Holger Boche

Konvergenzverhalten der konjugierten Shannonschen Abtastreihe

Acta Mathematica et Informatica Universitatis Ostraviensis, Vol. 5 (1997), No. 1, 13--26

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/120510

Acta Mathematica et Informatica Universitatis Ostraviensis 5 (1997) 13–26

Konvergenzverhalten der konjugierten Shannonschen Abtastreihe

Holger Boche

Abstract: This paper deals with a question proposed by F. Schipp, regarding the convergence behavior of the conjugated Shannon sampling series for non-bandlimited functions. The convergence behavior is characterized according to the Sobolev Spaces $H^s(\mathbb{R})$. If $s > \frac{1}{2}$ then the sequence of the conjugated Shannon sampling series is uniformly convergent for all elements of the space $H^s(\mathbb{R})$. If $s < \frac{1}{2}$ then a function $f_1 \in H^s(\mathbb{R})$ will be constructed, so that the sequence of the conjugated Shannon sampling series is divergent everywhere. The Hilbert Transform $\tilde{f}_1$ is a continuous function.

Key Words: Shannon sampling series, conjugated function, Sobolev Spaces, Hilbert Transform

Mathematics Subject Classification: 42A50, 41A05, 94A05, 94A12

1. Einleitung und Ergebnisse

Das Shannonsche Abtast-Theorem [9] [3] besagt, daß jede bandbegrenzte quadra- tisch integrierbare Funktion f mit der Bandgrenze $\pi\omega$ in der Form einer Abtast-Reihe

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k}{\omega}\right) \frac{\sin \pi(\omega t - k)}{\pi(\omega t - k)} \tag{1}$$

dargestellt werden kann. Die Shannonsche Abtast-Reihe in (1) besitzt für die Anwendungen eine große Bedeutung [9] [10] [11].Hierbei heißt eine quadratisch integrierbare Funktion bandbegrenzt, wenn für die Fourier-Transformierte die Beziehung $\hat{f}(x) = 0$ fast überall für $|x| > \pi\omega$ gilt. Die Zahl $\pi\omega$ heißt Bandgrenze der Funktion f. Die Fourier-Transformierte ist durch

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-ixt}\, dt$$

definiert, wobei das Integral als L^2-Grenzwert zu verstehen ist [12]. Im weiteren betrachten wir die Hilbert-Transformierte $\tilde{f}$ der Funktion f

$$\tilde{f}(t) = VP\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\tau)}{t-\tau}\,d\tau \quad ,t \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Das Integral existiert als Cauchyscher Hauptwert [2]. Für quadratisch integrierbare Funktionen f mit der Bandgrenze $\pi\omega$ gilt bekanntlich [2]

$$\tilde{f}(t) = \frac{-i}{2\pi}\int_{-\pi\omega}^{\pi\omega}\hat{f}(x)\mathrm{sign}(x)e^{ixt}\,dx\ . \tag{3}$$

Für die Funktion $\tilde{f}$ gewinnt man die Abtast-Reihe [3] [4]

$$\tilde{f}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\Big(\frac{k}{\omega}\Big)\frac{\sin^2\frac{\pi}{2}(\omega t-k)}{\frac{\pi}{2}(\omega t-k)} \quad ,t \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

In Anschluß an [3] [4] wollen wir diese Reihe im folgenden als konjugierte Shannonsche Abtast-Reihe bezeichnen. In den Anwendungen wurde die konjugierte Shannonsche Abtast-Reihe erstmals in [8] untersucht. In der Literatur [3] [4] [5] wurde bereits ausführlich das Verhalten der Abtast-Reihen (1) und (4) untersucht.
Bei diesen Untersuchungen wurde vorausgesetzt, daß die Funktion f stetig, quadratisch integrierbar und $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ ist. Unter diesen Voraussetzungen kann gezeigt werden, daß

