(\omega_1 - \omega_2) \leqq \leqq A$, $B\omega_1\omega_2 \leqq A$ und $\Omega(A, B)$ ist ein Teilring von Φ.

b $\Rightarrow$ a. Nehmen wir an, daß A nicht in B liegt. Es besteht sonach ein einfacher Untermodul $S \leqq A, S \cap B = o$. Da $B \neq o$ ist, existiert ein einfacher Untermodul $T \leqq B$. Wählen wir einen Untermodul $V \leqq M$ derart, daß $M = T \oplus V$ gilt. Jedes $m \in M$ läßt sich in der Form $m = t + v, t \in T, v \in V$ schreiben. Betrachten wir einen Isomorphismus ξ der Moduln T, S. Die durch die Vorschrift $m\omega_1 = t\xi$ bestimmte Abbildung ω_1 ist ein Endomorphismus von M. Es gilt $M\omega_1 = B\omega_1 = T\omega_1 = S$ und daher ist $\omega_1 \in \Omega(A, B)$. Da $A \neq M$ ist, existiert ein einfacher Untermodul W aus M derart, daß $W \cap A = o$. Wählen wir einen Untermodul $Z \leqq M$ derart, daß $M = S \oplus B \oplus Z$. Jedes $m \in M$ läßt sich in der Form $m = s + b + z$, $s \in S$, $b \in B$, $z \in Z$ schreiben. Es sei η ein Isomorphismus der Moduln S, W. Dann ist die Abbildung $\omega_2 : \mathrm{m}\, \omega_2 = s\eta$ ein Endomorphismus von M und $M\omega_2 = S\omega_2 = W$. Hierbei $\omega_2 \in \Omega(A, B)$, denn $B\omega_2 = o$. Ferner gilt $B\omega_1\omega_2 = S\omega_2 = W$. Da W nicht in A liegt, gehört $\omega_1\omega_2$ nicht in $\Omega(A, B)$. Das steht jedoch im Widerspruch zur Annahme, denn $\Omega(A, B)$ ist ein Ring.

Bemerkung. Im folgenden wird stets $A \leqq B$ vorausgesetzt. Ist $A = o$, dann $\omega \in \Omega(A, B)$ genau dann, wenn $B \leqq \mathrm{Ker}\,(\omega)$. Hieraus ergibt sich, daß $\Omega(A, B) = = \psi\Phi$, wo $\mathrm{Ker}\,(\psi) = B$. Ist $B = M$, dann $\omega \in \Omega(A, B)$ genau dann, wenn $M\omega \leqq A$. Dies bedeutet, daß $\Omega(A, B) = \Phi\varphi$, wo $M\varphi = A$.

Satz 2. *Es gebe ein Teilring* Φ' *von* Φ. *Folgende Behauptungen sind äquivalent:*

a) $\Phi' = \Omega(A, B)$.

b) *Es gilt* $\Phi' = \Phi\varphi + \psi\Phi$, *wo* $M\varphi = A$, $\mathrm{Ker}\,(\psi) = B$.

Beweis: a $\Rightarrow$ b. Wählen wir einen Endomorphismus $\varphi \in \Phi$ derart, daß $M\varphi = A$. Da $\varrho \in \Phi\varphi$ genau dann, wenn $M\varrho \leqq M\varphi$ ist, gilt $\Phi\varphi \subseteqq \Omega(A, B)$. Wählen wir weiter $\psi \in \Phi$ derart, daß $\mathrm{Ker}\,(\psi) = B$. Es ist offenbar $B\varrho = o$ für jedes $\varrho \in \psi\Phi$ und daher $\psi\Phi \subseteqq \Omega(A, B)$. Es gilt mithin $\Phi\varphi + \psi\Phi \subseteqq \Omega(A, B)$. Betrachten wir ferner ein beliebiges $\omega \in \Omega(A, B)$, also $B\omega \leqq A$. Wählen wir einen Untermodul $Q \leqq M$ derart, daß $M = B \oplus Q$. Jedes $m \in M$ läßt sich in der Form $m = b + q$, $b \in B$, $q \in Q$ schreiben. Betrachtet man einen durch die Vorschrift $m\gamma = b\omega$ bestimmten Endomorphismus $\gamma \in \Phi$, so $\gamma \in \Phi\varphi$. Ähnlich ein Endomorphismus $\xi : m\xi = q\omega$ liegt im $\psi\Phi$. Man erhält danach $m\omega = m(\gamma + \xi)$ für alle $m \in M$, also es gilt $\omega = \gamma + \xi$.

b $\Rightarrow$ a. Ist $\mathrm{Ker}\,(\psi) = o$ bzw. $M\varphi = M$, so $\psi\Phi = \Phi$ bzw. $\Phi\varphi = \Phi$ und $\Phi' = \Phi = = \Omega(M, M) = \Omega(o, o)$. Weiter sei vorausgesetzt, daß $B = \mathrm{Ker}\,(\psi) \neq o$, $A = M\varphi \neq \neq M$ gilt. Wählen wir zwei beliebige Elemente $\omega_1 = \alpha_1\varphi + \psi\beta_1$, $\omega_2 = \alpha_2\varphi + \psi\beta_2$ von Φ'. Danach $\omega_1\omega_2 \in \Phi'$. In bezug auf $\omega_1\omega_2 = \alpha_1\varphi\alpha_2\varphi + \psi\beta_1\alpha_2\varphi + \alpha_1\varphi\psi\beta_2 + + \psi\beta_1\psi\beta_2$ ergibt sich, daß $\alpha_1\varphi\psi\beta_2 \in \Phi'$ für beliebige $\alpha_1\beta_2 \in \Phi$ gilt.

Nehmen wir an, daß A nicht in B liegt, Dann existiert ein einfacher Modul $S \leqq A$, $S \cap B = o$. Da $B \neq o$ ist, können wir einen einfachen Untermodul T aus B wählen.

Leicht konstruieren wir den Endomorphismus $\alpha \in \Phi$ derart, daß $M\alpha = T\alpha = S$. Dann ist $\alpha = \alpha_1\varphi \in \Phi\varphi$. Da $A \neq M$ ist, existiert ein einfacher Untermodul W derart, daß $A \cap W = o$. Wegen der Gültigkeit von $S \cap B = o$, läßt sich $\beta \in \Phi$ derart konstruieren, daß $S\beta = W$ und $\beta = \psi\beta_2 \in \psi\Phi$. Es gilt $T\alpha\beta = W$. Für beliebige $\alpha' \in \Phi\varphi$, $\beta' \in \psi\Phi$ gilt $T(\alpha' + \beta') = T\alpha' \leqq A$ und aus dem Vorangehenden erhält man dann $T\alpha\beta = T\alpha_1\varphi\psi\beta_2 \neq T(\alpha' + \beta')$. Hiervon gelangt man zu $\alpha_1\varphi\psi\beta_2 \notin \Phi\varphi + \psi\Phi$ und hiermit zum Widerspruch. Folglich gilt $A \leqq B$. Dem ersten Teil des Beweises nach ist sodann $\Omega(A, B) = \Phi\varphi + \psi\Phi = \Phi'$.

Satz 3. *Es sei ein Ring $\Omega(A, B) = \Phi\varphi + \psi\Phi$ und ein Automorphismus σ' von Φ gegeben. Folgende Behauptungen sind äquivalent:*

a) $(\Omega(A, B))^{\sigma'} = \Omega(A, B)$.

b) $\Phi\varphi^{\sigma'} = \Phi\varphi$, $\psi^{\sigma'}\Phi = \psi\Phi$.

