Sborník prací Přírodovědecké fakulty University Palackého v Olomouci. Matematika

Jan Voráček

Über D'-divergente Lösungen der Differentialgleichung $x^{(n)} = f(x, x', \ldots, x^{(n-1)}; t)$

Sborník prací Přírodovědecké fakulty University Palackého v Olomouci. Matematika, Vol. 13 (1973), No. 1, 83--89

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/120028`

1973 — ACTA UNIVERSITATIS PALACKIANAE OLOMUCENSIS
FACULTAS RERUM NATURALIUM — TOM 41

Katedra matematické analýzy přírodovědecké fakulty University Palackého v Olomouci
Vedoucí katedry: Prof. RNDr. Miroslav Laitoch, CSc.

ÜBER D′—DIVERGENTE LÖSUNGEN DER DIFFERENTIALGLEICHUNG $x^{(n)} = f(x, x', \ldots, x^{(n-1)}; t)$

JAN VORÁČEK

(Eingegangen am 18. September 1972)

In der vorliegenden Bemerkung beschreiben wir eine Methode, welche die Existenz einer Menge $\mathfrak{X}$ der Lösungen der Differentialgleichung

$$x^{(n)} = f(x, x', \ldots, x^{(n-1)}; t) \tag{1}$$

zu beweisen ermöglicht, welche die Relationen

$$\lim_{t\to+\infty} |x(t)| = +\infty, \quad \limsup_{t\to+\infty} |x^{(i)}(t)| \leqq D'(i = 1, \ldots, n-1) \tag{2}$$

erfüllen; dabei ist die Konstante D' für alle Lösungen aus $\mathfrak{X}$ dieselbe. Die Lösungen aus $\mathfrak{X}$, welche mittels der Eigenschaft (2) charakterisiert sind, wollen wir im Folgenden kürzer als D'-divergente Lösungen bezeichnen.

Es handelt sich um Beschreibung einer Methode, die in bestimmten Sonderfällen bereits in einigen früheren Arbeiten des Authors benutzt wurde ([1], [2], [3]).

1. Wir führen zuerst einen Satz aus dem Gedankenkreise der Sätze über D-Systeme von Differentialgleichungen an. Es sei ein Differentialgleichungssystem

$$x_i' = f_i(x_1, \ldots, x_n; t) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{3}$$

gegeben, wo f_i $(i = 1, \ldots, n)$ stetig auf $E_{n+1}(x_1, \ldots, x_n; t)$ sind. Weiter seien $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$ $(k \leqq n)$ k natürliche Zahlen die $\leqq n$ sind. Die k − tupel $p_1, p_2, \ldots, p_k$ wollen wir kurz mit K bezeichnen und den Ausdruck $\sum_{i=1}^{k} |x_{p_i}|$ mit dem Symbol $|x|_k$.

Satz 1. *Es existiere eine Funktion $V(x_{p_1}, x_{p_2}, \ldots, x_{p_k})$, die erste stetige Ableitungen nach allen ihren Argumenten auf $E_k(x_{p_1}, x_{p_2}, \ldots, x_{p_k})$ besitzt. Es mögen weiter zwei Konstanten $Q > P > 0$ so existieren, daß die Ungleichheit*

$$\min_{|x|_k \geqq Q} V(x_{p_1}, x_{p_2}, \ldots, x_{p_k}) > \max_{|x|_k \leqq P} V(x_{p_1}, x_{p_2}, \ldots, x_{p_k}) \tag{4}$$

gilt. Wenn in $E_{n+1}(x_1, x_2, \ldots, x_n; t)$ *noch*

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial V}{\partial x_{p_i}} f_{p_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n; t) \leqq 0 \tag{5}$$

für $|x|_k \geqq P$ *erfüllt ist, dann gilt für jede Lösung* $x(t) = \big(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)\big)$ *des Differentialgleichungssystems* (3), *für welche* $|x(t_0)|_k \leqq P$ *ist, die Ungleichheit*

$$|x(t)|_k < Q \tag{6}$$

für jedes t, für welches die betrachtete Lösung existiert.

Der Beweis dieses Satzes kann auf eine bekannte Weise erbracht werden (vgl. z. B. [4]).