$$\lim_{\omega\to\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} f\Big(\frac{k}{\omega}\Big)\frac{\sin\pi(\omega t-k)}{\pi(\omega t-k)} = f(t) \tag{5}$$

und

$$\lim_{\omega\to\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} f\Big(\frac{k}{\omega}\Big)\frac{\sin^2\frac{\pi}{2}(\omega t-k)}{\frac{\pi}{2}(\omega t-k)} = \tilde{f}(t) \tag{6}$$

gleichmäßig auf ganz $\mathbb{R}$ gilt.
In dieser Arbeit sollen Divergenzaussagen für die Folge der konjugierten Abtast-Reihe bewiesen werden.
Dazu sei im weiteren $f \in C_0[0,1]$ und $\tilde{f}$ die Hilbert-Transformierte. Es gilt bekanntlich $\tilde{f} \in L^2(\mathbb{R})$ [2]. Mit $C_0[0,1]$ bezeichnen wir die Menge der auf dem Intervall $[0,1]$ konzentrierten stetigen Funktionen. Die Funktion $\tilde{f}$ muß nicht unbedingt stetig sein. In [3] wurde gezeigt, daß unter den genannten Voraussetzungen

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(t)-\sum_{k=1}^{n-1} f\Big(\frac{k}{n}\Big)\frac{\sin\pi(nt-k)}{\pi(nt-k)}\right|^2 dt = 0 \tag{7}$$

gilt. Da die Hilbert-Transformation eine stetige und lineare Abbildung des Raumes $L^2(\mathbb{R})$ in sich ist, haben wir

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Big| \tilde{f}(t) - \sum_{k=1}^{n-1} f\Big(\frac{k}{n}\Big) \frac{\sin^2 \frac{\pi}{2}(nt-k)}{\frac{\pi}{2}(nt-k)} \Big|^2 \, dt = 0 \,, \tag{8}$$

d.h. die konjugierte Reihe konvergiert in der L^2-Norm gegen die Funktion $\tilde{f}$.
Wir wollen nun das punktweise Verhalten der Folge der konjugierten Reihe untersuchen. Da die Hilbert-Transformierte einer Funktion $f \in C_0[0,1]$ im allgemeinen nicht stetig ist, müssen wir die Menge $C_0[0,1]$ geeignet variieren.
Dazu bezeichnen wir mit B_1 die Vervollständigung der Menge $C_0^\infty[0,1]$ mit der Norm

$$\|f\|_{B_1} = \max(\|f\|_{C_0[0,1]}, \|\tilde{f}\|_{C(\mathbb{R})}) \,. \tag{9}$$

Der Raum B_1 ist mit der Norm $\|\cdot\|_{B_1}$ ein Banach-Raum, und die Hilbert-Transformation ist eine lineare und stetige Abbildung des Raumes B_1 in den Raum der stetigen und beschränkten Funktionen.
Wie üblich [12] bezeichnet $H^s(\mathbb{R})$ den Sobolew-Raum aller Funktionen $f \in L^2(\mathbb{R})$ mit

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(x)|^2 (1+|x|^2)^{\frac{s}{2}} \, dx < \infty \,. \tag{10}$$

Für die Menge definieren wir durch die Wurzel der linken Seite von (10) die Norm $\|\cdot\|_{H^s(\mathbb{R})}$. Mit diesen Bezeichnungen erhalten wir den folgenden Satz.

Satz 1. *Es sei $0 < s < \frac{1}{2}$ beliebig. Es existiert eine Funktion $f_1 \in B_1 \cap H^s(\mathbb{R})$, so daß*

$$\limsup_{n\to\infty} \Big| \sum_{k=1}^{n-1} f_1\Big(\frac{k}{n}\Big) \frac{\sin^2 \frac{\pi}{2}(nt-k)}{\frac{\pi}{2}(nt-k)} \Big| = \infty \quad \forall t \in (0,1) \tag{11}$$

gilt.

Eine positive Konvergenzaussage trifft der folgende Satz.