Beweis: a $\Rightarrow$ b. Folgende Beziehungen sind äquivalent: $M\varphi \leqq \operatorname{Ker}(\psi)$, $M\varphi\psi = o$, $\varphi\psi = o$, $(\varphi\psi)^{\sigma'} = o$, $\varphi^{\sigma'}\psi^{\sigma'} = o$, $M\varphi^{\sigma'}\psi^{\sigma'} = o$, $M\varphi^{\sigma'} \leqq \operatorname{Ker}(\psi^{\sigma'})$. Dann gilt $(\Omega(A, B))^{\sigma'} = \Phi\varphi^{\sigma'} + \psi^{\sigma'}\Phi = \Omega(M\varphi^{\sigma'}, \operatorname{Ker}(\psi^{\sigma'})) = \Omega(A, B) = \Omega(M\varphi, \operatorname{Ker}(\psi))$, woraus weiter $M\varphi^{\sigma'} = M\varphi$, $\operatorname{Ker}(\psi) = \operatorname{Ker}(\psi^{\sigma'})$ und $\Phi\varphi^{\sigma'} = \Phi\varphi$, $\psi^{\sigma'}\Phi = \psi\Phi$ folgt.

b $\Rightarrow$ a. Ist $\Phi\varphi^{\sigma'} = \Phi\varphi$, $\psi^{\sigma'}\Phi = \psi\Phi$, so gilt $(\Omega(A, B))^{\sigma'} = \Phi\varphi^{\sigma'} + \psi^{\sigma'}\Phi = \Phi\varphi + \psi\Phi = \Omega(A, B)$.

Bemerkung. Die im Satz 3 beschriebenen Automorphismen bilden eine Untergruppe $A(\Phi_\Omega)$ der Gruppe $A(\Phi)$ aller Automorphismen des Ringes Φ. Der Automorphismus $\sigma' \in A(\Phi)$ induziert den Automorphismus σ des Ringes $\Omega(A, B)$ durch die Vorschrift $\gamma^{\sigma'} = \gamma^{\sigma}$ für jedes $\gamma \in \Omega(A, B)$ genau dann, wenn $\sigma' \in A(\Phi_\Omega)$.

Verabredung. Es gebe Hauptideale $\Phi\varrho$, $\varrho\Phi$ des Ringes Φ. Setzen wir $\Omega(\varrho) = \Phi\varrho \cap \Omega(A, B)$, $\Omega[\varrho] = \varrho\Phi \cap \Omega(A, B)$.

Satz 4. *Es sei ein Ring $\Omega(A, B)$, $B \neq M$ und ein Linkshaupt-Ideal $\Phi\varrho$ des Ringes Φ, $\Phi\varrho \neq \Phi$, $\Phi\varrho \neq o$ gegeben. Folgende Behauptungen sind äquivalent:*

a) $A \leqq M\varrho \leqq B$.

b) *$\Omega(\varrho)$ ist ein zweiseitiges Ideal des Ringes $\Omega(A, B)$.*

Beweis: a $\Rightarrow$ b. $\Omega(\varrho)$ ist offensichtlich ein Linksideal des Ringes $\Omega(A, B)$. Wählen wir beliebige Elemente $\gamma \in \Omega(A, B)$, $\xi\varrho \in \Omega(\varrho)$. Dann $B\gamma \leqq A$, $M\xi\varrho \leqq B$, $B\xi\varrho \leqq M$ und daher $M\xi\varrho\gamma \leqq A$, also $M\xi\varrho\gamma \leqq M\varrho$. Das bedeutet, daß $\xi\varrho\gamma \in \Omega(\varrho)$ und $\Omega(\varrho)$ ist ein zweiseitiges Ideal des Ringes $\Omega(A, B)$.

b $\Rightarrow$ a. Sei angenommen, daß $M\varrho$ nicht in B liegt. Es besteht ein einfacher Modul $S \leqq M\varrho$, $S \cap B = o$. Wählen wir einen Untermodul $U \leqq M$ derart, daß $M = S \oplus B \oplus U$. Für jedes $a \in M$ gilt $a = s + b + u$, $s \in S$, $b \in B$, $u \in U$. Betrachten wir einen, durch die Vorschrift $a\xi = s$ bestimmten Endomorphismus $\xi \in \Phi$. Dann $B\xi = o$, $M\xi = S$, also $\xi \in \Omega(\varrho)$. Da $\Phi\varrho \neq \Phi$ ist, ist auch $M\varrho \neq M$ und es existiert ein einfacher Modul $T \leqq M$, $T \cap M\varrho = o$. Betrachten wir einen Isomorphismus γ' der Moduln S, T. Dann $\gamma : a\gamma = s\gamma'$ ist ein Endomorphismus des Moduls M derart, daß $B\gamma = o$ gilt. D. h. $\gamma \in \Omega(A, B)$ und $M\xi\gamma = S\gamma = T$. Da $M\xi\gamma$ nicht in $M\varrho$ liegt, gilt

$\xi\gamma \notin \Phi\varrho$ und $\xi\gamma \notin \Omega(\varrho)$. Folglich ist $\Omega(\varrho)$ kein zweiseitiges Ideal von $\Omega(A, B)$, was zum Widerspruch führt. Es gilt mithin $M\varrho \leqq B$.

Weiter nehmen wir an, daß A nicht in $M\varrho$ liegt, also es besteht ein einfacher Modul $S \leqq A$, $S \cap M\varrho = o$. Da $\Phi\varrho \neq o$ ist, ist auch $M\varrho \neq o$ und es besteht ein einfacher Modul $T \leqq M\varrho$. Nach der Voraussetzung unseres Satzes besteht weiter ein einfacher Untermodul W, für den $B \cap W = o$ gilt. Wählen wir einen Untermodul $U \leqq M$, für den $M = B \oplus W \oplus U$ gilt. Jedes $a \in M$ läßt sich in der Form $a = w + b + u$, $w \in W, b \in B, u \in U$ erklären. Bezeichnen wir mit ω' einen Isomorphismus der Moduln W, T und definieren wir den Endomorphismus ω von M durch die Vorschrift $a\omega = w\omega'$. Folglich $B\omega = o$, $M\omega = T$, und $\omega \in \Omega(\varrho)$. Entsprechend läßt sich auch ein Endomorphismus $\gamma \in \Phi$ derart konstruieren, daß $M\gamma = T\gamma = S$ gilt. Somit gilt $\gamma \in \Omega(A, B)$ und $M\omega\gamma = T\gamma = S$. Wegen $S \cap M\varrho = o$ ergibt sich $\omega\gamma \notin \Omega(\varrho)$. Mithin $\Omega(\varrho)$ ist kein zweiseitiges Ideal im Ring $\Omega(A, B)$, was ein Widerspruch ist. Es gilt somit $A \leqq M\varrho$.

Satz 5. *Es sei $\Omega(A, B)$, $A \neq o$ und ein Rechtshaupt-Ideal $\varrho\Phi$ des Ringes Φ, $\varrho\Phi \neq \Phi$, $\varrho\Phi \neq o$ gegeben. Folgende Behauptungen sind äquivalent:*

a) $A \leqq \mathrm{Ker}\,(\varrho) \leqq B$.

b) $\Omega[\varrho]$ *ist ein zweiseitiges Ideal des Ringes* $\Omega(A, B)$.