Wenn wir die Differentialgleichung (1) in das System

$$x_1' = x_2, x_2', = x_3, \ldots, x_n' = f(x_1, x_2, \ldots, x_n; t) \tag{1'}$$

überführen und für K die Menge 2, 3, ..., n wählen, bekommen wir aus Satz 1 den folgenden

Satz 2. *Es existiere eine Funktion* $V(x_2, x_3, \ldots, x_n)$, *die stetige Ableitungen erster Ordnung nach allen ihren Argumenten in* $E_{n-1}(x_2, x_3, \ldots, x_n)$ *besitzt. Es mögen weiter zwei Konstanten* $D' > P > 0$ *so existieren, daß die Ungleichheit*

$$\operatorname*{Min}_{|x|_k \geqq D} V(x_2, x_3, \ldots, x_n) > \operatorname*{Max}_{|x|_k \leqq P} V(x_2, x_3, \ldots, x_n) \tag{4'}$$

gilt. Wenn in $E_{n+1}(x_1, x_2, \ldots, x_n; t)$ *für* $|x|_k \geqq P$ *noch*

$$\sum_{k=2}^{n-1} \frac{\partial V}{\partial x_k} x_{k+1} + \frac{\partial V}{\partial x_n} f(x_1, x_2, \ldots, x_n; t) \leqq 0, \tag{5'}$$

erfüllt ist und t_0 *eine reelle Zahl bedeutet, dann gilt für jede Lösung* $x(t)$ *der Differentialgleichung* (1), *für welche*

$$\sum_{i=1}^{n-1} |x^{(i)}(t_0)| \leqq P \tag{7}$$

ist, die Ungleichheit

$$\sum_{i=1}^{n-1} |x^{(i)}(t)| \leqq D' \tag{6'}$$

auf der ganzen Halbgerade $\langle t_0, +\infty)$.

Beweis. Wir brauchen nur die Existenz jeder Lösung $x(t)$ von (1), die (7) erfüllt, auf der Halbgerade $\langle t_0, +\infty)$ zu beweisen, da sonst alles aus dem Satze 1 folgt.

Wenn aber die betrachtete Lösung $x(t)$ nicht auf der ganzen Halbgerade $\langle t_0, +\infty)$ existiere, müßte es ein t_1 geben, $t_0 < t_1 < +\infty$ so, daß $x(t)$ auf $\langle t_0, t_1)$ existiere und

$$\limsup_{t \to t_1^-} |x(t)| = +\infty \tag{8}$$

wäre. Auf $\langle t_0, t_1)$ haben wir aber nach (6′) $|x'(t)| \leqq D'$ und also auch

$$|x(t) - x(t_0)| \leqq D'(t - t_0).$$

Da $x(t)$ stetig ist, steht die letzte Ungleichheit im Widerspruch zu (8).

2. Nun werden wir einen Satz beweisen, der unter gewissen Voraussetzungen, aus den die Ungleichheit (6′) erfüllenden Lösungen die D′-divergenten Lösungen auszusondern ermöglicht.

Satz 3. *Die Voraussetzungen des Satzes 2 seien erfüllt. Es möge weiter eine Funktion $U(x_1, x_2, \ldots, x_n; t)$ existieren die stetig auf $E_{n+1}(x_1, x_2, \ldots, x_n; t)$ ist und darüber noch folgende Eigenschaften besitzt:*

1) *Sie ist in jedem Zylinder der Form* $\sum_{i=1}^{n} |x_i| \leqq T (T > 0)$,

$-\infty < t < +\infty$ *beschränkt.*

2) *Auf der Menge* $\sum_{i=2}^{n} |x_i| \leqq D'$, $-\infty < t < +\infty$ *ist die Relation*

$$\lim_{|x_1| \to +\infty} U(x_1, x_2, \ldots, x_n; t) = +\infty \tag{9}$$

erfüllt.

3) $U(x_1, x_2, \ldots, x_n; t)$ *besitzt stetige Ableitungen erster Ordnung nach allen ihren Argumenten auf* $E_{n+1}(x_1, x_2, \ldots, x_n; t)$ *und es gibt zwei positive Konstanten R, d so, daß die Ungleichheit*

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial U}{\partial x_i} x_{i+1} + \frac{\partial U}{\partial x_n} f(x_1, x_2, \ldots, x_n; t) > d \tag{10}$$

auf der Menge $|x_1| \geqq R, \sum_{i=2}^{n} |x_i| \leqq D'$, $-\infty < t < +\infty$ *gültig ist.*

Dann gibt es eine Konstante $S > R$ so, daß jede Lösung $x(t)$ von (1), *welche den Ungleichheiten (t_0 — reelle Zahl)*

$$|x(t_0)| > S, \qquad \sum_{i=1}^{n-1} |x^{(i)}(t_0)| \leqq P \tag{11}$$

genügt D′-divergent ist.