Satz 2. *Es sei $s > \frac{1}{2}$ beliebig. Für alle Funktionen $f \in H^s(\mathbb{R})$ existiert die unendliche konjugierte Abtast-Reihe*

$$(\tilde{S}_n f)(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\Big(\frac{k}{n}\Big) \frac{\sin^2 \frac{\pi}{2}(nt-k)}{\frac{\pi}{2}(nt-k)} \tag{12}$$

und stellt eine bandbegrenzte Funktion dar. Es gilt weiterhin

$$\lim_{n\to\infty} \|\tilde{f} - \tilde{S}_n f\|_{C(\mathbb{R})} = 0 \ . \tag{13}$$

Aufgrund von

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(x)|\, dx \le C(s) \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(x)|^2 (1+|x|^2)^{\frac{s}{2}}\, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

für $s > \frac{1}{2}$ ergibt sich der Satz 2 aus dem bereits zitierten Ergebnis von P. Butzer und W. Splettstößer [3] [4].
Es soll nun noch auf eine Beziehung zur Theorie der konjugierten Fourier-Reihen bzw. Fourier-Integrale eingegangen werden. Bei Konvergenzuntersuchungen zu diesen Reihen bzw. Integralen spielt das konjugierte Dirichlet-Integral

$$\frac{2}{\pi} \int_0^1 f(\tau) \frac{\sin^2 \frac{\pi}{2} n(t-\tau)}{t-\tau}\, d\tau$$

eine wesentliche Rolle [1]. Aus dem bekannten Resultat von L. Carleson [7] ergibt sich für alle $f \in C_0[0,1]$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^1 f(\tau) \frac{\sin^2 \frac{\pi}{2} n(t-\tau)}{t-\tau}\, d\tau = \tilde{f}(t) \quad \text{f.ü.}\ .$$

Die konjugierte Abtast-Summe $\tilde{S}_n f$ stellt eine Riemannsche Näherungssumme des konjugierten Dirichlet-Integrales dar. Der Satz 1 zeigt nun, daß beim Übergang vom konjugierten Dirichlet-Integral zu den konjugierten Abtast-Reihen die fast überall Konvergenz verloren geht.
Die Arbeit ist während eines Arbeitsaufenthaltes an der RWTH-Aachen entstanden. Herrn Professor P.L. Butzer und Herrn Professor R. Nessel dankt der Verfasser für die stimulierende Diskussion zu dieser Arbeit.
Die Arbeit wurde durch die Deutsche Forschungsgemeinschaft unterstützt.

2. Beweis von Satz 1

Für den Beweis des ersten Satzes benötigen wir das folgende Lemma.

Lemma 1. *Es sei* $0 < s < \frac{1}{2}$ *beliebig. Es sei* $\{t_1, \ldots, t_l\}$ *eine beliebige Menge von Punkten aus dem Intervall* $(0,1)$ *und* $\{p_1, \ldots, p_l\}$ *eine beliebige Menge von reellen Zahlen. Dann existiert eine Funktion* $f \in C_0[0,1]$ *mit:*
i) $f(t_n) = p_n$ $n = 1, \ldots, l$ *und* $\|f\|_{C_0[0,1]} \leq 2 \max |p_n|$

ii) $\|f\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{C_0[0,1]}$

iii) Die Hilbert-Transformierte $\tilde{f}$ *der Funktion* f *ist stetig mit*
$\|\tilde{f}\|_{C(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{C_0[0,1]}$.

Der Beweis von Lemma 1 wird am Ende dieses Abschnitts gegeben.