Beweis: a $\Rightarrow$ b. Wählen wir beliebige Elemente $\omega \in \Omega[\varrho]$, $\gamma \in \Omega(A, B)$. **Dann** gilt $\mathrm{Ker}\,(\varrho) \leqq \mathrm{Ker}\,(\omega)$, $(\mathrm{Ker}\,(\varrho))\,\gamma \leqq A$. Nun erhalten wir $(\mathrm{Ker}\,(\varrho))\ \gamma\omega = o$ und $\mathrm{Ker}\,(\varrho) \leqq \mathrm{Ker}\,(\gamma\omega)$, also $\gamma\omega \in \varrho\Phi$ und $\Omega[\varrho]$ ist ein zweiseitiges Ideal von $\Omega(A, B)$.

b $\Rightarrow$ a. Da $A \neq o$ ist, existiert ein einfacher Modul $S \leqq A$. Da $\varrho\Phi \neq o$ ist, gilt $\mathrm{Ker}\,(\varrho) \neq M$. Es besteht ein einfacher Modul $T \leqq M$, $\mathrm{Ker}\,(\varrho) \cap T = o$. Wählt man einen Untermodul $U \leqq M$ derart, daß $M = T \oplus \mathrm{Ker}\,(\varrho) \oplus U$, so läßt sich jedes $a \in M$ in der Form $a = t + k + u$ schreiben, wo $t \in T$, $k \in \mathrm{Ker}\,(\varrho)$, $u \in U$. Ist ξ ein Isomorphismus der Moduln T, S, so ist die durch die Vorschrift $a\omega = t\xi$ bestimmte Abbildung ein Endomorphismus von M und $M\omega = T\omega = S$ gilt. Offensichtlich ist $\omega \in \Omega(A, B)$, wobei $\mathrm{Ker}\,(\varrho) \leqq \mathrm{Ker}\,(\omega)$, also $\omega \in \Phi\varrho$ und man erhält $\omega \in \Omega[\varrho]$. Sei nun vorausgesetzt, daß $\mathrm{Ker}\,(\varrho)$ nicht in B liegt, d. h. es besteht ein einfacher Modul $W \leqq \mathrm{Ker}\,(\varrho)$, $W \cap B = o$. Betrachten wir einen Untermodul $V \leqq M$ derart, daß $M = W \oplus B \oplus V$, also $a = w + b + v$, $w \in W, b \in B, v \in V$ für jedes $a \in M$. Ist η ein Isomorphismus der Moduln W, T, so ist die durch die Vorschrift $a\gamma = w\eta$ bestimmte Abbildung γ ein Endomorphismus von M. Da $B\gamma = o$ ist, gilt $\gamma \in \Omega(A, B)$. Hierbei $W\gamma\omega = T\omega = S$, d. h. W liegt nicht in $\mathrm{Ker}\,(\gamma\omega)$ und damit auch $\mathrm{Ker}\,(\varrho)$ nicht in $\mathrm{Ker}\,(\gamma\omega)$, also $\gamma\omega \notin \Omega[\varrho]$. Dies steht im Widerspruch zur Voraussetzung und es gilt mithin $\mathrm{Ker}\,(\varrho) \leqq B$.

Sei nun angenommen, daß A nicht in $\mathrm{Ker}\,(\varrho)$ liegt, d. h. es besteht ein einfacher Modul $S \leqq A$, $S \cap \mathrm{Ker}\,(\varrho) = o$. Leicht konstruieren wir einen Endomorphismus $\omega \in \Phi$ derart, daß $M\omega = S\omega = S$, $\mathrm{Ker}\,(\varrho) \leqq \mathrm{Ker}\,(\omega)$ gilt. Hiernach $\omega \in \Phi[\varrho]$. Nach der Annahme $\varrho\Phi \neq \Phi$ ist $\mathrm{Ker}\,(\varrho) \neq o$ und es besteht ein einfacher Modul $T \leqq$

$\leqq \operatorname{Ker}(\varrho)$. Nun läßt sich ein $\gamma \in \Phi$ derart konstruieren, daß $M\gamma = T\gamma = S$gilt. Dann $\gamma \in \Omega(A, B)$ und $T\gamma\omega = S\omega = S$. Der Untermodul T liegt nicht in $\operatorname{Ker}(\gamma\omega)$ und $\gamma\omega \notin \Omega[\varrho]$, was zum Widerspruch führt. Es gilt mithin $M \leqq \operatorname{Ker}(\varrho)$.

Bemerkung. Die im Satz 4 und 5 angeführten Forderungen sind notwendig. Falls $B = M$ gilt $\Omega(A, B) = \Phi\varphi$, wo $M\varphi = A$ ist. Ist weiter $A \neq o, A \neq M$, so besteht ein Linkshaupt-Ideal $\Phi\varrho \neq o$ derart, daß $\Phi\varphi \cap \Phi\varrho = o$. Dann $\Omega(\varrho) = o$ und $\Omega(\varrho)$ ist ein zweiseitiges Ideal in $\Omega(A, B)$, obzwar $M\varrho$ den Modul A nicht enthält. Entsprechend läßt sich zeigen, daß der Satz 5 im Falle $A = o$ nicht gelten muß.

Satz 6. *Es sei $\mathcal{J}$ ein Linksideal im Ringe $\Omega(A, B)$, $A \neq o$. Folgende Behauptungen sind äquivalent:*

a) *$\mathcal{J}$ ist ein linker Annullator im Ringe $\Omega(A, B)$.*

b) *Es besteht ein Linkshaupt-Ideal $\Phi\varrho$ von Φ derart, wo $\mathcal{J} = \Omega(\varrho)$.*

Beweis: a $\Rightarrow$ b. Es sei $\mathcal{J}$ ein linker Annullator der Menge $\mathcal{U} \subseteqq \Omega(A, B)$. Betrachten wir eine Menge P aller $x \in M$ derart, wo $x\mathcal{U} = o$. Hiernacht ist P ein maximaler Untermodul aus M, wo $P\mathcal{U} = o$. Man kann $\varrho \in \Phi$ so wählen, daß $M\varrho = P$. Ist $\xi \in \Omega(\varrho)$, so ist $M\xi \leqq P$ und man erhält $(M\xi)\,\mathcal{U} = M(\xi\mathcal{U}) = o$. Daraus folgt $\xi\mathcal{U} = o$ und $\xi \in \mathcal{J}$, also $\Omega(\varrho) \leqq \mathcal{J}$. Sei nun umgekehrt $\alpha \in \mathcal{J}$ gegeben. Dann $\alpha\mathcal{U} = o$ und $M(\alpha\mathcal{U}) = (M\alpha)\,\mathcal{U} = o$. Daher gilt $M\alpha \leqq P$ und $\alpha \in \Phi\varrho$. Wir erhalten somit $\mathcal{J} = \Omega(\varrho)$.

b $\Rightarrow$ a. Es sei $\mathcal{J} = \Omega(\varrho)$. Betrachten wir ein Rechtshaupt-Ideal $\omega\Phi$ von Φ, wo $M\varrho = \operatorname{Ker}(\omega)$. Wir wollen zeigen, daß $\Omega(\varrho)$ der linke Annullator der Menge $\Omega[\omega]$ ist. Es gilt offenbar $\Omega(\varrho)\,\Omega[\omega] = o$. Wählen wir umgekehrt $\alpha \in \Omega(A, B)$ derart, daß $\alpha\Omega[\omega] = o$, wobei vorausgesetzt wird, daß $\alpha\omega \neq o$ ist. Dann besteht ein einfacher Untermodul $S \leqq M$, wo $T = S\alpha\omega$ einfach ist. Wählen wir die Untermoduln U, V aus M, wo $M\omega = T \oplus U$, $M = M\omega \oplus V = T \oplus U \oplus V$. Jedes $a \in M$ läßt sich in der Form $a = t + u + v, t \in T, u \in U, v \in V$ schreiben. Da $A \neq o$ ist, läßt sich ein einfacher Modul $W \leqq A$ wählen und man kann einen Isomorphismus η der Moduln T, W betrachten. Wird der Endomorphismus $\xi \in \Phi$ durch die Vorschrift $a\xi = t\eta$ definiert, so gilt $M\xi = M\omega\xi = T\xi = W$. Offenbar $\omega\xi \in \Omega[\omega]$ und $T\xi = S\alpha\omega\xi = W$ist. Hiernach ist $\alpha\omega\xi \neq o$ im Widerspruch zur Voraussetzung $\alpha\Omega[\omega] = o$. Es gilt somit $\alpha\omega = o$, also $M\alpha \leqq \operatorname{Ker}(\omega)$ und daraus ist dann $M\alpha \leqq M\varrho$ und $\alpha \in \Phi\varrho$.

