František Machala

# Eine Ebene im projektiven Raum mit Homomorphismus

*Sborník prací Přírodovědecké fakulty University Palackého v Olomouci. Matematika*, Vol. 15 (1976), No. 1, 5--21

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/120036

1975 — ACTA UNIVERSITATIS PALACKIANAE OLOMUCENSIS
FACULTAS RERUM NATURALIUM — TOM 49

*Katedra algebry a geometrie přírodovědecké fakulty University Palackého v Olomouci*
*Vedoucí katedry: prof. RNDr. Josef Šimek*

# EINE EBENE IM PROJEKTIVEN RAUM MIT HOMOMORPHISMUS

FRANTIŠEK MACHALA

*(Eingelangt am 19. 6. 1974)*

W. Klingenberg definierte in [2] projektive und affine Ebenen mit Homomorphismus und mit Hilfe der Axiomen (d), (D), welche an Translationen der affinen Ebenen mit Homomorphismus gewisse Forderungen stellen, definierte er desarguessche affine Ebenen mit Homomorphismus. Ferner wird in [2] ein projektiver und ein affiner Raum mit Homomorphismus der Dimension 3 erklärt und es wird gezeigt, daß jede Ebene im affinen Raum mit Homomorphismus eine desarguessche ist. In [3] werden dann projektive Räume mit Homomorphismus endlicher Dimension definiert.

In [5] behandelt man gewisse Konfigurationen $(k)$, $(K_P)$ in affiner Ebene mit Homomorphismus, zu denen Schließungssätze $(d_H)$, $(D_P)$ aufgestellt werden. Es wird gezeigt, daß eine affine Ebene mit Homomorphismus eine desarguessche im Sinne von [2] genau dann ist, wenn die Schließungssätze $(d_H)$, $(D_P)$ für alle Konfigurationen $(k)$, $(K_P)$ befriedigt sind.

Die vorliegende Arbeit besteht aus vier Teilen. Im ersten Teil sind einige grundlegende Definitionen aus [2], [5] zusammengefaßt. Im zweiten Teil ist der axiomatische Aufbau des projektiven Raums mit Homomorphismus beliebiger (endlicher sowie unendlicher) Dimension durchgeführt. Im dritten Teil wird bewiesen, daß jede Ebene im projektiven Raum mit Homomorphismus eine projektive Ebene mit Homomorphismus ist. Im vierten Teil wird ein affiner Raum mit Homomorphismus definiert und mit Hilfe der Schließungssätze $(d_H)$, $(D_P)$ aus [5] wird gezeigt, daß jede Ebene in diesem Raum eine desarguessche affine Ebene mit Homomorphismus ist.

## I

*Definition 1.* Eine Inzidenzstruktur $\mathfrak{I}$ ist ein Tripel ($\mathbf{B}$, $\mathbf{L}$, I), wo $\mathbf{B}$, $\mathbf{L}$, I die Mengen mit folgenden Eingeschaften sind: $\mathbf{B} \cap \mathbf{L} = \emptyset$, $\mathrm{I} \subset \mathbf{B} \times \mathbf{L}$. Die Elemente aus $\mathbf{B}$ heißen Punkte, von $\mathbf{L}$ Geraden, die Relation I heißt Inzidenzrelation. An Stelle von $(P, p) \in \mathrm{I}$ bzw. $(P, p) \notin \mathrm{I}$ schreibt man kurz $P \, \mathrm{I} \, p$ bzw. $P \, \not{\mathrm{I}} \, p$ und man verwendet die üblichen

Sprachwendungen: ein Punkt $P$ und eine Gerade $p$ inzidieren (inzidieren nicht), $P$ liegt auf $p$, $p$ geht durch $P$ und ähnlich. ([1]).

Bemerkung 1. Eine projektive Ebene und ein projektiver Raum sind Inzidenzstrukturen. ([6], [4]).

*Definition 2.* Seien $\mathbf{I} = (\mathbf{B}, \mathbf{L}, \mathrm{I})$, $\mathbf{I}' = (\mathbf{B}', \mathbf{L}', \mathrm{I}')$ Inzidenzstrukturen. Eine Abbildung $\varphi : \mathbf{B} \cup \mathbf{L} \to \mathbf{B}' \cup \mathbf{L}'$ (kurz $\varphi : \mathbf{I} \to \mathbf{I}'$) heißt ein Homomorphismus, wenn es gilt

1. $\mathbf{B}\varphi \subset \mathbf{B}'$, $\mathbf{L}\varphi \subset \mathbf{L}'$.
2. $P \mathrm{I} p \Rightarrow P\varphi \mathrm{I}' p\varphi$, $\forall P \in \mathbf{B}$, $\forall p \in \mathbf{L}$.

Der Homomorphismus $\varphi : \mathbf{I} \to \mathbf{I}'$ heißt ein Epimorphismus, wenn $\mathbf{B}\varphi = \mathbf{B}'$, $\mathbf{L}\varphi = \mathbf{L}'$ gilt.

*Definition 3.* Vorgelegt seien eine Inzidenzstruktur $\mathbf{R} = (\mathbf{B}, \mathbf{L}, \mathrm{I})$, eine projektive Ebene $\bar{\mathbf{R}}$ und ein Epimorphismus $\varphi : \mathbf{R} \to \bar{\mathbf{R}}$. Das Tripel $(\mathbf{R}, \bar{\mathbf{R}}, \varphi)$ heißt eine projektive Ebene mit Homomorphismus, wenn es gilt:

1. $X, Y \in \mathbf{B}$, $X\varphi \neq Y\varphi \Rightarrow$ Die Punkte $X$, $Y$ inzidieren mit genau einer Geraden aus $\mathbf{L}$.
2. $x, y \in \mathbf{L}$, $x\varphi \neq y\varphi \Rightarrow$ Die Geraden $x, y$ inzidieren mit genau einem Punkt aus $\mathbf{B}$.

Bemerkung 2. Im weiteren werden wir unter dem Begriff projektive Ebene mit Homomorphismus direkt die Inzidenzstruktur $\mathbf{R}$ verstehen; zur Vereinfachung der Schreibweise wird $X\varphi = \bar{X}$, $x\varphi = \bar{x}$, $\forall X \in \mathbf{B}$, $\forall x \in \mathbf{L}$ gesetzt. Jede Gerade kann als eine mit ihr inzidierende Punktmenge angesehen werden. Die Inzidenz wird dann mit $\in$ geschrieben werden. Die nach 1 aus Definition 3, durch die Punkte $X$, $Y$ bestimmte Gerade bezeichnen wir mit $X + Y$. Sinngemäß wird mit $\bar{X} + \bar{Y}$ eine in $\bar{\mathbf{R}}$ durch die Punkte $\bar{X}$, $\bar{Y}$ bestimmte Gerade bezeichnet.

*Definition 4.* Vorgelegt sei eine projektive Ebene $\mathbf{R} = (\mathbf{B}, \mathbf{L}, \in)$ mit Homomorphismus. Es werde eine Gerade $l \in \mathbf{L}$ gewählt, es bezeichne $\mathbf{L}'$ eine Menge der Geraden $q \in \mathbf{L}$, wo $\bar{q} = \bar{l}$, und $\mathbf{B}'$ eine Punktmenge aller Geraden aus $\mathbf{L}'$. Die Inzidenzstruktur $\mathbf{R}_l = (\mathbf{B} \setminus \mathbf{B}', \mathbf{L} \setminus \mathbf{L}', \in)$ nennen wir eine affine Ebene mit Homomorphismus.

Bemerkung 3. Das Bild $\bar{\mathbf{R}}_l$ der affinen Ebene $\mathbf{R}_l$ mit Homomorphismus im Homomorphismus $\varphi$ ist eine affine Ebene in $\bar{\mathbf{R}}$ mit uneingentlicher Geraden $\bar{l}$. Die Einschränkung des Homomorphismus $\varphi$ auf $\mathbf{R}_l$ ist ein Epimorphismus von $\mathbf{R}_l$ auf $\bar{\mathbf{R}}_l$. Ist die Gerade $x$ aus $\mathbf{R}_l$, so liegen ihre Punkte auf einer gewissen Geraden aus $\mathbf{R}$, die ihren Träger darstellt.

*Definition 5.* Die Geraden $x, y$ einer affinen Ebene $\mathbf{R}_l$ mit Homomorphismus nennt man parallel, wenn ihre Träger einen Punkt auf der Geraden l gemeinsam haben.

Bemerkung 4. Aus den Definitionen 3, 4 und 5 folgt, daß man zu jeder Geraden durch jeden Punkt genau eine Parallele existiert.

*Definition 6.* Die Konfiguration (k) in einer affinen Ebene mit Homomorphismus ist ein Paar $((a_i), (U_i, V_i))_{i=1}^{4}$, wo $a_1, \ldots, a_4$ parallele Geraden sind mit $\bar{a}_j \neq \bar{a}_{j+1}$

und $(U_i, V_i)$ sind Punktepaare mit $U_i, V_i \in a_i$, $\bar{U}_1 \neq \bar{V}_1$, $U_j + U_{j+1} \parallel V_j + V_{j+1}$, $\forall i \in \{1, 2, 3, 4\}$, $\forall j \in \{1, 2, 3\}$. (Abb. 1.)