Beweis von Satz 1 Es sei $0 < s < \frac{1}{2}$ beliebig. Es sei $m \geq 2$ eine beliebige natürliche Zahl. Wir betrachten die Intervalle $I_{k,m} = \left[\frac{m-k}{m}, \frac{m-k+1}{m}\right)$.
Es seien $m < p_{0,m} < \ldots < p_{m-1,m}$ die ersten auf m folgenden Primzahlen. Mit $l_{i,m}$, $i = 0, \ldots, m-1$, bezeichnen wir die größte natürliche Zahl, so daß

$$\frac{l_{i,m}}{p_{i,m}} < \frac{m-i-1}{m}$$

ist. Wir definieren nun eine Funktion ϕ_m wie folgt:
Es sei i_0 eine beliebige natürliche Zahl aus dem Intervall $[0, \ldots, m-1]$. Dann setzen wir

$$\phi_m\Big(\frac{l}{p_{i_0,m}}\Big) = 1 \quad \text{für} \quad 1 \leq l \leq l_{i_0,m}$$

und

$$\phi_m\Big(\frac{l}{p_{i_0,m}}\Big) = 0 \quad \text{für} \quad l_{i_0,m} < l \leq p_{i_0,m} - 1 \ .$$

Aufgrund von Lemma 1 kann die Funktion ϕ_m auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt werden, wobei $\phi_m \in C_0[0,1]$, $\|\phi_m\|_{C_0[0,1]} \leq 2$, $\|\phi_m\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq 2$ und $\|\tilde{\phi}_m\|_{C(\mathbb{R})} \leq 2$ gilt. Damit haben wir $\|\phi_m\|_{B_1} \leq 2$. Betrachten wir den Banach-Raum $B_2 := B_1 \cap H^s(\mathbb{R})$ mit der Norm

$$\|f\|_{B_2} := \max(\|f\|_{B_1}, \|f\|_{H^s(\mathbb{R})}) \ ,$$

so erhalten wir $\|\phi_m\|_{B_2} \leq 2$.
Wir untersuchen nun das Verhalten der konjugierten Reihe der Funktion ϕ_m.
Dazu sei $x \in (0,1)$ beliebig. Es existiert genau eine Zahl k_0 mit $x \in I_{k_0,m}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\frac{2}{p_{k_0,m}\pi} \sum_{l=1}^{p_{k_0,m}-1} \phi_m\Big(\frac{l}{p_{k_0,m}}\Big) \frac{\sin^2 \frac{\pi}{2}(p_{k_0,m}x - l)}{(x - \frac{l}{p_{k_0,m}})} &= \frac{2}{p_{k_0,m}\pi} \sum_{l=1}^{l_{k_0,m}} \frac{\sin^2 \frac{\pi}{2}(p_{k_0,m}x - l)}{(x - \frac{l}{p_{k_0,m}})} \\ &= \frac{2}{p_{k_0,m}\pi} \sum_{l=1}^{l_{k_0,m}} \frac{1}{x - \frac{l}{p_{k_0,m}}} -\end{aligned}$$

$$-\frac{2\cos p_{k_0,m}\pi x}{p_{k_0,m}\pi}\sum_{l=1}^{l_{k_0,m}}\frac{(-1)^l}{x-\frac{l}{p_{k_0,m}}}\ .$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}\left|\frac{2}{p_{k_0,m}\pi}\sum_{l=1}^{p_{k_0,m}-1}\phi_m\Big(\frac{l}{p_{k_0,m}}\Big)\frac{\sin^2\frac{\pi}{2}(p_{k_0,m}x-l)}{(x-\frac{l}{p_{k_0,m}})}\right| &\geq \left|\frac{2}{p_{k_0,m}\pi}\sum_{l=1}^{l_{k_0,m}}\frac{1}{x-\frac{l}{p_{k_0,m}}}\right|- \\ &\quad -\left|\frac{2}{p_{k_0,m}\pi}\sum_{l=1}^{l_{k_0,m}}\frac{(-1)^l}{x-\frac{l}{p_{k_0,m}}}\right|\ .\end{aligned}$$