Bemerkung. Wir wollen zeigen, daß die Voraussetzung $A \neq o$ notwendig war. Es sei $A = o$. Dann $\Omega(A, B) = \psi\Phi$, wo $B = \operatorname{Ker}(\psi)$ ist. Setzen wir zusätzlich voraus, daß $B \neq o$, $B \neq M$ gilt. Wählen wir ein Linkshaupt-Ideal $\Phi\varrho$ dergestalt, daß $\operatorname{Ker}(\psi) \oplus M\varrho = M$. Es gilt offenbar $\Omega(\varrho) \neq \Omega(A, B)$. Setzen wir weiter voraus, $\Omega(\varrho)$ ein linker Annullator der Menge $\mathcal{U} \subseteqq \Omega(A, B)$ ist, wobei $\alpha \in \mathcal{U}$. Dann gilt daß $\Omega(\varrho)\,\alpha = o$. Aus der Beziehung $\operatorname{Ker}(\psi) \leqq \operatorname{Ker}(\alpha)$, $M\varrho \leqq \operatorname{Ker}(\alpha)$ ergibt sich $\operatorname{Ker}(\psi) + M\varrho \leqq \operatorname{Ker}(\alpha)$, d. h. $\alpha = o$. Folglich gilt $\mathcal{U} = o$, was jedoch zum Widerspruch führt, da hier der ganze Ring $\Omega(A, B)$ als Annullator des Nullelements auftritt. $\Omega(\varrho)$ ist kein Annullator im Ringe $\Omega(A, B)$.

Satz 7. *Es sei $\mathscr{H}$ ein Rechtshaupt-Ideal im Ringe $\Omega(A, B)$, $B \neq M$. Folgende Behauptungen sind äquivalent:*

a) *$\mathscr{H}$ ist rechter Annullator im Ringe $\Omega(A, B)$.*

b) *Es besteht ein Rechtshaupt-Ideal $\varrho\Phi$ von Φ, wo $\mathscr{H} = \Omega[\varrho]$.*

Beweis: a $\Rightarrow$ b. $\mathscr{H}$ sei ein rechter Annullator der Menge $\mathscr{U} \subseteqq \Omega(A, B)$. Bezeichnen wir mit P den von der Menge $M\mathscr{U}$ generierten Untermodul aus M und betrachten wir ein Rechtshaupt-Ideal $\varrho\Phi$ derart, daß $\operatorname{Ker}(\varrho) = P$. Ist $\alpha \in \mathscr{H}$, so $M(\mathscr{U}\alpha) = (M\mathscr{U})\alpha = o$ und es gilt $M\mathscr{U} \subseteqq \operatorname{Ker}(\alpha)$, d. h. auch $P \leqq \operatorname{Ker}(\alpha)$. Daraus folgt $\alpha \in \Omega[\varrho]$. Sei dagegen $\alpha \in \Omega[\varrho]$ gegeben. Dann gilt $P \leqq \operatorname{Ker}(\alpha)$ und deswegen $P\alpha = o$. Daraus erhält man $(M\mathscr{U})\alpha = M(\mathscr{U}\alpha) = o$ und hiervon $\mathscr{U}\alpha = o$, $\alpha \in \mathscr{H}$. Es gilt mithin $\mathscr{H} = \Omega[\varrho]$.

b $\Rightarrow$ a. Betrachten wir ein Linkshaupt-Ideal $\Phi\omega$ von Φ dergestalt, daß $M\omega = \operatorname{Ker}(\varrho)$. Wir zeigen, daß $\Omega[\varrho]$ ein rechter Annullator der Menge $\Omega(\omega)$ ist. Offensichtlich gilt $\Omega(\omega)\,\Omega[\varrho] = o$. Bezeichnen wir mit $R = M\omega \cap A$ und wählen wir einen Untermodul U dergestalt, daß $M = \operatorname{Ker}(\omega) \oplus U$. Folglich ist $M\omega = U\omega$. Wählen wir weiter in U einen Untermodul V derart, daß $V\omega = R$ und setzen wir $Q = \operatorname{Ker}(\omega) \oplus V$. Dann gilt $\xi\omega \in \Omega(A, B)$ genau dann, wenn $B\xi \leqq Q$ ist. Bezeichnen wir mit $\mathscr{U}$ eine Menge aller $\xi \in \Phi$, für die $\xi\gamma \in \Omega(A, B)$ gilt. Da $B \neq M$ ist, gilt $M\mathscr{U} = M$. Ferner sei $\alpha \in \Omega(A, B)$, wo $\Omega(\omega)\,\alpha = o$. Hiernach gilt $\Omega(\omega)\,\alpha = \mathscr{U}\omega\alpha = o$, $M(\mathscr{U}\omega\alpha) = o$, $(M\mathscr{U})\,\omega\alpha = o$, $\omega\alpha = o$, weshalb $M\omega \leqq \operatorname{Ker}(\alpha)$. Daraus erhalten wir $\operatorname{Ker}(\varrho) \leqq \operatorname{Ker}(\alpha)$ und $\alpha \in \Omega[\varrho]$. $\Omega[\varrho]$ ist ein rechter Annullator der Menge $\Omega(\omega)$.

Bemerkung 1. Wir werden nun zeigen, daß die im Satz 7 angeführte Bedingung notwendig ist. Es sei $B = M$. Dann gilt $\Omega(A, B) = \Phi\varphi$, wo $M\varphi = A$ ist. Nehmen wir zusätzlich an, daß $A \neq o$, $A \neq M$ gilt. Wählen wir ein Rechtshaupt-Ideal $\varphi\Phi$, wo $M\varphi \oplus \operatorname{Ker}(\varrho) = M$ ist. Offenbar ist $\Omega[\varrho] \neq \Omega(A, B)$. Sei nun $\Omega[\varrho]$ ein Annullator der Menge $\mathscr{U}$. Falls $\alpha \in \mathscr{U}$, so $\alpha\Omega[\varrho] = o$ ist, woraus $M\alpha \leqq M\varphi \cap \operatorname{Ker}(\varrho)$ gilt und mithin $\alpha = o$ folgt. Hiermit gelangen wir zum $\mathscr{U} = o$, also zum Widerspruch, da hier als Annullator des Nullelements der ganze Ring $\Omega(A, B)$ auftritt. $\Omega[\varrho]$ ist kein Annullator.