*Definition 7.* Vorgelegt sei ein Festpunkt $P$ in einer affinen Ebene mit Homomorphismus. Die Konfiguration vom Typ $(K_P)$ ist eine Gesamtheit $\{Q, Q', R, R', U, U', V, V'\}$, für die $\bar{R}, \bar{Q}, \bar{Q}' \neq \bar{P}$, $Q' \in P + Q$, $Q \neq Q'$, $\bar{R} \notin \bar{P} + \bar{Q}$, $R' \in P + R$, $Q + R \parallel Q' + R'$, $\bar{U}, \bar{V} \notin \bar{R} + \bar{Q}$, $\bar{U} \neq \bar{V}$, $U + Q \parallel U' + Q'$, $U + R \parallel U' + R'$, $V + Q \parallel V' + Q'$, $V + R \parallel V' + R'$ gilt. (Abb. 2.)

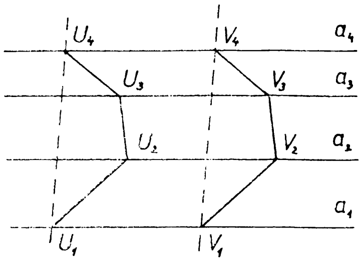


Abb. 1

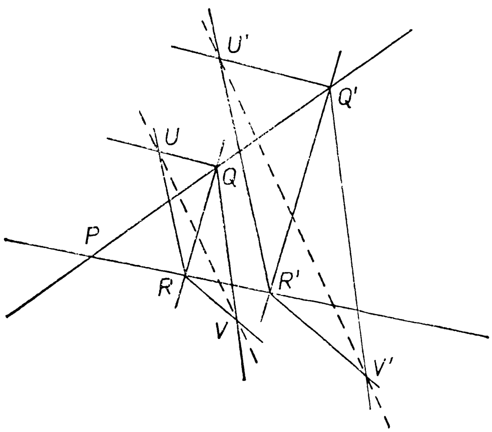


Abb. 2

*Schließungssatz* $(d)$. Vorgelegt sei eine Konfiguration (k). Geht durch die Punkte $U_1$, $U_4$ eine Gerade $l$, so geht die mit $l$ parallele und durch den Punkt $V_1$ hindurchgehende Gerade $l$ auch durch den Punkt $V_4$ gilt.

*Schließungssatz* $(D_P)$. In der Konfiguration $(K_P)$ gilt $U + V \parallel U' + V'$.

*Definition 8.* Eine affine Ebene mit Homomorphismus, in welcher Schließungssätze $(d)$, $(D_P)$ für beliebige Konfigurationen $(k)$, $(K_P)$ gelten, heißt desarguessche.

## II

Es sei nun eine Inzidenzstruktur **P**, ein projektiver Raum **P** beliebiger (endlicher oder unendlicher) Dimension und ein Epimorphismus $\varkappa : \mathbf{P} \to \mathbf{P}$ vorgelegt. Es werde $X\varkappa = \bar{X}$, $p\varkappa = \bar{p}$ für einen beliebigen Punkt $X$ und für eine beliebige Gerade $p$ aus **P** gesetzt. Im weiteren wird die Gültigkeit des folgenden Axioms vorausgesetzt:

*Axiom* $A_1$. Ist $\bar{P} \neq \bar{Q}$, so geht durch die Punkte $P, Q$ genau eine Gerade.

Bemerkung 5. Nach Bemerkung 2 wird die Inzidenz in **P**, **P** mit $\in$ bezeichnet; $P + Q$ bedeutet die durch die Punkte $P, Q$, $\bar{P} \neq \bar{Q}$ bestimmte Gerade aus **P**.

*Definition 9.* Eine Gesamtheit **U** der Punkte aus **P** heißt ein Teilsystem, wenn es gilt: $A, B \in \mathbf{U}$, $\bar{A} \neq \bar{B}$, $X \in A + B \Rightarrow X \in \mathbf{U}$.

Bemerkung 6. Eine leere Menge $\emptyset$ wird als Teilsystem angesehen, jedes Punkt ist ein Teilsystem, die Gesamtheit aller Punkte $X$ mit $\bar{X} = \bar{P}$, wo $P$ ein gegebener Punkt ist, bildet auch ein Teilsystem. Eine Punktmenge aller Geraden $x$ mit $\bar{x} = \bar{p}$, wo $p$ eine gegebene Gerade in **P** ist, ist ein Teilsystem.

*Satz 1. Es sei* **U** *ein Teilsystem. Dann* $\bar{\mathbf{U}} = \mathbf{U}\varkappa$ *ist ein Unterraum in* **P**.

Beweis. Vorgelegt seien Punkte $X, Y \in \bar{\mathbf{U}}$, $X \neq Y$. Dann bestehen Punkte $A, B \in \mathbf{U}$, $\bar{A} = X$, $\bar{B} = Y$. Nach Definition 9 gilt $A + B = p, p \subset \mathbf{U}$ und somit $\bar{p} = \bar{A} + \bar{B} = X + Y, \bar{p} \subset \bar{\mathbf{U}}$.

*Satz 2. Der Durchschnitt von den Teilsystemen ist ein Teilsystem.*

Beweis. Sei $\mathbf{U} = \bigcap_{\nu \in J} \mathbf{U}_\nu$ und $A, B \in \mathbf{U}$, $\bar{A} \neq \bar{B}$. Dann $A, B \in \mathbf{U}_\nu$, $A + B \subset \mathbf{U}_\nu$ für alle $\nu \in J$ und somit $A + B \subset \mathbf{U}$.

*Definition 10.* Es seien $\mathbf{U}_\nu$, $\nu \in J$ Teilsysteme. Der Durchschnitt **U** aller solcher Teilsysteme **V** aus **P**, wo $\mathbf{U}_\nu \subset \mathbf{V}$ für alle $\nu \in J$, wird die Verbindung der Teilsysteme $\mathbf{U}_\nu$ genannt und man schreibt dafür $\mathbf{U} = \sum_{\nu \in J} \mathbf{U}_\nu$. Wenn card $J = n$, so schreibt man $\mathbf{U} = \mathbf{U}_1 + \ldots + \mathbf{U}_n$.

*Definition 11.* Eine Teilmenge $\{M_\nu\}$, $\nu \in J$ der Punkte eines Teilsystemes **U** heißt **P**-unabhängig, wenn die Menge $\{\bar{M}_\nu\}$, $\nu \in J$ in **P** unabhängig ist, d. h. gilt $\bar{M}_{\nu'} \notin \sum_{\mu \neq \nu'} \bar{M}_\mu$ für jedes $\nu' \in J$. Ist $\{M_\nu\}$, $\nu \in J$ eine **P**-unabhängige Punktmenge eines Teilsystemes **U**, wo $\mathbf{U} = \sum_{\nu \in J} M_\nu$, so wird $\{M_\nu\}$, $\nu \in J$ die Basis von **U** genannt.

*Definition 12.* Existiert im Teilsystem **U** eine Basis, so ist **U** ein Unterraum in **P**.

Bemerkung 7. Eine leere Menge und ein Punkt sind Unterräume in **P**, eine Gerade ist auch ein Unterraum. Eine Punktmenge aller solcher Geraden $x$, wo $\bar{x} = \bar{p}$ und $p$ eine gewählte Gerade in **P** ist, ist ein Teilsystem – braucht jedoch nicht ein Unterraum zu sein.

Bemerkung 8. Es sei $\{M_\nu\}$, $\nu \in J$ eine Basis eines Unterraumes **U** in **P**. Dann ist $\{\bar{M}_\nu\}$, $\nu \in J$ eine Basis des Unterraumes **U** in **P**. Sind $\{M_\nu\}$, $\nu \in J$ und $\{N_\mu\}$, $\mu \in L$ Basen in **U**, so card $J$ = card $L$.

*Definition 13.* Wenn $\{M_v\}$, $v \in J$ eine Basis des Unterraumes $\mathbf{U}$ in $\mathbf{P}$ ist, so wird card $J - 1$ die Dimension des Unterraumes $\mathbf{U}$ genannt. Wenn $\mathbf{U}$ eine leere Menge ist, so $\dim \mathbf{U} = -1$. Der Unterraum in $\mathbf{P}$ von Dimension 2 wird die Ebene genannt.

Bemerkung 9. Da jeder Unterraum in $\mathbf{P}$ gleichzeitig ein Teilsystem ist, können wir nach Definition 10 eine Verbindung $\mathbf{U} = \sum_{v \in J} \mathbf{U}_v$ der Unterräume $\mathbf{U}_v$ betrachten. Dabei $\mathbf{U}$ braucht nicht je ein Unterraum zu sein. Es gilt jedoch folgender

*Satz 3. Es seien die Unterräume $U_v$, $v \in J$ in $\mathbf{P}$ vorgelegt mit $\mathbf{U}_{v'} \cap \sum_{\mu \neq v'} \bar{\mathbf{U}}_\mu = 0$ für alle $v' \in J$. Dann $\mathbf{U} = \sum_{v \in J} \mathbf{U}_v$ ist ein Unterraum in $\mathbf{P}$.*

Beweis. Es werde mit $\{M^v_{\xi_v}\}$, $\xi_v \in L_v$ die Basis von $\mathbf{U}_v$ bezeichnet. Dann ist $\{\bar{M}^v_{\xi_v}\}$, $\xi_v \in L_v$ eine Basis des Unterraumes $\bar{\mathbf{U}}_v$ in $\bar{\mathbf{P}}$, $\bigcup_{v \in J} \{\bar{M}^v_{\xi_v}\}$ eine Basis des Unterraumes $\bar{\mathbf{U}}$ und $\bigcup_{v \in J} \{M^v_{\xi_v}\}$ eine Basis von $\mathbf{U}$.