Beweis. Wir bezeichnen mit $Sup(R)$ das Supremum der Funktion $U(x_1, x_2, \ldots, x_n; t)$ auf der Menge $|x_1| \leqq R, \sum_{i=2}^{n} |x_i(t)| \leqq D'$, $-\infty < t < +\infty$. Aus der Eigenschaft 1) folgt, daß $Sup(R) < +\infty$ ist. Aus (9) geht weiter die Existenz einer Zahl $S > R$ hervor mit der Eigenschaft, daß auf der Menge $|x_1| \geqq S, \sum_{i=2}^{n} |x_i| \leqq D'$, $-\infty < t + \infty$ die Ungleichheit

$$U(x_1, x_2, \ldots, x_n; t) > Sup(R) \tag{12}$$

richtig ist. Wir werden jetzt beweisen, daß jede solche Lösung $x(t)$ von (1) D'-divergent ist, welche in t_0 den Ungleichheiten (11) genügende Anfangsbedingungen erfüllt. Zu diesem Zwecke setzen wir in $U(x_1, x_2, \ldots, x_n; t)$ für x_i die Funktionen $x^{(i-1)}(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n; x^{(0)} = x)$ ein. So erhalten wir eine zusammengesetzte Funktion von t, die wir mit $U_x(t)$ bezeichnen werden. Wir rechnen jetzt die Ableitung $U_x'(t)$ dieser Funktion aus. Zuerst haben wir

$$U_x'(t) = \frac{\partial U}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\mathrm{d}x^{(i-1)}}{\mathrm{d}t}. \tag{13}$$

Das Funktionensystem $x(t), x'(t), \ldots, x^{(n-1)}(t)$ stellt natürlich gleichzeitig eine Lösung $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ des Differentialgleichungssystems (1') dar. Demzufolge bekommen wir aus (13) weiter

$$U_x'(t) = \frac{\partial U}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial U}{\partial x_i} x_{i+1} + \frac{\partial U}{\partial x_n} f(x_1, x_2, \ldots, x_n; t). \tag{14}$$

Wenn für $x(t_0), x'(t_0), \ldots, x^{(n-1)}(t_0)$ die Ungleichheiten (11) richtig sind, dann existieren laut Satz 2 alle diese Funktionen auf der Halbgerade $\langle t_0, +\infty)$ und erfüllen hier die Ungleichheit $\sum_{i=1}^{n-1} | x^{(i)}(t) | = \sum_{i=2}^{n} | x_i(t) | \leqq D'$. Aus (14), (10) und aus der Stetigkeit der betrachteten Funktionen sehen wir jetzt, daß ein $\delta > 0$ existiert so, daß auf dem Intervalle $J = \langle t_0, t_0 + \delta)$ die Ungleichheit

$$U_x'(t) > d \tag{15}$$

besteht. J ist dabei durch die Relation $| x_1(t) | = | x(t) | > R$ charakterisiert. Gäbe es aber eine Zahl $\Theta > t_0$ so, daß $| x_1(t) | = | x(t) | > R$ für $t_0 \leqq t < \Theta$ wäre und $| x_1(\Theta) | = | x(\Theta) | = R$, dann müßte auch die Ungleichheit

$$U_x(\Theta) \leqq \operatorname{Sup}(R) < U_x(t_0)$$

richtig sein, die aber mit der Tatsache im Widerspruch steht, daß nach (15) für alle $t \in \langle t_0, \Theta)$ $U_x'(t) > d > 0$ ist. Die Relation $| x_1(t) | = | x(t) | > R$ besteht also auf der ganzen Halbgerade $\langle t_0, +\infty)$. Damit ist auch (15) auf $\langle t_0, +\infty)$ richtig und deshalb $\lim_{t \to +\infty} U_x(t) = +\infty$. Aus den Eigenschaften 1), 2) der Funktion $U(x_1, x_2, \ldots, \ldots, x_n; t)$ folgt jetzt unmittelbar $\lim_{t \to +\infty} | x_1(t) | = \lim_{t \to +\infty} | x(t) | = +\infty$, was zu beweisen war.

B e m e r k u n g. Es ist klar, daß eine noch allgemeinere Fassung der Sätze 1, 2, 3 möglich wäre. Wir verzichten darauf, da wir bisher für die evtl. allgemeineren Sätze keine Anwendung kennen.