Wir wollen nun die einzelnen Glieder der rechten Seite abschätzen. Dazu sei $l^1_{k_0,m}$ die kleinste natürliche Zahl, für die

$$\frac{l^1_{k_0,m}}{p_{k_0,m}}\geq\frac{m-k_0+1}{m}$$

ist. Folglich erhalten wir

$$\begin{aligned}\left|\frac{2}{p_{k_0,m}\pi}\sum_{l=1}^{l_{k_0,m}}\frac{1}{x-\frac{l}{p_{k_0,m}}}\right| &\geq \frac{2}{p_{k_0,m}\pi}\sum_{l=1}^{l_{k_0,m}}\frac{1}{\frac{m-k_0+1}{m}-\frac{l}{p_{k_0,m}}} \\ &\geq \frac{2}{p_{k_0,m}\pi}\sum_{l=1}^{l_{k_0,m}}\frac{1}{\frac{l^1_{k_0,m}}{p_{k_0,m}}-\frac{l}{p_{k_0,m}}} \\ &= \frac{2}{\pi}\sum_{l=1}^{l_{k_0,m}}\frac{1}{l^1_{k_0,m}-l}=\frac{2}{\pi}\sum_{l=l^1_{k_0,m}-l_{k_0,m}}^{l^1_{k_0,m}}\frac{1}{l} \\ &= \frac{2}{\pi}\ln\frac{l^1_{k_0,m}}{l^1_{k_0,m}-l_{k_0,m}}+O(1) \\ &\geq \frac{2}{\pi}\ln\Big(\frac{(m-k_0+1)p_{k_0,m}}{m}\frac{m}{3p_{k_0,m}}\Big)+O(1) \\ &= \frac{2}{\pi}\ln(m-k_0+1)+O(1)\ .\end{aligned}$$

Dabei wurde $l^1_{k_0,m}\geq\frac{(m-k_0+1)p_{k_0,m}}{m}$ und $\frac{l^1_{k_0,m}}{p_{k_0,m}}-\frac{l_{k_0,m}}{p_{k_0,m}}\leq\frac{3}{m}$ beachtet. Im weiteren sei $1\leq k_0\leq m-\sqrt{m}$, dann ist also für

$$x\in I_m:=\Big[\frac{m-(m-\sqrt{m})-2}{m},1\Big)=\Big[\frac{1}{\sqrt{m}}-\frac{2}{m},1\Big)$$

$$\frac{2}{p_{k_0,m}\pi}\sum_{l=1}^{l_{k_0,m}}\frac{1}{x-\frac{l}{p_{k_0,m}}}\geq\frac{1}{\pi}\ln m+O(1)\ . \tag{14}$$

Für das zweite Glied erhalten wir

$$\Big|\frac{2}{p_{k_0,m}\pi}\sum_{l=1}^{l_{k_0,m}}\frac{(-1)^l}{x-\frac{l}{p_{k_0,m}}}\Big|\leq\Big|\frac{2}{p_{k_0,m}\pi(x-\frac{l_{k_0,m}}{p_{k_0,m}})}\Big|\ .$$

Es ist aber $x-\frac{l_{k_0,m}}{p_{k_0,m}}\geq\frac{l_{k_0,m}+1}{p_{k_0,m}}-\frac{l_{k_0,m}}{p_{k_0,m}}=\frac{1}{p_{k_0,m}}$, also

$$\Big|\frac{1}{p_{k_0,m}\pi}\sum_{l=1}^{l_{k_0,m}}\frac{(-1)^l}{x-\frac{l}{p_{k_0,m}}}\Big|\leq\frac{2}{\pi}\ .$$

Damit haben wir für alle $m\geq m_0$

(15)

$$\Big|\frac{2}{p_{k_0,m}\pi}\sum_{l=1}^{p_{k_0,m}-1}\phi_m\big(\frac{l}{p_{k_0,m}}\big)\frac{\sin^2\frac{\pi}{2}(p_{k_0,m}x-l)}{(x-\frac{l}{p_{k_0,m}})}\Big|\geq\frac{1}{\pi}\ln m+O(1)>C_1\ln m$$

für $x\in I_m$.