*Definition 14.* Der Unterraum $\mathbf{H}$ in $\mathbf{P}$ wird eine Hyperebene genannt, wenn $\bar{\mathbf{H}}$ eine Hyperebene in $\bar{\mathbf{P}}$ ist.

*Satz 4. Jeder Unterraum $\mathbf{U}$ in $\mathbf{P}$ liegt in einer Hyperebene.*

Beweis. Es sei $\{M_v\}$, $v \in J$ eine Basis von Unterraum $\mathbf{U}$. Dann ist $\{\bar{M}_v\}$, $v \in J$ eine Basis des Unterraumes $\bar{\mathbf{U}}$. Es besteht eine solche Hyperebene $\bar{\mathbf{H}}$ in $\bar{\mathbf{P}}$, wo $\bar{\mathbf{U}} \subset \bar{\mathbf{H}}$ und die Basis $\{\bar{N}_\mu\}$, $\mu \in L$ von $\bar{\mathbf{H}}$, die eine Verlängerug der Basis $\{\bar{M}_v\}$, $v \in J$ aus $\bar{\mathbf{U}}$ ist. Wenn wir solche Punkte $N_\mu$ herausgreifen, wo $\bar{N}_\mu = (N_\mu)\varkappa$, $\mu \in L$, so ist $\mathbf{H} = \sum_{\mu \in L} N_\mu$ eine Hyperebene in $\mathbf{P}$ und $\mathbf{U} \subset \mathbf{H}$.

Nun können wir folgendes Axiom aussprechen:

*Axiom $A_2$.* Es sei eine Gerade $p$ und eine Hyperebene $\mathbf{H}$ aus $\mathbf{P}$, wobei $\bar{p} \not\subset \bar{\mathbf{H}}$. Die Gerade $p$ hat mit der Hyperebene $\mathbf{H}$ genau einen Punkt gemein.

Bemerkung 10. Aus Axiom $A_2$ folgt: Die Gerade $p$ hat mit dem Unterraum $\mathbf{U}$, wo $\bar{p} \not\subset \bar{\mathbf{U}}$, höchstens einen Punkt gemein. Es ist nämlich eine Hyperebene $\mathbf{H}$, mit $\mathbf{U} \subset \mathbf{H}$, $\bar{p} \not\subset \bar{\mathbf{H}}$ zu wählen. Hätte die Gerade $p$ mit $\mathbf{U}$ zwei verschiedene Punkte $X$, $Y$ gemein, so wäre auch $X, Y \in \mathbf{H}$, im Widerspruch zum Axiom $A_2$. Gilt $p \not\subset \mathbf{U}$, $\bar{p} \subset \bar{\mathbf{U}}$, so kann die Gerade $p$ mit dem Unterraum $\mathbf{U}$ sogar mehrere Punkte gemein haben.

*Axiom $A_3$.* Vorgelegt seien Punkte $A, B, C, D$ aus $\mathbf{P}$, so daß die Punkte $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}$ nicht auf einer Geraden aus $\bar{\mathbf{P}}$ liegen und $\bar{A} \neq \bar{B} \neq \bar{C} \neq \bar{D} \neq \bar{A}$. Wenn die Geraden $A + B$, $C + D$ einen Punkt gemein haben, so haben auch die Geraden $A + D$, $B + C$ einen Punkt gemein.

Bemerkung 11. Wenn die Geraden $A + B$, $C + D$ einen Punkt gemein haben, so sind diese, nach Bemerkung 10, weiter punktfremd. Dann auch die Geraden $A + D$, $B + C$ haben genau einen Punkt gemein. Im weiteren werden wir unter der Schreibweise $[A, B, C, D]$, $(A + B) \cap (C + D) = X \Rightarrow (A + D) \cap (B + C) = Y$ verstehen: Die Punkte $A, B, C, D$ erfüllen die Forderungen des Axioms $A_3$, die Geraden $A + B$,

$C + D$ schneiden sich im Punkt $X$. Dann schneiden sich die Geraden $A + D, B + C$ im Punkt $Y$.

*Definition 15.* Das Tripel $(\mathbf{P}, \bar{\mathbf{P}}, \varkappa)$, welches die Axiome $A_1 - A_3$ befriedigt, heißt der projektive Raum mit Homomorphismus.

Bemerkung 12. Im weiteren werden wir unter dem Begriff projektiver Raum mit Homomorphismus direkt die Inzidenzstruktur $\mathbf{P}$ verstehen. Aus der Definition 15 ergibt sich, daß auf jeder Geraden in $\mathbf{P}$ solche Punkte $A, B, C$ liegen, wo $\bar{A} \neq \bar{B} \neq \bar{C} \neq \bar{A}$. In $\mathbf{P}$ existieren solche Geraden $a, b$ wo $\bar{a}, \bar{b}$ punktfremd sind.

**III**

Bezeichnen wir mit K $(A, B, C, D)$ eine Konfiguration in $\mathbf{P}$, wo die Punkte $A, B, C, D$ nachstehende Eigenschaften erfüllen: Keine drei von den Punkten $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}$ liegen auf einer Geraden in $\bar{\mathbf{P}}$ und die Geraden $a = A + B, b = C + D$ haben einen gemeinsamen Punkt $R$.

Bezeichnen wir mit $\mathbf{B}(A)$ bzw. $\mathbf{B}(B)$ die Punktmenge aller Geraden die den Punkt $A$ bzw. $B$ durchgehen und die Gerade $b$ schneiden. Analog bezeichnet man mit $\mathbf{B}(C)$ bzw. $\mathbf{B}(D)$ die Punktmenge aller Geraden die den Punkt $C$ bzw. $D$ durchgehen und die Gerade a schneiden. Es werde $\mathbf{B} = \mathbf{B}(A) \cup \mathbf{B}(B) \cup \mathbf{B}(C) \cup \mathbf{B}(D)$ gesetzt.

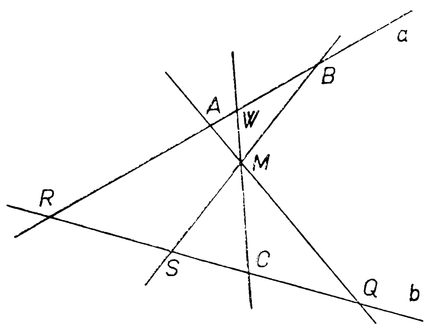


Abb. 3

*Satz 5. Gegeben sei eine Konfiguration* K $(A, B, C, D)$ *und ein Punkt* $M \in \mathbf{B}$. *Gilt* $\bar{M} \neq \bar{A}$ *bzw.* $\bar{M} \neq \bar{B}$ *bzw.* $\bar{M} \neq \bar{C}$ *bzw.* $\bar{M} \neq \bar{D}$, *so* $M \in \mathbf{B}(A)$ *bzw.* $M \in \mathbf{B}(B)$ *bzw.* $M \in \mathbf{B}(C)$ *bzw.* $M \in \mathbf{B}(D)$.

Beweis. Nehmen wir an, daß $\bar{M} \neq \bar{A}$. Wir werden einzelne Fälle betrachten:

I. Es sei $M \in \mathbf{B}(B)$. Dann liegt $M$ auf der Geraden, die den Punkt $B$ durchgeht und die Gerade $b$ im einzigen Punkt $S$ schneidet.

1. Es sei $\bar{M} \notin \bar{a}$.

a) Es sei $\bar{M} \neq \bar{S}$. Dann gilt $[R, A, M, S]$, $(R + A) \cap (S + M) = B \Rightarrow (A + M) \cap (R + S) = Q$. Da $b = R + S$, gilt $M \in \mathbf{B}(A)$.

b) Es sei $\overline{M} = \overline{S}$. Aus den Voraussetzungen folgt, daß $\overline{M} \neq \overline{R}$, $\overline{M} \neq \overline{B}$. Es sei nun von den Punkten $C$, $D$ ein erwählt, etwa $C$, für den $\overline{C} \neq \overline{M}$. Danach $[B, M, C, R]$, $(B + M) \cap (R + C) = S \Rightarrow (C + M) \cap (R + B) = W$. Weiter gilt $[C, M, A, R]$, $(C + M) \cap (A + R) = W \Rightarrow (A + M) \cap (R + C) = Q$. Hieraus ergibt sich, daß $M \in \mathbf{B}(A)$. (Abbildung 3.)

2. Es sei $\overline{M} \in \bar{a}$; dann gilt $\overline{S} = \overline{R}$.

a) Es sei $\overline{M} \neq \overline{S}$.