Bemerkung 2. Mit Hilfe von Sätzen 6 und 7 läßt sich die Gültigkeit der folgenden Behauptung ableiten: Das Linkshaupt-Ideal $\Phi\varrho$ ist ein linker Annullator des Rechtshaupt Ideals $\gamma\Phi$ im Ringe Φ genau dann, wenn das Linksideal $\Omega(\varrho)$ von $\Omega(A, B)$, wo $A \neq o$, $B \neq M$, ein linker Annullator des Rechtsideales $\Omega[\gamma]$ ist.

Im weiteren werden ausschließlich Ringe $\Omega(A, B)$ untersucht, in welchen $A \neq o$, $B \neq M$ ist. Linke bzw. rechte Annullatoren im Ringe $\Omega(A, B)$ sind in bezug auf die Inklusion teilweise geordnet. Werden auf einer solchen teilweise geordneten Menge die Operationen $\cap$, $\cup$ in üblicher Weise eingeführt, so erhalten wir einen Verband, den wir mit Ω_L bzw. Ω_P bezeichnen.

Satz 8. *Die Verbände Ω_L, Φ_L sind isomorph.*

Beweis: Die Abbildung f': $\Phi\varrho \to \Omega(\varrho)$ ist gemäß Satz 6 eine Abbildung auf Verband Ω_L. Es sei $\Phi\varrho \neq \Phi\omega$. Dann ist auch $M\varrho \neq M\omega$. Die Bezeichnung kann so gewählt werden, daß der Modul $M\varrho$ nicht im $M\omega$ liegt. Wird nun $P = M\varrho \cap M\omega$ gesetzt und ein Untermodul $Q \leqq M$ gewählt, wo $M\varrho = P \oplus Q$ gilt, so ist $Q \neq o$. Nehmen wir zuerst an, daß $Q \leqq A$ und wählen wir $\xi \in \Phi$, wo $M\xi = Q$ ist. Da $\xi \in \Omega(\varrho)$, $\xi \notin \Omega(\omega)$ gilt, ist $\Omega(\varrho) \neq \Omega(\omega)$. Liege Q nicht in A. Dann existiert ein einfacher Modul S derart, daß $S \leqq Q$, $S \cap A = o$ gilt. Da $B \neq M$ ist, existiert $\gamma \in \Phi$ derart, daß $M\gamma = S$, $B \leqq \text{Ker}(\gamma)$. Nun erhalten wir $\gamma \in \Omega(\varrho)$, $\gamma \notin \Omega(\omega)$, weshalb erneut $\Omega(\varrho) \neq \Omega(\omega)$ gilt. Die Abbildung f' ist bijektiv. Aus der Beziehung $\Phi\varrho \leqq \Phi\gamma$ ergibt sich $\Omega(\varrho) \leqq \Omega(\gamma)$. Für beliebige $\Phi\varrho$, $\Phi\gamma \in \Phi_L$ gilt dann $(\Phi\varrho \cap \Phi\gamma)^{f'} = \Omega(\varrho) \cap \cap \Omega(\gamma)$, $(\Phi\varrho + \Phi\gamma)^{f'} = \Omega(\varrho) \cup \Omega(\gamma)$.

Satz 9. *Die Verbände Ω_P, Φ_P sind isomorph.*

Beweis: Die Abbildung g': $\varrho\Phi \to \Omega[\varrho]$ ist nach Satz 7 eine Abbildung auf Verband Ω_P. Es sei $\varrho\Phi \neq \gamma\Phi$. Dann ist auch $\text{Ker}(\varrho) \neq \text{Ker}(\gamma)$. Die Beziehung sei so gewählt, daß der Untermodul $\text{Ker}(\gamma)$ nicht in $\text{Ker}(\varrho)$ liegt. Hiernach existiert ein einfacher Modul S, wo $S \leqq \text{Ker}(\gamma)$, $S \cap \text{Ker}(\varrho) = o$. Wählen wir einen Untermodul P, wo $M = S \oplus \text{Ker}(\varrho) \oplus P$ ist. Der Untermodul $K = \text{Ker}(\varrho) \oplus P$ enthält offenbar $\text{Ker}(\gamma)$. Da $A \neq o$ ist, kann man einen einfachen Modul $T \leqq A$ wählen. Dann existiert ein Endomorphismus $\xi \in \Phi$, wobei $M\xi = T$, $\text{Ker}(\xi) = K$ ist. Es gilt offenbar $\xi \in \Omega[\varrho]$, $\xi \notin \Omega[\gamma]$ und es ist mithin $\Omega[\varrho] \neq \Omega[\gamma]$. Die Abbildung g' ist bijektiv. Aus der Beziehung $\varrho\Phi \leqq \gamma\Phi$ ergibt sich $\Omega[\varrho] \leqq \Omega[\gamma]$. Für beliebige $\varrho\Phi$, $\gamma\Phi \in \Phi_P$ gilt dann $(\varrho\Phi \cap \gamma\Phi)^{g'} = \Omega[\varrho] \cap \Omega[\gamma]$, $(\varrho\Phi + \gamma\Phi)^{g'} = \Omega[\varrho] \cup \Omega[\gamma]$.

Bemerkung. Da die Verbände Φ_L, $\overline{M}$ isomorph sind, sind solche nach Satz 8 auch die Verbände Ω_L, $\overline{M}$. Ähnlich sind die Verbände Ω_P, $\overline{M}$ wegen Satz 9 dual isomorph.

Der Element x des Moduls M wird frei genannt, wenn aus der Beziehung $rx = o$, $r \in R$ stets $r = o$ folgt. Der Modul M wird zuläßig genannt, wenn folgende zwei Forderungen erfüllt sind: 1. Sind Elemente $x, y, z \in M$ gegeben, dann existiert stets ein freies Element $\omega \in M$, für welches $(Rx + Ry + Rz) \cap Rw = o$ gilt. 2. Es gebe ein beliebiges Element $t \in M$ und freie Elemente $x, y, u \in M$ und es gelte $Rx \cap Ry \neq o$, $Ru \cap Rt \neq o$. Hiernach besteht ein freies Element $w \in M$ derart, daß $Rw \cap Rt = Rw \cap Ry = Rw \cap Rx = o$ gilt.

L. A. Skornjakov hat in [3] einen Satz über projektive Abbildung zulässiger Moduln bewiesen. In [2] wurde dieser Satz zum Beweis folgender Behauptung angewandt: Es gebe einen zulässigen homogenen vollständig reduziblen Modul.[1])

---

[1]) In der Formulation des diesbezüglichen Satzes über zulässige R-Moduln in [3] wird eine gewisse Forderung auf den Ring R gestellt. Es läßt sich zeigen, daß der Satz auch ohne diese Einschränkung in Geltung bleibt.

Jeder Automorphismus des Verbandes $\Phi_L(\Phi_P)$ der Linkshaupt-(Rechtshaupt)-Ideale im Endomorphismenring Φ von M ist vermöge Automorphismus von Φ induziert. Die Automorphismengruppen $P(\Phi_L)$, $P(\Phi_P)$ von Φ_L, Φ_P sind isomorph mit der Automorphismengruppe $A(\Phi)$ von Φ.