3. Wir werden jetzt die Anwendung der in den Absätzen 1., 2. angeführten Sätze in einfachen Beispielen zeigen. Weitere Beispiele, die überwiegend Differential-

gleichungen dritter Ordnung betreffen, kann der Leser in den bereits zitierten Arbeiten finden.

Wir betrachten zuerst die Gleichung

$$x'' + f_1(x)\,x' + h(x) = e(t), \tag{16}$$

wo $f_1(x)$, $h(x)$, $e(t)$ stetig sind auf der reellen Achse. Außerdem wollen wir die Existenz positiver Konstanten H, E, ε so voraussetzen, daß folgende Abschätzungen gelten:

$$|\,h(x)\,| \leqq H,\ |\,e(t)\,| \leqq E \qquad \text{für alle } x, t \tag{17}$$

und

$$f_1(x) > \varepsilon \qquad \text{für alle } x. \tag{18}$$

Das Differentialgleichungssystem äquivalent mit (16) lautet

$$x_1' = x_2,\ x_2' = -f_1(x_1)\,x_2 - h(x_1) + e(t). \tag{16'}$$

Um den Satz 2 anzuwenden, genügt es $2V(x_2) = x_2^2$ zu setzen. Für den Ausdruck aus (5') bekommen wir dann (unter Beachtung von (17), (18)):

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x_2}\bigl(-f_1(x_1)\,x_2 - h(x_1) + e(t)\bigr) =$$
$$-f_1(x_1)\,x_2^2 - h(x_1)\,x_2 + e(t)\,x_2 \leqq |\,x_2\,|\,(-\varepsilon\,|\,x_2\,| + H + E),$$

so daß wir z. B. $P \geqq \dfrac{1}{\varepsilon}(H + E)$ setzen können und D' nur die einzige Bedingung $D' > P$ zu befriedigen braucht. Nach Satz 2 gilt also folgende Behauptung: Jede Lösung $x(t)$ von (16) (wo $h(x)$, $e(t)$ und $f_1(x)$ den Voraussetzungen (17) und (18) genügen), die in einer reellen Zahl t_0 die Ungleichheit $|\,x'(t_0)\,| \leqq P$ erfüllt, existiert auf $\langle t_0, +\infty)$ und kann dabei durch $|\,x'(t)\,| \leqq D'$ abgeschätzt werden, wo D' eine beliebige Zahl $> \operatorname{Max}\left(P, \dfrac{1}{\varepsilon}(H + E)\right)$ bedeutet.

Um den Satz 3 anzuwenden, betrachten wir nun die Differentialgleichung

$$x^{(n)} + \sum_{k=1}^{n-1} f_k(x^{(k-1)})\,x^{(k)} + h(x) = e(t), \qquad (x^{(0)} = x) \tag{19}$$

mit stetigen f_k $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$, h, e. Wir setzen $F_k(x) = \int_0^x f_k(s)\,ds$.

Satz 4. *Die Gleichung (19) möge den Voraussetzungen des Satzes 2 genügen. Es sei* $M_k = \operatorname{Max} |\,F_k(x)\,|$ $(k = 2, 3, \ldots, n-1)$ *für* $|\,x\,| \leqq D'$ *und außer (17) seien noch folgende Bedingungen erfüllt:*

$$|\int_0^t e(s)\,\mathrm{d}s\,| \leqq E_1 \qquad \text{für alle } t, \tag{20}$$

$$\limsup_{|x| \to +\infty} F_1(x)\,h(x) < -A = -\Bigl(D' + \sum_{k=2}^{n-1} M_k + E_1\Bigr),$$

$$\lim_{|x| \to +\infty} F_1(x) = +\infty. \tag{21}$$

Dann besitzt (19) D' – divergente Lösungen.