α) Nehmen wir an, daß $\overline{M} \neq \overline{B}$. Der Beweis verläuft ähnlich dem im Fall 1b.

β) Nehmen wir an, daß $\overline{M} = \overline{B}$. Dann gilt $[A, B, C, S]$, $(A + B) \cap (C + S) = R \Rightarrow (A + C) \cap (S + B) = W$, $[A, C, S, M]$, $(A + C) \cap (S + M) = W \Rightarrow$ $\Rightarrow (S + C) \cap (A + M) = Q$. Daraus ist $M \in \mathbf{B}(A)$.

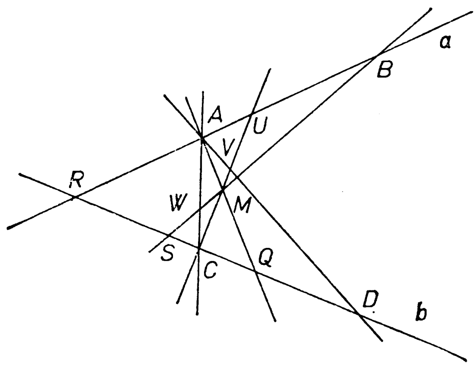


Abb. 4

b) Es sei $\overline{M} = \overline{S}$. Dann ist $\overline{R} = \overline{M}$, $\overline{B} \neq \overline{M}$ und es gilt $[A, B, C, S]$, $(A + B) \cap$ $\cap (C + S) = R \Rightarrow (A + C) \cap (B + S) = W$, $[B, M, A, C]$, $(B + M) \cap (A + C) =$ $= W \Rightarrow (C + M) \cap (A + B) = U$. (Abb. 4.) Es gilt $\overline{U} = \overline{R}$ und damit $\overline{U} \neq \overline{A}$, weiter folgt $[A, U, C, D]$, $(A + U) \cap (C + D) = R \Rightarrow (C + U) \cap (A + D) = V$. Schließlich ist $[C, M, A, D]$, $(C + M) \cap (A + D) = V \Rightarrow (A + M) \cap (C + D) = Q$. Somit gilt $M \in \mathbf{B}(A)$.

II. Es sei $M \in \mathbf{B}(C)$. Der Punkt $M$ liegt auf der Geraden, die durch den Punkt $C$ hindurchgeht und die Gerade $a$ im Punkt $S$ schneidet.

1. Ist $\overline{M} \notin \bar{b}$, so ist $\overline{S} \neq \overline{R}$, $\overline{M} \neq \overline{R}$, $\overline{C} \neq \overline{M}$ und so folgt $[A, R, C, M]$, $(A + R) \cap$ $\cap (C + M) = S \Rightarrow (A + M) \cap (R + C) = Q$.

2. Es sei $\overline{M} \in \bar{b}$. Dann gilt $\overline{S} = \overline{R}$.

a) $\overline{M} \neq \overline{S}$.

α) $\overline{M} \neq \overline{C}$. Der Beweis verläuft ganz analog zu dem im Fall 1.

β) $\overline{M} = \overline{C}$. Es gilt $[C, D, A, S]$, $(C + D) \cap (A + S) = R \Rightarrow (S + C) \cap (A + D) =$

$= W$. $[A, D, M, S]$, $(A + D) \cap (M + S) = W \Rightarrow (M + D) \cap (A + S) = U$. $[A, R, D, M]$, $(A + R) \cap (D + M) = U \Rightarrow (A + M) \cap (D + R) = Q$. (Abb. 5.)

III. Es sei $M \in \mathbf{B}(D)$. Der Beweis verläuft im wesentlichen genau wie in II.

Der Beweis der Behauptung für $\bar{M} \neq \bar{B}$ bzw. $\bar{M} \neq \bar{C}$ bzw. $\bar{M} \neq \bar{D}$ wird analog dem für $\bar{M} \neq \bar{A}$ geführt.

Bemerkung 13. Vorgelegt sei ein beliebiger Punkt $M \in \mathbf{B}$. Dann folgt entweder $\bar{M} \neq \bar{A}$ oder $\bar{M} \neq \bar{B}$. Nach Satz 5 ist dann entweder $M \in \mathbf{B}(A)$ oder $M \in \mathbf{B}(B)$. Dies hat zur Folge $\mathbf{B} \subset \mathbf{B}(A) \cup \mathbf{B}(B)$, d. h. $\mathbf{B} = \mathbf{B}(A) \cup \mathbf{B}(B)$. Auf analogem Wege $\mathbf{B} = \mathbf{B}(C) \cup \mathbf{B}(D)$.

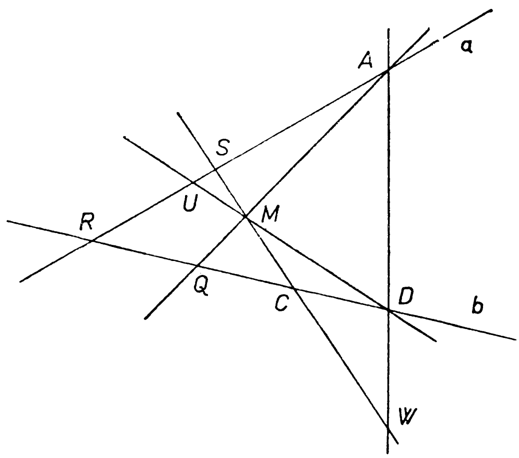


Abb. 5

*Satz 6. Es liege eine Konfiguration $K\ (A, B, C, D)$ vor und $P, Q \in \mathbf{B}$, $\bar{P} \neq \bar{Q}$. Ist $\bar{P} + \bar{Q} \neq \bar{a}$ bzw. $\bar{P} + \bar{Q} \neq \bar{b}$, so schneidet die Gerade $P + Q$ die Gerade $a$ bzw. $b$.*

Beweis. Wir werden einzelne Fälle betrachten:

I. Es sei $\bar{P} \notin \bar{a}, \bar{b}$; $\bar{Q} \notin \bar{a}, \bar{b}$.

1. Mindestens einer der Punkte $\bar{A}$, $\bar{B}$, etwa $\bar{A}$, liegt nicht auf der Geraden $\bar{P} + \bar{Q}$. Nach Satz 5 gilt $P, Q \in \mathbf{B}(A)$, die Geraden $A + P$, $A + Q$ schneiden die Gerade $b$ in den Punkten $U$, $V$ und es gilt $\bar{U} \neq \bar{V}$. So folgt $[P, U, Q, V]$, $(P + U) \cap (Q + V) = A \Rightarrow (P + Q) \cap (U + V) = X$.

2. Analog hierzu läßt sich zeigen, daß die Gerade $P + Q$ auch die Gerade $a$ schneidet.

II. Es sei $\bar{P} \in \bar{a}$, $\bar{Q} \notin \bar{a}, \bar{b}$.

1. Wegen $\bar{P} + \bar{Q} \neq \bar{b}$ ist es möglich auszunehmen, daß z. B. $\bar{C} \notin \bar{P} + \bar{Q}$. Nach Satz 5 ist dann $P, Q \in \mathbf{B}(C)$ und die Geraden $C + P$, $C + Q$ schneiden die Gerade $a$ in den Punkten $U$, $V$. Es gilt $\bar{P} = \bar{U}$, $\bar{U} \neq \bar{V}$, $\bar{V} \neq \bar{R}$.

a) Es sei $\bar{U} \neq \bar{R}$. Dann $[V, R, C, P]$, $(V + R) \cap (C + P) = U \Rightarrow (R + P) \cap \cap (C + V) = W$, $[R, P, V, Q]$, $(R + P) \cap (V + Q) = W \Rightarrow (P + Q) \cap (R + V) = = X$, d. h. $(P + Q) \cap a = X$.

b) Es sei $\bar{U} = \bar{R}$. Auf der Geraden $a$ existiert ein solcher Punkt $V'$, daß $\bar{V}' \neq \bar{R}$, $\bar{V}' \neq \bar{P}$ (Abb. 6). So folgt weiter $[C, P, V, V']$, $(C + P) \cap (V + V') = U \Rightarrow \Rightarrow (V' + P) \cap (C + V) = W$. $[V', V, P, Q]$, $(V' + P) \cap (V + Q) = W \Rightarrow (V + V') \cap \cap (P + Q) = X$. Dies hat zur Folge $a \cap (P + Q) = X$.

2. Wegen $\bar{P} + \bar{Q} \neq \bar{a}$ ist es möglich anzunehmen, daß $\bar{A} \notin \bar{P} + \bar{Q}$. Dann $(A + P) \cap \cap b = U$, $(A + Q) \cap b = V$, $\bar{U} \neq \bar{V}$. Wegen $\bar{P} \neq \bar{U}$, $\bar{Q} \neq \bar{V}$ läßt sich ähnlich wie in I zeigen, daß die Gerade $P + Q$ die Gerade $b$ schneidet.