Im weiteren wird stets unter M ein zulässiger Modul verstanden. Nach den Sätzen 8 und 9 sind nun die Automorphismengruppen $P(\Omega_L)$, $P(\Omega_P)$ von Ω_L, Ω_P mit der Gruppe $A(\Phi)$ isomorph. Beschreiben wir näher einen Isomorphismus der Gruppen $P(\Omega_L)$, $A(\Phi)$: Wählen wir hierzu einen beliebigen Automorphismus $\bar{\sigma}$ von Ω_L und definieren wir die Abbildung $\bar{\sigma}'$ durch die Vorschrift: $(\mathcal{J}^f)^{\bar{\sigma}'} = (\mathcal{J}^{\bar{\sigma}})^f$ für $\mathcal{J} \in \Omega_L$, $f = f'^{-1}$, wo f' im Beweis zum Satz 8 beschrieben ist. Dann ist $\bar{\sigma}'$ ein Automorphismus von Φ_L. Nach Satz 1 aus [2] ist $\bar{\sigma}'$ vermöge Automorphismus σ' von Φ induziert. Die durch die Vorschrift: $h_1(\bar{\sigma}) = \sigma'$ definierte Abbildung h_1 ist dann ein Isomorphismus der Gruppen $P(\Omega_L)$, $A(\Phi)$.

Ganz entsprechend wählen wir eine beliebige Abbildung $\bar{\eta} \in P(\Omega_P)$ und definiereren wir die Abbildung $\bar{\eta}'$ durch die Vorschrift: $(\mathcal{H}^g)^{\bar{\eta}'} = (\mathcal{H}^{\bar{\eta}})^g$ für $\mathcal{H} \in \Omega_P$, $g = g'^{-1}$, wobei g' im Beweis von Satz 9 beschrieben ist. $\bar{\eta}'$ ist ein Automorphismus von Φ_P, der nach Satz 2 aus [2] durch einen einzigen Automorphismus η' von Φ induziert ist. Die durch die Vorschrift: $h_2(\bar{\eta}) = \eta'$ definierte Abbildung h_2 ist ein Isomorphismus der Gruppen $P(\Omega_P)$, $A(\Phi)$.

Satz 10. *Es sei $\bar{\sigma} \in P(\Omega_L)$ und $\sigma' = h_1(\bar{\sigma})$. Dann $(\Omega(\varrho))^{\bar{\sigma}} = \Omega(\varrho^{\sigma'})$ für jedes $\Omega(\varrho) \in \in \Omega_L$. Ferner sei $\eta' \in P(\Omega_P)$ und $\eta' \in h_2(\bar{\eta})$. Hiernach gilt $(\Omega[\varrho])^{\bar{\eta}} = \Omega[\varrho^{\eta'}]$ für jedes $\Omega[\varrho] \in \Omega_P$.*

Beweis: Aus den Definitionen der Abbildungen f, $\bar{\sigma}'$, σ' erhalten wir für beliebiges $\Omega(\varrho) \in \Omega_L$: $\left((\Omega(\varrho))^f\right)^{\sigma'} = (\Phi\varrho)^{\bar{\sigma}'} = (\Phi\varrho)^{\sigma'} = \Phi\varrho^{\sigma'} = \left((\Omega(\varrho))^{\bar{\sigma}}\right)^f$. Wegen $\left(\Omega(\varrho)\right)^{\bar{\sigma}} \in \Omega_L$ kann man nach Satz 6 setzen $\left(\Omega(\varrho)\right)^{\bar{\sigma}} = \Omega(\xi)$. Hiernach erhält man $\left((\Omega(\varrho))^{\bar{\sigma}}\right)^f = \left(\Omega(\xi)\right)^f = \Phi\xi = \Phi\varrho^{\sigma'}$. Es gilt darum auch $\Omega(\xi) = \Omega(\varrho^{\sigma'})$ und $\left(\Omega(\varrho)\right)^{\bar{\sigma}} = \Omega(\varrho^{\sigma'})$. Ganz entsprechend beweisen wir die Gültigkeit der Beziehung $(\Omega[\varrho])^{\bar{\eta}} = \Omega[\varrho^{\eta'}]$.

Satz 11. *Es seien $\bar{\sigma} \in P(\Omega_L)$, $\bar{\eta} \in P(\Omega_P)$ gegeben und sei $h_1(\bar{\sigma}) = \sigma'$, $h_2(\bar{\eta}) = \eta'$. Folgende Behauptungen sind äquivalent:*

a) $\sigma' = \eta'$

b) *Ist $\Omega(\varrho) \in \Omega_L$ ein linker Annullator der Menge $\Omega[\gamma]$, so ist $\left(\Omega(\varrho)\right)^{\bar{\sigma}}$ ein linker Annullator der Menge $(\Omega[\gamma])^{\bar{\eta}}$.*

Beweis: a $\Rightarrow$ b. Es sei $\Omega(\varrho)$ ein linker Annullator der Menge $\Omega[\gamma]$. Nach der Bemerkung 2 zum Satz 7 ist $\Phi\varrho$ ein linker Annullator der Menge $\gamma\Phi$. Offenbar ist $(\Phi\varrho)^{\sigma'} = \Phi\varrho^{\sigma'}$ ein linker Annullator der Menge $(\gamma\Phi)^{\sigma'} = \gamma^{\sigma'}\Phi = \gamma^{\eta'}\Phi$. Dann ist auch $\Omega(\varrho^{\sigma'})$ ein linker Annullator der Menge $\Omega[\gamma^{\eta'}]$. Nach Satz 10 ist dann $(\Omega(\varrho))^{\bar{\sigma}}$ ein linker Annullator der Menge $(\Omega[\gamma])^{\bar{\eta}}$.

b $\Rightarrow$ a. $\Omega(\varrho)$ sei ein linker Annullator der Menge $\Omega[\gamma]$. Nach der Voraussetzung ist $(\Omega(\varrho))^{\bar{\sigma}}$ ein linker Annullator der Menge $(\Omega[\gamma])^{\bar{\eta}}$. Nach Satz 10 ist dann $\Omega(\varrho^{\sigma'})$ ein linker Annullator der Menge $\Omega[\gamma^{\eta'}]$. Nach der Bemerkung 2 zum Satz 7 ist $\Phi\varrho$ ein linker Annullator der Menge $\gamma\Phi$ und auch $\Phi\varrho^{\sigma'}$ ist ein linker Annullator von $\gamma^{\eta'}\Phi$, also $M\varrho^{\sigma'} = \text{Ker}(\gamma^{\eta'})$. Zugleich aber ist $\Phi\varrho^{\sigma'}$ ein linker Annulator von $\gamma^{\sigma'}\Phi$. Es gilt mithin auch $M\varrho^{\sigma'} = \text{Ker}(\gamma^{\sigma'})$ und $\text{Ker}(\gamma^{\sigma'}) = \text{Ker}(\gamma^{\eta'})$. Folglich ist $\gamma^{\sigma'}\Phi = \gamma^{\eta'}\Phi$, $(\gamma\Phi)^{\sigma'} = (\gamma\Phi)^{\eta'}$ und $(\gamma\Phi)^{\sigma'\eta'^{-1}} = \gamma\Phi$. Zu jedem $\gamma\Phi$ besteht ein $\Phi\varrho$ derart, daß $\Omega(\varrho)$ ein linker Annullator der Menge $\Omega[\gamma]$ ist. Die vorangehende Beziehung gilt somit für beliebiges $\gamma \in \Phi$. Nach Lemmas 3 und 4 aus [2] ist $\sigma'\eta'^{-1}$ eine identische Abbildung des Ringes Φ und es gilt demnach $\sigma' = \eta'$.