Beweis. Das Differentialgleichungssystem, äquivalent mit (19) ist

$$x_1' = x_2, x_2' = x_3, \dots, x_n' = -\sum_{k=1}^{n-1} f_k(x_k)\, x_{k+1} - h(x_1) + e(t). \tag{19'}$$

Wir setzen

$$2U(x_1, x_2, \dots, x_n; t) = \left(x_n + \sum_{k=1}^{n-1} F_k(x_k) - \int_0^t e(s)\,\mathrm{d}s\right)^2. \tag{22}$$

Es ist nach (20), (21) klar, daß U die Eigenschaften 1) und 2) aus dem Satz 3 besitzt. Für den Ausdruck aus (10) bekommen wir (vgl. (17), (20) und die Definition von A in (21))

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial U}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial U}{\partial x_i} x_{i+1} + \frac{\partial U}{\partial x_n}\left(-\sum_{k=1}^{n-1} f_k(x_k)\, x_{k+1} - h(x_1) + e(t)\right) = \\
&= -h(x_1)\left(x_n + \sum_{k=2}^{n-1} F_k(x_k) - \int_0^t e(s)\,\mathrm{d}s\right) - F_1(x_1)\, h(x_1) \geqq \\
&\geqq -F_1(x_1)\, h(x_1) - A.
\end{aligned} \tag{23}$$

Wenn wir jetzt die Bezeichnung $2d = -\limsup_{|x| \to \infty +} F_1(x)\, h(x) - A$ einführen, so folgt aus (21), daß $d > 0$ ist und ein $R > 0$ so existiert, daß $-F_1(x)\, h(x) - A > d$ für alle $|x| \geqq R$ gilt. Für $|x_1| \geqq R$ haben wir also nach (23)

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial U}{\partial x_i} x_{i+1} + \frac{\partial U}{\partial x_n}\left(-\sum_{k=1}^{n-1} f_k(x_k)\, x_{k+1} - h(x_1) + e(t)\right) > d$$

und der Satz ist bewiesen.

Wir kehren noch zu der Gleichung (16) zurück, wo f_1, h, e die obenangeführeten Bedingungen (17), (18) und (20) erfüllen. Man kann hier den Satz 4 anwenden. Es ist aber besser in diesem Falle

$$2U(x_1, x_2; t) = 2\int_0^{x_1} h(s)\,\mathrm{d}s + \left(x_2 + F_1(x_1) - \int_0^t e(s)\,\mathrm{d}s\right)^2 \tag{24}$$

zu sezten, da auf diese Weise wir (vgl. (16'), (17), (20))

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial U}{\partial x_2}\left(-f_1(x_1)\, x_2 - h(x_1) + e(t)\right) = F_1(x_1)\, h(x_1) + \\
&+ h(x_1)\int_0^t e(s)\,\mathrm{d}s \geqq -F_1(x_1)\, h(x_1) - HE
\end{aligned}$$

erhalten.

Zu den Bedingungen (17), (18), (20) genügt es also nur noch die Bedingung

$$\limsup_{|x| \to +\infty} F_1(x)\, h(x) < -HE_1$$

beizufügen, da in diesem Falle (24) die Eigenschaften 1), 2), 3) aus dem Satz 3 besitzt und sichert damit die Existenz von D'divergenten Lösungen.

Mit Hilfe der Funktion $U(x_1, x_2,; t)$ aus (24) kann man sehr leicht auch die Konstante S abschätzen.

LITERATUR

[1] *Voráček, J.:* Einige Bemerkungen über eine nichtlineare Differentialgleichung dritter Ordnung. Archivum mathematicum, Brno, T. 2, 1966.

[2] *Voráček, J.:* O některých nelineárních diferenciálních rovnicích třetího řádu. Acta Universitatis Palackianae Olomucensis, T. 21, 1966.

[3] *Voráček, J.:* Über eine nichtlineare Differentialgleichung dritter Ordnung. Czechoslovak Mathematical Journal, 20 (95) 1970, Praha.

[4] *Pliss, V. A.:* Nelokal'nye problemy teorii kolebanij, Moskva, 9164.

SHRNUTÍ

O D'-DIVERGENTNÍCH ŘEŠENÍCH DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE $x^{(n)} = f(x, x', \ldots, x^{(n-1)}; t)$

JAN VORÁČEK

V práci je popsána obecná metoda, jíž lze dokázat existenci D'-divergentních řešení, t. j. řešení splňujících vztahy (2). Metoda, která je založena na využití Ljapunovských funkcí, je potom ilustrována na příkladě rovnic (16) a (19).

РЕЗЮМЕ

О D'-РАСХОДЯЩИХСЯ РЕШЕНИЯХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ $x^{(n)} = f(x, x', \ldots, x^{(n-1)}; t)$

ЯН ВОРАЧЕК

В настоящей работе приводится общий метод, с помощью которого можно доказать существование D'-расходящихся решений, т. е. решений, удовлетворяющих соотношению (2). Метод, который основывается на использовании функций Ляпкнова демонстрируется потом на примерах уравнений (16) и (19).