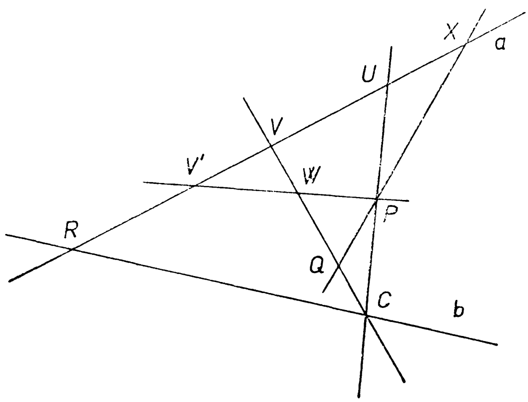


Abb. 6

III. $\bar{P} \in \bar{a}$, $\bar{Q} \in \bar{b}$ und $\bar{P}$, $\bar{Q} \neq \bar{R}$.

1. Wegen $\bar{P} + \bar{Q} \neq \bar{a}$ ist es möglich anzunehmen, daß z. B. $\bar{A} \notin \bar{P} + \bar{Q}$. Dies hat zur Folge $P, Q \in \mathbf{B}(A)$. Setzen wir $U = (P + A) \cap b$, $V = (A + Q) \cap b$. Dann $\bar{U} = \bar{R}$, $\bar{Q} = \bar{V}$, d. h. $\bar{Q} \neq \bar{U}$. Es ist möglich anzunehmen, daß z. B. $\bar{C} \neq \bar{Q}$. Es gilt $[A, Q, C, U]$, $(A + Q) \cap (C + U) = V \Rightarrow (A + U) \cap (C + Q) = W$. $[C, Q, P, U]$, $(C + Q) \cap (P + U) = W \Rightarrow (P + Q) \cap (C + U) = X$.

2. Analog zu 1 läßt sich beweisen, daß die Gerade $P + Q$ die Gerade $a$ schneidet.

IV. Es sei $\bar{P}$, $\bar{Q} \in \bar{a}$.

a) Es werde angenommen, es gelte $\bar{P}$, $\bar{Q} \neq \bar{R}$. Es sei z. B. $\bar{A} \neq \bar{P}$. So folgt $P \in \mathbf{B}(A)$. Wir setzen $(A + B) \cap b = U$ (Abb. 7). Es gilt $\bar{U} = \bar{R}$, $\bar{U} \neq \bar{P}$, $\bar{C} \neq \bar{Q}$, $\bar{C} \neq \bar{P}$, $\bar{C} \neq \bar{U}$ und damit $P, Q \in \mathbf{B}(C)$. Wir setzen weiter $V = (C + Q) \cap a$, $U' = (C + P) \cap \cap a$. Dann ist $\bar{V} \neq \bar{P}$, $\bar{V} \neq \bar{R}$, $\bar{U} \neq \bar{V}$ und es gilt $[R, V, C, P]$, $(R + V) \cap (C + P) = = U' \Rightarrow (P + V) \cap (R + C) = W$. $[V, P, U, C]$, $(V + P) \cap (U + C) = W \Rightarrow \Rightarrow (P + U) \cap (C + V) = S$. $[C, Q, P, U]$, $(C + Q) \cap (P + U) = S \Rightarrow (P + Q) \cap \cap (C + U) = X$.

b) Es werde angenommen, es gelte $\bar{P} = \bar{R}$ und $\bar{A} \neq \bar{Q}$. So folgt $P, Q \in \mathbf{B}(A)$. Wird $U = (A + P) \cap b$ gesetzt, so $\bar{U} = \bar{R}$. Es gilt $Q \in \mathbf{B}(C)$ und daher $V = (C + Q) \cap \cap a$ mit $\bar{V} = \bar{Q}$ und mithin $\bar{V} \neq \bar{A}$. So folgt weiter $[A, V, C, U], (A + V) \cap (C + U) = = R \Rightarrow (A + U) \cap (V + C) = W$ und $[P, U, Q, C], (P + U) \cap (Q + C) = W \Rightarrow \Rightarrow (P + Q) \cap (U + C) = X$. Durch Zeichenwechsel in I–IV erhalten wir auch die sonstigen Fälle.

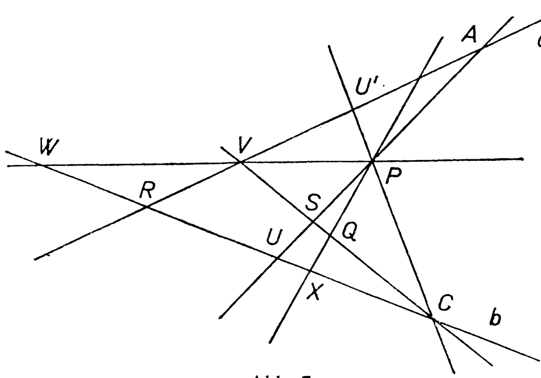


Abb. 7

*Satz 7. Es liege eine Konfiguration $K(A, B, C, D)$ vor. Dann* $\mathbf{B} = A + B + C$.

Beweis. Zunächst beweisen wir, daß $\mathbf{B}$ ein Teilsystem ist: Wir wählen beliebige Punkte $P, Q \in \mathbf{B}$, $\bar{P} \neq \bar{Q}$, und beweisen, daß $p = P + Q \subset \mathbf{B}$ gilt.

I. Es werde angenommen, es gelte $\bar{p} \neq \bar{a}, \bar{p} \neq \bar{b}$. Die Bezeichnung sei so gewählt, daß $\bar{P} \notin \bar{b}$. Nach Satz 6 gilt $V = p \cap b$, $S = p \cap a$, wobei $\bar{P} \neq \bar{V}$. Es gilt entweder $\bar{A} \notin \bar{p}$ oder $\bar{B} \notin \bar{p}$. Nehmen wir an, es gilt $\bar{A} \notin \bar{p}$. Dann ist $\bar{A} \neq \bar{P}$, $P \in \mathbf{B}(A)$ und man kann schreiben $U = (A + P) \cap b$. Offensichtlich $\bar{U} \neq \bar{V}$, $\bar{U} \neq \bar{P}$. Es werde ein Punkt $X \in p$ gewählt. Dann $\bar{X} \neq \bar{A}$, $\bar{X} \neq \bar{U}$.

1. Es werde angenommen, daß es $\bar{X} \neq \bar{V}$ gilt. Somit folgt $[V, X, U, A], (V + X) \cap \cap (U + A) = P \Rightarrow (A + X) \cap (U + V) = Y$. Daraus $X \in \mathbf{B}(A)$.

2. Es werde angenommen, es gelte $\bar{X} = \bar{V}$. Dann $\bar{X} \neq \bar{P}$.

a) Es sei $\bar{V} \neq \bar{R}$.

Es werde angenommen, daß $\bar{P} \notin \bar{a}$. Dann $\bar{U} \neq \bar{R}$ (Abb. 8). So folgt weiter $[A, R, P, X], (A + R) \cap (X + P) = S \Rightarrow (A + P) \cap (R + X) = W$. $[R, X, A, U]$, $(R + X) \cap (A + U) = W \Rightarrow (R + U) \cap (A + X) = Y$. Folglich $X \in \mathbf{B}(A)$.

Es werde angenommen, daß $\bar{P} \in \bar{a}$. Dann $\bar{U} = \bar{R}$. Es gilt entweder $\bar{C} \neq \bar{V}$ oder $\bar{D} \neq \bar{V}$. Es sei $\bar{C} \neq \bar{V}$. So folgt $[P, X, C, U], (P + X) \cap (C + U) = V \Rightarrow (X + C) \cap \cap (P + U) = W$ und $[A, U, X, C], (A + U) \cap (X + C) = W \Rightarrow (A + X) \cap (U + C) = = Y$. Daraus $X \in \mathbf{B}(A)$.

b) Es sei $\bar{V} = \bar{R}$. Dann $\bar{P} \notin \bar{a}$ und $\bar{U} \neq \bar{R}$. Wieder gilt entweder $\bar{C} \neq \bar{U}$ oder $\bar{D} \neq \bar{U}$. Es sei $\bar{C} \neq \bar{U}$. So folgt $[P, X, C, U], (P + X) \cap (C + U) = V \Rightarrow (C + X) \cap$

$\cap (P + U) = W$, $[A, U, C, X]$, $(A + U) \cap (C + X) = W \Rightarrow (A + X) \cap (C + U) = Y$. Folglich $X \in \mathbf{B}(A)$.

II. Es sei $\bar{p} = \bar{a}$. Bestimmtheitshalber werde angenommen, daß $\bar{P} \neq \bar{R}$, $\bar{A} \neq \bar{P}$. Dann $P \in \mathbf{B}(A)$ und man schreibt $U = (A + P) \cap b$. Offensichtlich $\bar{U} = \bar{R}$. Wegen $\bar{p} \neq \bar{b}$ gilt nach Satz 6 $V = p \cap b$. Offensichtlich $\bar{V} = \bar{R}$.