Es sei $m\geq m_0$ eine beliebige natürliche Zahl. Wir wählen eine Funktion $f_m\in C_0^\infty[0,1]$ mit $\|f_m-\phi_m\|_{B_2}<\frac{1}{\ln p_{m-1,m}}$. Dann gilt für $2\leq k\leq p_{m-1,m}$

$$\begin{aligned}\Big|\frac{2}{k\pi}\sum_{l=1}^{k-1}\phi_m\big(\frac{l}{k}\big)\frac{\sin^2\frac{\pi}{2}(kx-l)}{(x-\frac{l}{k})}\Big| &\leq \Big|\frac{2}{k\pi}\sum_{l=1}^{k-1}\Big(f_m\big(\frac{l}{k}\big)-\phi_m\big(\frac{l}{k}\big)\Big)\frac{\sin^2\frac{\pi}{2}(kx-l)}{(x-\frac{l}{k})}\Big|+\\ &\quad+\Big|\frac{2}{k\pi}\sum_{l=1}^{k-1}f_m\big(\frac{l}{k}\big)\frac{\sin^2\frac{\pi}{2}(kx-l)}{(x-\frac{l}{k})}\Big|\\ &\leq C_2\|f_m-\phi_m\|_{B_2}\ln k+\\ &\quad+\Big|\frac{2}{k\pi}\sum_{l=1}^{k-1}f_m\big(\frac{l}{k}\big)\frac{\sin^2\frac{\pi}{2}(kx-l)}{(x-\frac{l}{k})}\Big|\\ &\leq C_2+\Big|\frac{2}{k\pi}\sum_{l=1}^{k-1}f_m\big(\frac{l}{k}\big)\frac{\sin^2\frac{\pi}{2}(kx-l)}{(x-\frac{l}{k})}\Big|\ .\end{aligned}$$

Bei dieser Rechnung wurde

$$\Big|\sum_{l=1}^{k-1}f\big(\frac{l}{k}\big)\frac{\sin^2\frac{\pi}{2}(kx-l)}{\frac{\pi}{2}(kx-l)}\Big|\quad\leq\quad\|f\|_{C_0[0,1]}\sum_{l=1}^{k-1}\Big|\frac{\sin^2\frac{\pi}{2}(kx-l)}{\frac{\pi}{2}(kx-l)}\Big|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \|f\|_{C_0[0,1]}\Big(\sum_{l=1;|x-\frac{l}{k}|\leq\frac{2}{l}}^{k-1}\Big|\frac{\sin^2\frac{\pi}{2}(kx-l)}{\frac{\pi}{2}(kx-l)}\Big| + \\
&+\sum_{l=1;|x-\frac{l}{k}|>\frac{2}{l}}^{k-1}\Big|\frac{\sin^2\frac{\pi}{2}(kx-l)}{\frac{\pi}{2}(kx-l)}\Big|\Big) \\
&\leq \|f\|_{C_0[0,1]}\Big(5+\sum_{l=1;|x-\frac{l}{k}|>\frac{2}{l}}^{k-1}\Big|\frac{1}{\frac{\pi}{2}(kx-l)}\Big|\Big) \\
&\leq \|f\|_{C_0[0,1]}\Big(5+\frac{4}{\pi}\sum_{l=1}^{k}\frac{1}{l}\Big) \\
&\leq \|f\|_{C_0[0,1]}\big(5+\frac{4}{\pi}\ln(k+1)\big)
\end{aligned}$$

beachtet.
Damit existiert zu jedem $x \in I_m$ eine natürliche Zahl $k_0 \leq p_{m-1,m}$ mit

$$\Big|\frac{2}{k\pi}\sum_{l=1}^{k-1} f_m\big(\frac{l}{k}\big)\frac{\sin^2\frac{\pi}{2}(kx-l)}{(x-\frac{l}{k})}\Big| \geq C_3 \ln m\ . \tag{16}$$