Satz 12. *Jeder Automorphismus σ des Ringes $\Omega(A, B)$ induziert die Autmorphismen $\bar{\sigma}$, $\bar{\eta}$ der Verbände Ω_L, Ω_P durch die Vorschriften $\mathscr{J}^{\bar{\sigma}} = \mathscr{J}^{\sigma}$, $\mathscr{H}^{\bar{\eta}} = \mathscr{H}^{\eta}$ für alle $\mathscr{J} \in \Omega_L$, $\mathscr{H} \in \Omega_P$.*

Beweis: Ist $\mathscr{J} \in \Omega_L$, so ist $\mathscr{J}$ ein linker Annullator einer gewisser Menge $\mathscr{U} \subseteq \Omega(A, B)$, also ist $\mathscr{J}\mathscr{U} = o$ und auch $\mathscr{J}^{\sigma}\mathscr{U}^{\sigma} = o$. Es sei $\gamma\mathscr{U}^{\sigma} = o$. Es besteht ein $\omega \in \Omega(A, B)$ derart, dass $\gamma = \omega^{\sigma}$. Dann gilt $\omega^{\sigma}\,\mathscr{U}^{\sigma} = (\omega\mathscr{U})^{\sigma} = o$, woraus sich $\omega\mathscr{U} = o$ ergibt, also $\omega \in \mathscr{J}$ und $\gamma \in \mathscr{J}^{\sigma}$. $\mathscr{J}^{\sigma}$ ist ein linker Annullator der Menge $\mathscr{U}^{\sigma}$ und demnach $\mathscr{J}^{\sigma} \in \Omega_L$. Folglich gilt $\Omega_L^{\sigma} \subseteq \Omega_L$. Da σ ein Automorphismus ist, gilt $\Omega_L^{\sigma} = \Omega_L$. Die durch die Vorschrift $\mathscr{J}^{\bar{\sigma}} = \mathscr{J}^{\sigma}$ definierte Abbildung $\bar{\sigma}$ ist die bijektive Abbildung der Menge Ω_L. Wenn $\mathscr{J}_1 \leqq \mathscr{J}_2$ ist, dann ist offenbar auch $\mathscr{J}_1^{\sigma} \leqq \mathscr{J}_2^{\sigma}$ und $\mathscr{J}_1^{\bar{\sigma}} \leqq \mathscr{J}_2^{\bar{\sigma}}$. Die Abbildung $\bar{\sigma}$ ist Automorphismus des Verbands Ω_L. Analog schließt man für den Verband Ω_P.

Satz 13. *Gegeben sei ein zulässiger homogener vollständig reduzibler Modul M und ein Teilring $\Omega(A, B)$, $A \neq o$, $B \neq M$ im Endomorphismenring Φ des Moduls M. $\bar{\sigma}$ sei ein Automorphismus des Verbandes Ω_L der linken Annullatoren von $\Omega(A, B)$ und $h_1(\bar{\sigma}) = \sigma'$. Folgende Behauptungen sind äquivalent:*

a) *Der Automorphismus $\bar{\sigma}$ ist induziert durch den Automorphismus σ des Ringes $\Omega(A, B)$.*

b) *Der Automorphismus σ' des Ringes Φ induziert den Automorphismus σ des Ringes $\Omega(A, B)$.*

Beweis: a $\Rightarrow$ b. Es sei σ ein Automorphismus des Ringes $\Omega(A, B)$. Nach Satz 2 läßt sich schreiben $\Omega(A, B) = \Phi\varphi + \psi\Phi$, wo $M\varphi = A$, $\text{Ker}(\psi) = B$. Dann gilt $\Phi\varphi = \Omega(\varphi)$ und nach Satz 6 $\Phi\varphi \in \Omega_L$. Nach Satz 12 erhält man hiernach $(\Phi\varphi)^{\sigma} \in \Omega_L$ und nach Satz 6 besteht ein Linkshaupt-Ideal $\Phi\varrho \in \Omega_L$ derart, wo

$$(\Phi\varphi)^{\sigma} = \Omega(\varrho). \tag{1}$$

Nach Satz 4 ist $\Phi\varphi$ ein zweiseitiges Ideal im Ringe $\Omega(A, B)$, dessen Bild $(\Phi\varphi)^{\sigma}$ im Automorphismus σ erneut ein zweiseitiges Ideal ist. Nach Satz 4 und nach (1) ist hiernach $M\varphi \leqq M\varrho$, also $\Phi\varphi \leqq \Phi\varrho$. Nach dem Beweis zum Satz 8 gilt $\Omega(\varphi) \leqq \Omega(\varrho)$ und nach (1) sodann $\Phi\varphi \leqq (\Phi\varphi)^{\sigma}$. Aus den Eingeschaften des Verbandes Φ_L egibt sich die Existenz von $\Phi\xi \in \Phi_L$ derart, wo $\Phi\varrho = \Phi\varphi \oplus \Phi\xi$. Nach Satz 8 ist dann $\Omega(\varrho) = \Omega(\varphi) \cup \Omega(\xi)$, $\Omega(\varphi) \cap \Omega(\xi) = o$, das heißt $(\Phi\varphi)^{\sigma} = \Phi\varphi \cup \Omega(\xi)$ gilt. Betrachtet man einen Automorphismus σ^{-1}, so erhält man nach Satz 12 $(\Phi\varphi)^{\sigma\sigma^{-1}} = \Phi\varphi = (\Phi\varphi)^{\sigma^{-1}} \cup \left(\Omega(\xi)\right)^{\sigma^{-1}}$. Nach dem Vorhergehenden gilt auch $\Phi\varphi \leqq (\Phi\varphi)^{\sigma^{-1}}$ und es existiert ein $\Omega(\omega) \in \Omega_L$ derart, wo $(\Phi\varphi)^{\sigma^{-1}} = \Phi\varphi \cup \Omega(\omega)$ ist. Weiter erhalten wir $\Phi\varphi = \Phi\varphi \cup \Omega(\omega) \cup \left(\Omega(\xi)\right)^{\sigma^{-1}}$, woraus $\Omega(\xi) = o$ sich ergibt. Es gilt somit $\Phi\varphi^{\sigma} = \Phi\varphi$. Vermittels der Sätze 12, 7, 5 und 9 läßt sich die Gültigkeit der Beziehung $(\psi\Phi)^{\sigma} = \psi\Phi$ ähnlich beweisen. Der Automorphismus σ des Ringes $\Omega(A, B)$ induziert den Automorphismus $\bar{\sigma}$ des Verbandes Ω_L und nach Voraussetzung ist $\sigma' = h_1(\bar{\sigma})$. Hiervon erhält man $\left((\Omega(\varphi))^{f}\right)^{\sigma'} = (\Phi\varphi)^{\bar{\sigma}'} = \Phi\varphi^{\sigma'} = \left((\Phi\varphi)^{\bar{\sigma}}\right)^{f} = \left((\Phi\varphi)^{\sigma}\right)^{f} = (\Phi\varphi)^{f} = \Phi\varphi$, also

$$\Phi\varphi^{\sigma'} = \Phi\varphi. \tag{2}$$

Der Automorphismus σ des Ringes $\Omega(A, B)$ induziert auch den Automorphismus $\bar{\eta}$ des Verbandes Ω_P. Nach Satz 11 gilt $h_1(\bar{\sigma}) = h_2(\bar{\eta}) = \sigma'$ und man erhält $\left((\Omega[\psi])^{g}\right)^{\bar{\eta}} = (\psi\Phi)^{\bar{\eta}'} = (\psi\Phi)^{\sigma'} = \psi^{\sigma'}\Phi = \left((\psi\Phi)^{\bar{\eta}}\right)^{g} = \left((\psi\Phi)^{\sigma}\right)^{g} = (\psi\Phi)^{g} = \psi\Phi$. Es gilt mithin

$$\psi^{\sigma'}\Phi = \psi\Phi. \tag{3}$$

Nach (2), (3) und nach Satz 3 induziert σ' den Automorphismus σ, also $\sigma' \in A(\Phi_\Omega)$.

b $\Rightarrow$ a. Es induziere der Automorphismus $\sigma' = h(\bar{\sigma})$ den Automorphismus σ des Ringes $\Omega(A, B)$. Für beliebiges $\Omega(\varrho) \in \Omega_L$ gilt dann $\left(\Omega(\varrho)\right)^{\sigma} = \left(\Omega(\varrho)\right)^{\sigma'} = (\Phi\varrho \cap \Omega(A, B))^{\sigma'} = \Phi\varrho^{\sigma'} \cap \left(\Omega(A, B)\right)^{\sigma'} = \Phi\varrho^{\sigma'} \cap \Omega(A, B) = \Omega(\varrho^{\sigma'})$. Nach Satz 10 ist sodann $\left(\Omega(\varrho)\right)^{\bar{\sigma}} = \left(\Omega(\varrho)\right)^{\sigma}$. Der Automorphismus σ induziert den Automorphismus $\bar{\sigma}$ des Verbandes Ω_L.