1. Es werde angenommen, daß $\bar{X} \neq \bar{A}$.

a) Es sei $\bar{X} \neq \bar{R}$. Dann $\bar{X} \notin \bar{b}$. Wegen $\bar{C} \neq \bar{R}$ ist auch $\bar{C} \neq \bar{V}$ und es folgt $[A, P, V, C]$, $(A + P) \cap (V + C) = U \Rightarrow (V + P) \cap (A + C) = W$ und $[V, X, A, C]$, $(V + X) \cap (A + C) = W \Rightarrow (A + X) \cap (V + C) = Y$. Somit gilt $X \in \mathbf{B}(A)$.

b) Es sei $\bar{X} = \bar{R}$. Dann gilt $[A, P, C, V]$, $(A + P) \cap (C + V) = U \Rightarrow (A + C) \cap (P + V) = W$ und $[X, P, A, C]$, $(X + P) \cap (A + C) = W \Rightarrow (X + A) \cap (P + C) = S$.

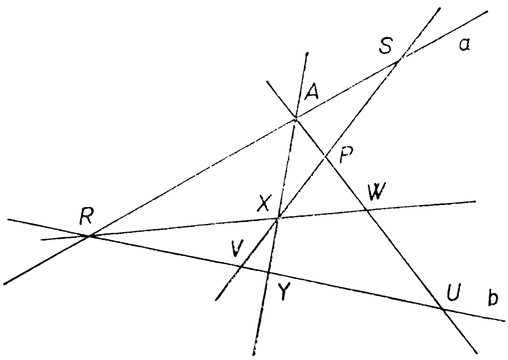


Abb. 8

$= S$. Wegen $P \in \mathbf{B}$, $\bar{P} \neq \bar{C}$ gilt auch $P \in \mathbf{B}(C)$. Dies hat zur Folge $(P + C) \cap a = U'$ und hierbei $\bar{P} = \bar{U}'$, d. h. $\bar{U}' \neq \bar{A}$ (Abb. 9). Weiter folgt $[A, X, C, U']$, $(A + X) \cap (C + U') = S \Rightarrow (C + X) \cap (A + U') = Y$ und somit $X \in \mathbf{B}(C)$.

2. Es werde angenommen, daß $\bar{X} = \bar{A}$. Dann $\bar{X} \notin \bar{b}$ und es gilt $[R, C, X, P]$, $(R + C) \cap (X + P) = V \Rightarrow (R + X) \cap (P + C) = W$. Wegen $P \in \mathbf{B}(C)$ kann man schreiben $U' = (P + C) \cap a$. Wegen $\bar{U}' = \bar{P}$ gilt $\bar{U}' \neq \bar{R}$, $\bar{U}' \neq X$ und auch $[R, X, C, U']$, $(R + X) \cap (C + U') = W \Rightarrow (R + U') \cap (C + X) = Y$. Folglich $X \in \mathbf{B}(C)$.

III. Wenn $\bar{p} = \bar{b}$ gilt, so wird der Beweis ähnlich wie in II geführt.

Nach Satz 3 bestimmen die Punkte $A$, $B$, $C$ die Ebene $\mathbf{U} = A + B + C$. Offensichtlich $b \subset \mathbf{U}$ und auch $\mathbf{B} \subset \mathbf{U}$. Da $\mathbf{B}$ ein Teilsystem ist und $A$, $B$, $C \in \mathbf{B}$, gilt $\mathbf{U} \subset \mathbf{B}$. Folglich $\mathbf{U} = \mathbf{B}$.

*Satz 8. Jede Ebene in* $\mathbf{P}$ *ist eine projektive Ebene mit Homomorphismus.*

Beweis. Es sei $\mathbf{U}$ eine Ebene in $\mathbf{P}$. Dann ist $\bar{\mathbf{U}} = \mathbf{U}\varkappa$ eine Ebene in $\bar{\mathbf{P}}$. Der Homomorphismus $\varkappa$ induziert einen Homomorphismus $\varkappa'$ der Ebene $\mathbf{U}$ auf eine projektive Ebene $\bar{\mathbf{U}}$. Nun wird gezeigt, daß die Forderungen 1, 2 aus der Definition 3 gelten.

1. Es liege $A, B \in \mathbf{U}$, $\bar{A} \neq \bar{B}$ vor. Nach $A_1$ gibt es eine einzige Gerade $p = A + B$, wobei $p \subset \mathbf{U}$.

2. Vorgelegt seien beliebige Geraden $a$, $c \subset \mathbf{U}$, $\bar{a} \neq \bar{c}$. Wählen wir auf der Geraden $a$ Punkte $\bar{R} \neq \bar{A} \neq \bar{B} \neq \bar{R}$ und auf der Geraden $c$ einen Punkt $C$ derart, daß $\bar{C} \notin \bar{a}$. Dann $\mathbf{U} = A + B + C$. Setzen wir $b = R + C$ und wählen wir einen Punkt $D \in b$, $\bar{D} \neq \bar{C}$, $\bar{D} \neq \bar{R}$. Die Punkte $A$, $B$, $C$, $D$ bilden die Konfiguration $\mathrm{K}(A, B, C, D)$ und nach Satz 7 gilt $\mathbf{B} = \mathbf{U}$. Wählen wir einen Punkt $E \in c$, $\bar{E} \neq \bar{C}$. Dann gilt $E \in \mathbf{B}(C)$ und daher die Gerade $E + C$ schneidet die Gerade $a$ im Punkt $Q$. Der Punkt $Q$ ist der einzige gemeinsame Punkt der Geraden $a$, $c$.

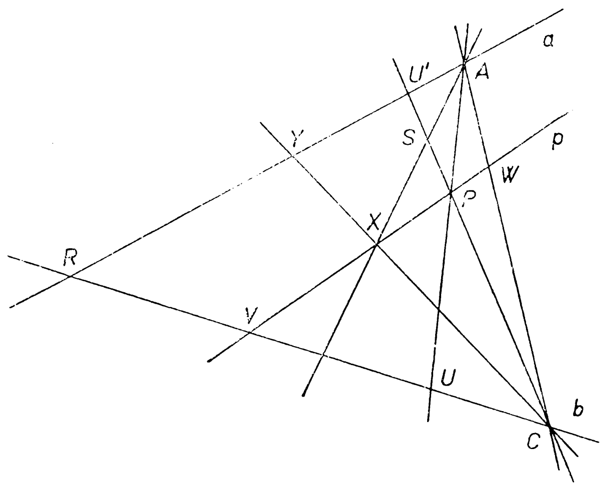


Abb. 9

Bemerkung 14. 1. Jede Ebene $\mathbf{U}$ schneidet eine solche Hyperebene $\mathbf{H}$, wo $\bar{\mathbf{U}} \not\subset \bar{\mathbf{H}}$, in einer Geraden: Es gibt einen Punkt $A \in \mathbf{U}$, mit $\bar{A} \notin \bar{\mathbf{H}}$. Durch den Punkt $A$ führen wir die Geraden $b$, $c$, wo $\bar{b} \neq \bar{c}$. Nach Axiom $A_2$ gilt $P = b \cap \mathbf{H}$, $Q = c \cap \mathbf{H}$. Dann ist $\bar{P} \neq \bar{Q}$ und $p = P + Q$, $p \subset (\mathbf{H} \cap \mathbf{U})$. Es gebe einen Punkt $X$ mit $X \in \in (\mathbf{H} \cap \mathbf{U})$, wo $X \notin p$. Dann $\bar{X} \in \bar{p}$ (sonst gälte $\bar{\mathbf{U}} \subset \bar{\mathbf{H}}$). Somit ist $\bar{X} \neq \bar{A}$. Nach Satz 8 schneidet die Gerade $X + A$ die Gerade $p$ in einem einzigen Punkt $Y$, wobei $X \neq Y$ – also im Widerspruch zum Axiom $A_2$, denn die Gerade $X + A$ besitzt mit der Hyperebene $\mathbf{H}$ mehr als einen gemeinsamen Punkt. Folglich ist $p = \mathbf{H} \cap \mathbf{U}$.

2. Zwei Ebenen $\mathbf{U}_1$, $\mathbf{U}_2$, $\bar{\mathbf{U}}_1 \neq \bar{\mathbf{U}}_2$ haben höchstens eine Gerade gemein. Zum Beweis wenden wir den Satz 8 und die Bemerkung 11 an.

3. Drei derartige Ebenen $\mathbf{U}_1$, $\mathbf{U}_2$, $\mathbf{U}_3$, wo $\bar{\mathbf{U}}_1$, $\bar{\mathbf{U}}_2$, $\bar{\mathbf{U}}_3$ keine Gerade in $\bar{P}$ gemein haben, besitzen höchstens einen gemeinsamen Punkt.

Es seien zwei Ebenen $\mathbf{U}$, $\mathbf{U}'$, $\mathbf{U} \neq \mathbf{U}'$ vorgelegt, welche eine Gerade $g$ gemein haben. Wählen wir Punkte $A \in \mathbf{U}$, $A' \in \mathbf{U}'$, $\bar{A}$, $\bar{A}' \notin \bar{g}$. Wählen wir auf der Geraden $A + A'$ einen Punkt $S$, $\bar{S} \neq \bar{A}$, $\bar{A}'$. Dann $\bar{S} \notin \bar{\mathbf{U}}$, $\bar{\mathbf{U}}'$. Wenn wir einen beliebigen Punkt $X \in \mathbf{U}$ wählen, so schneidet die Gerade $S + X$ die Ebene $\mathbf{U}'$ in einem einzigen Punkt $X'$:

a) Es sei ein Punkt $X \in \mathbf{U}$ gegeben mit $\bar{X} \neq \bar{A}$. Nach Satz 8 ist $R = (A + X) \cap g$. Betrachten wir die Ebene $V = A + X + S$. Dann $\mathbf{U}' \neq \mathbf{V}$. Wegen $R, A' \in \mathbf{V}$, $\bar{R} \neq \bar{A}'$ gilt nach Bemerkung 15 $R + A' = \mathbf{U}' \cap \mathbf{V}$. Wegen $\bar{R} + \bar{A}' \neq \bar{S} + \bar{X}$ gilt $X' = (R + A') \cap (S + X)$. Der Punkt $X'$ ist der einzige gemeinsame Punkt der Geraden $S + X$ und der Ebene $\mathbf{U}'$. (Abb. 10.)

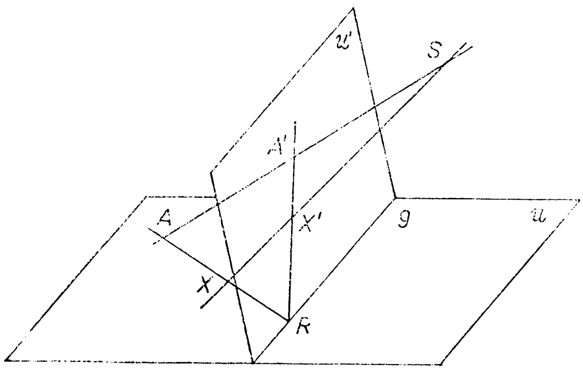


Abb. 10

b) Es gebe $X \in \mathbf{U}$, $\bar{X} = \bar{A}$. Wir wählen einen Punkt $B \in \mathbf{U}$, $\bar{B} \neq \bar{A}$, $\bar{B} \notin \bar{g}$ und konstruieren nach a) den Schnittpunkt $B'$ von der Geraden $B + S$ mit der Ebene $\mathbf{U}'$ Bei der Konstruktion des Punktes $X'$ geht man genauso vor wie in a), man ersetzt bloß die Punkte $A$, $A'$ durch die Punkte $B$, $B'$.

Die Abbildung $X \to X'$ heißt die Zentralprojektion von $\mathbf{U}$ in $\mathbf{U}'$ mit dem Projektionszentrum $S$. Der Punkt $X'$ ist die Projektion des Punktes $X$. Wird nun eine Gerade $p \subset \mathbf{U}$ gewählt, so schneiden sich die Ebenen $\mathbf{U}$, $\mathbf{V} = p + S$ in der Geraden $p'$, welche die zentrale Projektion von $p$ darstellt. Es gilt weiter $p' = \{X' \in \mathbf{U}' \mid X' = (S + X) \cap \mathbf{U}', \forall X \in p\}$. Ist $\bar{p} \neq g$, so schneiden sich die Geraden $p$, $p'$ in einem einzigen Punkt $R$ auf der Geraden $g$.

## IV

*Definition 16.* Gegeben sei ein projektiver Raum $\mathbf{P}$ mit Homomorphismus $\varkappa$ und eine Hyperebene $\mathbf{H} \subset \mathbf{P}$. Unter einem affinen Raum mit Homomorphismus (zur Hyperebene $\mathbf{H}$ angehörenden) ist die Menge $\mathbf{A}$ von Punkten aus $\mathbf{P}$ zu verstehen, deren Bilder im Homomorphismus $\varkappa$ nicht in $\bar{\mathbf{H}}$ liegen. Ist $\mathbf{U}$ ein Unterraum in $\mathbf{P}$,

$\mathbf{U} \not\subset \mathbf{H}$, so ist $\mathbf{U}_a = \mathbf{A} \cap \mathbf{U}$ ein Unterraum des affinen Raumes $\mathbf{A}$, wobei $\dim \mathbf{U}_a = \dim \mathbf{U}$. Der Unterraum des affinen Raumes von Dimension 1 bzw. 2 heißt die Gerade bzw. die Ebene.

Bemerkung 15. Für die Unterräume eines affinen Raumes $\mathbf{A}$ mit Homomorphismus wird dieselbe Bezeichnungsweise wie für die entsprechenden Unterräume in $\mathbf{P}$ aus Definition 16 verwendet. Die Einschränkung des Homomorphismus $\varkappa$ auf $\mathbf{A}$ ist ein Homomorphismus von $\mathbf{A}$ auf den, durch die Hyperebene $\mathbf{H}$ in $\mathbf{P}$ bestimmten affinen Raum $\mathbf{A}$. Zwei Geraden aus $\mathbf{A}$, die in $\mathbf{H}$ einen Punkt gemein haben, heißen parallel. Aus den Axiomen $A_2$ und $A_1$ folgt: Es ist möglich durch jeden Punkt $X \in \mathbf{A}$ eine einzige Parallele $b$ zu einer beliebigen Geraden $a \subset \mathbf{A}$ zu führen. Man schreibt dafür $a \parallel b$. Zwei Ebenen $\mathbf{U}_1$, $\mathbf{U}_2$ aus $\mathbf{A}$ sind parallel, wenn sie in der Hyperebene $\mathbf{H}$ eine Gerade gemein haben. Nach Bemerkung 15 ist es möglich durch jeden Punkt aus $A$ genau eine Parallelebene zu der gegebenen Ebene zu führen. Mit Satz 8 und mit den Definitionen 3, 4 folgt: Jede Ebene eines affinen Raumes $\mathbf{A}$ stellt die affine Ebene mit Homomorphismus dar.

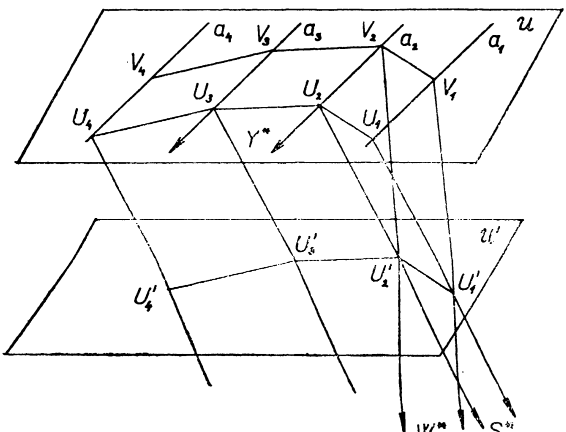


Abb. 11

Bemerkung 16. Gegeben sei eine Zentralprojektion $\mathbf{U}$ in $\mathbf{U}'$, $\mathbf{U} \parallel \mathbf{U}'$ mit einem Projektionszentrum $S$. Sind die Ebenen $\mathbf{U}$, $\mathbf{U}'$ parallel, so schneiden sich in der Geraden $g$, $g \subset \mathbf{H}$. Ist $p \subset \mathbf{U}$ eine Gerade in dem affinen Raum $\mathbf{A}$ und $p'$ ihre zentrale Projektion aus dem Projektionszentrum $S$, dann nach Definition der Zentralprojektion ergibt sich, daß $p \parallel p'$. Wenn $S \in \mathbf{H}$, so wird die entsprechende Projektion parallel genannt.

*Satz 9. Jede Ebene im affinen Raum mit Homomorphismus ist desarguessche.*

Beweis. Es werde angenommen, daß $\mathbf{A}$ ein affiner Raum bezüglich der Hyperebene $\mathbf{H} \subset \mathbf{P}$ ist. Dabei sei $\mathbf{U}$ eine Ebene in $\mathbf{A}$. Nach Bemerkung 16 ist $\mathbf{U}$ eine affine Ebene mit Homomorphismus. Nach Definition 8 genügt es zu zeigen, daß in der Ebene $\mathbf{U}$ die Schließungssätze (d) und $(D_P)$ gelten.