Satz 14. *Gegeben sei ein zulässiger homogener vollständig reduzibler Modul M und ein Teilring $\Omega(A, B)$, $A \neq o$, $B \neq M$ des Endomorphismenringes vom Modul M. $\bar{\mu}$ sei ein Automorphismus des Verbandes Ω_P rechter Annullatoren im Ringe $\Omega(A, B)$* und *$h_2(\mu) = \mu'$. Folgende Behauptungen sind äquivalent:*

a) *Der Automorphismus $\bar{\mu}$ ist induziert durch den Automorphismus μ des Ringes $\Omega(A, B)$.*

b) *Der Automorphismus μ' des Ringes Φ induziert den Automorphismus μ des Ringes $\Omega(A, B)$.*

Der Beweis verläuft ähnlich dem zum Satz 13.

Folgerung 1. *Bezeichnen wir mit $h_1^{-1}[A(\Phi_\Omega)] = P'(\Omega_L)$, $h_2^{-1}[A(\Phi_\Omega)] = P'(\Omega_P)$. Hierbei sind $P'(\Omega_L)$, $P'(\Omega_P)$ die Untergruppen der Gruppen $P(\Omega_L)$, $P(\Omega_P)$, die nach Sätzen* 13 *und* 14 *genau von den Automorphismen des Ringes $\Omega(A, B)$ induziert sind. Die Gruppen $A(\Phi_\Omega)$, $P'(\Omega_L)$, $P'(\Omega_P)$ sind isomorph.*

Folgerung 2. *Es induziere $\sigma' \in A(\Phi_\Omega)$ den Automorphismus σ des Ringes $\Omega(A, B)$. Nach Sätzen* 13 *und* 14 *ist die Abbildung $\sigma' \to \sigma$ ein Homomorphismus der Gruppe $A(\Phi_\Omega)$ auf die Gruppe $A(\Omega)$ der Automorphismen des Ringes $\Omega(A, B)$. Es sei $\sigma' \to \sigma$, $\mu' \to \sigma$. Setzen wir $\sigma' = h_1(\bar{\sigma})$, $\mu' = h_1(\bar{\mu})$. Nach Satz* 13 *sind die Automorphismen $\bar{\sigma}$,*

$\bar{\mu}$ des Verbandes Ω_L durch den nämlichen Automorphismus $\sigma \in A(\Omega)$ induziert und es gilt somit $\bar{\sigma} = \bar{\mu}$. Da h_1 ein Isomorphismus ist, gilt auch $\sigma' = \mu'$. Die betrachtete Abbildung ist ein Isomorphismus der Gruppen $A(\Phi_\Omega)$, $A(\Omega)$. Hieraus folgt, daß sich jeder Automorphismus σ des Ringes $\Omega(A, B)$ in genau einen Automorphismus des Ringes Φ erweitern läßt.

LITERATUR

[1] *Jacobson N.:* Structure of rings. 1956.

[2] *Machala F.:* O automorfismech definovaných na okruhu endomorfismů homogenního totálně rozložitelného modulu. Čas. pěst. mat., 96, 1971, 353—360.

[3] *Skornjakov L. A.:* Projektivnoje otobraženije modulej. Izvj. AN, 1960, 24, No 4, 511—520.

[4] *Wolfson K. G.:* Baer rings of endomorfisms. Math. Ann., 1961, 143, No 1, 19—28.

SHRNUTÍ

O AUTOMORFISMECH SVAZU ANULÁTORŮ JISTÝCH PODOKRUHŮ V OKRUHU ENDOMORFISMŮ HOMOGENNÍHO TOTÁLNĚ ROZLOŽITELNÉHO MODULU

FRANTIŠEK MACHALA

Levý unitární modul M se nazývá homogenní totálně rozložitelný, jestliže je direktním součtem isomorfních jednoduchých podmodulů. Mějme podmoduly A, B modulu M, pro které platí $A \leqq B$. Množina endomorfismů ω modulu M, pro které platí $B\omega \leqq A$, vytváří podokruh $\Omega(A, B)$ v okruhu Φ všech endomorfismů modulu M. Označme $A(\Phi_\Omega)$ množinu automorfismů okruhu Φ, které indukují automorfismy okruhu $\Omega(A, B)$. $A(\Phi_\Omega)$ je podgrupa grupy $A(\Phi)$ všech automorfismů okruhu Φ. Označme dále Ω_L, Ω_P svazy levých a pravých anulátorů v okruhu $\Omega(A, B)$. Pro přípustné homogenní totálně rozložitelné moduly (lit. [3]) platí: Grupa $A(\Phi)$ je isomorfní s grupami $P(\Omega_L)$, $P(\Omega_P)$ automorfismů svazů Ω_L, Ω_P. Grupa $A(\Phi_\Omega)$ je isomorfní s grupou $A(\Omega)$ automorfismů okruhu $\Omega(A, B)$. V článku jsou dále popsány automorfismy svazů Ω_L, Ω_P, které jsou indukovány automorfismy okruhu $\Omega(A, B)$.

SUMMARY

ON AUTOMORPHISMS OF A LATTICE OF ANNIHILATORS OF CERTAIN SUBRINGS IN A RING OF ENDOMORPHISMS OF A HEMOGENEOUS COMPLETELY REDUCIBLE MODULE

FRANTIŠEK MACHALA

A unitary left module M is called homogeneous completely reducible if it is a direct sum of isomorphic simple submodules. Let A, B be the submodules of a module M for which $A \leqq B$. A set of endomorphisms ω of a module M for which holds $B\omega \leqq A$ generates a subring $\Omega(A, B)$ in the ring Φ of all endomorphisms of the module M. Let $A(\Phi_\Omega)$ be a set of automorphisms of the ring Φ, where each of these induces the automorphism of the ring $\Omega(A, B)$. Then $A(\Phi_\Omega)$ is a subgroup of the group $A(\Phi)$ of all automorphisms of the ring Φ. Let further Ω_L, Ω_P be the lattices of left and right annihilators in the ring $\Omega(A, B)$. The following holds for admissible homogeneous completely reducible modules (see [3]): The group $A(\Phi)$ is isomorphic to groups $P(\Omega_L)$, $P(\Omega_P)$ of automorphisms of lattices Ω_L, Ω_P. The group $A(\Phi_\Omega)$ is isomorphic to groups $A(\Omega)$ of automorphisms of the ring $\Omega(A, B)$. In the paper are also described the automorphisms of lattices Ω_L, Ω_P induced by automorphisms of the ring $\Omega(A, B)$.