1. Es liege die Konfiguration (k) in der Ebene $\mathbf{U}$ vor (Abb. 11, wo (k) gleich wie in Abb. 1 bezeichnet ist).

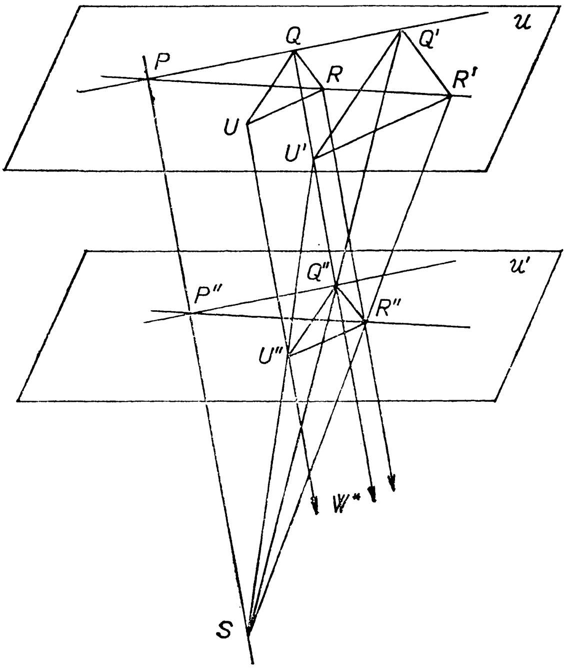


Abb. 12

Wählen wir eine Ebene $\mathbf{U}'$ $\mathbf{U}' \neq \mathbf{U}$, $\mathbf{U} \parallel \mathbf{U}'$ und einen Punkt $U_1'$, $U_1' \in \mathbf{U}'$. Setzen wir $S^* = (U_1 + U_1') \cap \mathbf{H}$ und betrachten wir die parallele Projektion der Ebene $\mathbf{U}$ in $\mathbf{U}'$ mit dem Projektionszentrum $S^*$. Wenn wir die Projektion der Punkte $U_1, U_2, U_3, U_4$ mit $U_1', U_2', U_3', U_4'$ bezeichnen, so $U_j + U_{j+1} \parallel U_j' + U_{j+1}'$ für $j \in \{1, 2, 3\}$. Setzen wir weiter $W^* = (V_1 + U_1') \cap \mathbf{H}$ und betrachten wir die parallele Projektion der Ebene $\mathbf{U}'$ in $\mathbf{U}$ aus $W^*$. Die Projektion des Punktes $U_1'$ ist $V_1$, die Projektion des Punktes $U_2'$ werde mit $U_2''$ bezeichnet. Wegen $U_1 + U_2 \parallel U_1' + U_2'$, $U_1 + U_2 \parallel V_1 + V_2$ gilt $U_1' + U_2' \parallel V_1 + V_2$ und nach Bemerkung 17 $U_2'' \in V_1 + V_2$. Setzen wir $\mathbf{V}_1 = U_1 + U_1' + V_1$, $\mathbf{V}_2 = U_2 + U_2' + V_2$. Wenn wir mit $Y^*$ einen gemeinsamen Punkt der Geraden $a_i$, $\forall i \in \{1, 2, 3, 4\}$ bezeichnen, so $\mathbf{U}_1 \cap \mathbf{H} = \mathbf{V}_2 \cap \mathbf{H} = Y^* + S^*$ und $\mathbf{V}_1 \parallel \mathbf{V}_2$. Wegen $W^* \in \mathbf{V}_1$ auch $W^* \in \mathbf{V}_2$ und $W^* + U_2' \subset \mathbf{V}_2$. Wegen $U_2 + V_2 = \mathbf{U} \cap \mathbf{V}_2$ gilt $U_2'' \in U_2 + V_2$. Aus den Beziehungen

$U_2'' \in V_1 + V_2$, $U_2'' \in U_2 + V_2$ folgt $U_2'' = V_2$. Vollkommen analog finden wir, daß die Punkte $V_3$, $V_4$ parallele Projektionen der Punkte $U_3'$, $U_4'$ aus dem Punkt $W^*$ sind. Nun werde angenommen, es gebe eine, durch die Punkte $U_1$, $U_4$ gehende Gerade $p$. Ist $p'$ die zentrale Projektion der Geraden $p$ aus dem Projektionszentrum $S^*$, so $p' \| p$ und $U_1'$, $U_4' \in p'$. Somit gilt für die zentrale Projektion $p''$ der Geraden $p'$ aus dem Punkt $W^*$, daß $p'' \| p' \| p$ und $V_1$, $V_4 \in p''$. Also in der Ebene $\mathbf{U}$ gilt der Schließungssatz (d).

2. Gegeben sei die Konfiguration ($K_P$) in der Ebene $\mathbf{U}$ (Abb. 12, mit derselben Bezeichnungweise wie in Abbildung 2; die Punkte $V$, $V'$ sind nicht abgebildet worden).

Wählen wir eine Ebene $\mathbf{U}'$, $\mathbf{U}' \| \mathbf{U}$, $\mathbf{U}' \neq \mathbf{U}$ und einen Punkt $P''$, $P'' \in \mathbf{U}'$. Setzen wir $W^* = (P + P'') \cap \mathbf{H}$ und konstruieren wir die Projektionen $Q''$, $R''$, $U''$ der Punkte $Q$, $R$, $U$ aus dem Punkt $W^*$ in $\mathbf{U}'$. Setzen wir $\mathbf{V}_1 = P + P'' + Q$, $V_2 = P + P'' + R$, $\mathbf{V}_3 = Q' + R' + Q''$. Offensichtlich $Q' \in \mathbf{V}_1$, $R' \in \mathbf{V}_2$. Wegen $P + Q \| P'' + Q''$, $P + R \| P'' + R''$ gilt $Q'' \in \mathbf{V}_1$, $R'' \in \mathbf{V}_2$. Weiter gilt $Q + R \| Q'' + R''$, $Q + R \| Q' + R'$ und daraus $Q' + R' \| Q'' + R''$. Folglich $R'' \in \mathbf{V}_3$. Aus den Voraussetzungen der Konfiguration ($K_P$) folgt, daß die Ebenen $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$, $\mathbf{V}_3$ voneinander verschiedenen sind. Nach Bemerkung 15 gilt $P + P'' = \mathbf{V}_1 \cap \mathbf{V}_2$, $Q' + Q'' = \mathbf{V}_1 \cap \mathbf{V}_3$, $R' + R'' = \mathbf{V}_2 \cap \mathbf{V}_3$. Die Geraden $Q' + Q''$, $R' + R''$ schneiden sich im Punkt $S$ auf der Geraden $P + P''$ und $S \notin \mathbf{U}$, $\mathbf{U}'$. Betrachten wir weiter die Ebenen $\mathbf{W}_1 = U' + Q' + Q''$, $\mathbf{W}_2 = U' + R' + R''$. Wegen $U' + Q' \| U'' + Q''$, $U' + R' \| U'' + R''$, ist $U'' \in \mathbf{W}_1$, $\mathbf{W}_2$. Aus der Konfiguration ($K_P$) folgt, daß die Ebenen $\mathbf{W}_1$, $\mathbf{W}_2$, $\mathbf{V}_3$ voneinander verschieden sind und es gilt $\mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2 = U' + U''$, $\mathbf{W}_1 \cap \mathbf{V}_3 = Q' + Q''$, $\mathbf{W}_2 \cap \mathbf{V}_3 = R' + R''$ und somit die Gerade $U' + U''$ geht durch den Punkt $S$. Der Punkt $U'$ ist die Projektion des Punktes $U''$ aus dem Punkt $S$ in die Ebene $\mathbf{U}$. Nun konstruieren wir die Projektion $V''$ des Punktes $V$ von Konfiguration ($K_P$) aus dem Punkt $W^*$ in die Ebene $\mathbf{U}'$ und analog zum Punkt $U$ wollen wir beweisen, daß der Punkt $V'$ die Projektion des Punktes $V''$ von Punkt $S$ in $\mathbf{U}$ ist. Danach gilt $U + V \| U'' + V''$, $U'' + V'' \| U' + V'$ und hieraus $U + V \| U' + V'$. Der Schließungssatz ($D_P$) ist also in der Ebene $\mathbf{U}$ erfüllt.

## LITERATUR


[1] *Dembowski, P.:* Finite Geometries. New York, 1968.

[2] *Klingenberg, W.:* Projektive Geometrien mit Homomorphismus, Math. Ann., 132, 180—200, 1956.

[3] *Klingenberg, W.:* Projektive Geometrie und lineare Algebra über verallgemeinerten Bewertungsringen. Oxford. Proc. Coll. Utrecht 1959. Algebraical and topological foundations of geometry, 99—107, 1962.

[4] *Lenz, H.:* Vorlesungen über projektive Geometrie, Leipzig 1965.

[5] *Machala, F.:* Desarguessche affine Ebenen mit Homomorphismus. Geom. Ded. 3, 493—509, 1975.

[6] *Pickert, G.:* Projektive Ebenen. Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1955.

*Shrnutí*

# ROVINA V PROJEKTIVNÍM PROSTORU S HOMOMORFISMEM

FRANTIŠEK MACHALA

V práci [2] definoval W. Klingenberg projektivní a afinní roviny s homomorfismem, desarguesovské afinní roviny s homomorfismem, projektivní a afinní prostory s homomorfismem dimense 3. Ukázal, že všechny roviny v afinním prostoru s homomorfismem jsou desarguesovské.

V předkládané práci jsou definovány projektivní a afinní prostory s homomorfismem libovolné (konečné i nekonečné dimense). Užitím výsledků z [5] je ukázáno, že všechny roviny v obecném afinním prostoru s homomorfismem jsou desarguesovské.

*Резюме*

# ПЛОСКОСТЬ В ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ С ГОМОМОРФИЗМОМ

ФРАНТИШЕК МАХАЛА

В работе [2] определил В. Клингенберг проективные и аффинные плоскости с гомоморфизмом, дезарговы аффинные плоскости с гомоморфизмом, трехмерные проективные и аффинные пространства с гомоморфизмом. Он показал, что все плоскости в аффинном пространстве с гомоморфизмом дезаргобы.

В предлагаемой работе определены проективные и аффинные пространства с гомоморфизмом произвольной (конечной и безконечной) размерности. Применением результатов из [5] показывается, что все плоскости в общем аффинном пространстве с гомоморфизмом дезарговы.