Wir wählen nun induktiv eine Folge $\{m_i\}$ von natürlichen Zahlen:
Es sei m_0 das Anfangsglied und $l_m := p_{m-1,m}$.
Angenommen, wir haben die Zahlen $m_1, \ldots, m_i$ bereits gewählt, dann sei m_{i+1} die kleinste natürliche Zahl mit:

1. $(10 \ln m_i)^2 < \ln m_{i+1}$

2. Ist

$$F_i(x) := \sum_{k=0}^{i}\frac{f_{m_k}(x)}{\sqrt{\ln m_k}}\ ,$$

so gilt

$$\Big|\tilde{F}_i(x) - \frac{2}{n\pi}\sum_{l=1}^{k-1}F_i\big(\frac{l}{n}\big)\frac{\sin^2\frac{\pi}{2}(nx-l)}{(x-\frac{l}{n})}\Big| < 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

für alle $n \geq m_{i+1}$.
Eine solche Wahl ist möglich, da $F_i \in C_0^\infty[0,1]$ ist, und somit die konjugierte Reihe gleichmäßig gegen die C^∞-Funktion $\tilde{F}_i$ konvergiert. Da weiterhin $f_m \in B_2$ ist, haben wir

$$|\tilde{F}_i(x)| \leq \sum_{k=0}^{i}\frac{\|f_{m_k}\|_{B_2}}{\sqrt{\ln m_k}} < 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\ln m_k}} = C_4\ .$$

Damit ergibt sich für alle $n \geq m_{i+1}$

$$\left|\frac{2}{n\pi}\sum_{l=1}^{k-1} F_i\left(\frac{l}{n}\right)\frac{\sin^2\frac{\pi}{2}(nx-l)}{(x-\frac{l}{n})}\right| < 1 + C_4 \quad \forall x \in \mathbb{R}\,. \tag{17}$$

Wir betrachten nun die Funktion

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_{m_k}(x)}{\sqrt{\ln m_k}}\,. \tag{18}$$

Es gilt

$$\|f\|_{B_2} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|f_{m_k}\|_{B_2}}{\sqrt{\ln m_k}} \leq 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\ln m_k}} = C_4\,.$$

Es sei $x \in (0,1)$ beliebig. Dann existiert eine natürliche Zahl i_0 mit $x \in I_{m_i}$ für alle $i \geq i_0$. Es sei $i \geq i_0$ beliebig. Dann existiert eine natürliche Zahl q_i, $m_i < q_i \leq l_{m_i}$ mit

$$\begin{aligned}\left|\frac{2}{q_i\pi}\sum_{l=1}^{q_i-1} f\left(\frac{l}{n}\right)\frac{\sin^2\frac{\pi}{2}(q_ix-l)}{(x-\frac{l}{q_i})}\right| \quad &\geq \quad \frac{1}{\sqrt{\ln m_i}}\left|\frac{2}{q_i\pi}\sum_{l=1}^{q_i-1} f_{m_i}\left(\frac{l}{n}\right)\frac{\sin^2\frac{\pi}{2}(q_ix-l)}{(x-\frac{l}{q_i})}\right| - \\ &\quad - \left|\frac{2}{q_i\pi}\sum_{l=1}^{q_i-1} F_i\left(\frac{l}{n}\right)\frac{\sin^2\frac{\pi}{2}(q_ix-l)}{(x-\frac{l}{q_i})}\right| - \\ &\quad - \left|\frac{2}{q_i\pi}\sum_{l=1}^{q_i-1} R_i\left(\frac{l}{n}\right)\frac{\sin^2\frac{\pi}{2}(q_ix-l)}{(x-\frac{l}{q_i})}\right|\,.\end{aligned}$$

Mit

$$R_i(x) := \sum_{k=i+1}^{\infty} \frac{f_{m_k}(x)}{\sqrt{\ln m_k}}$$

gilt

$$\begin{aligned}\left|\frac{2}{q_i\pi}\sum_{l=1}^{q_i-1} R_i\left(\frac{l}{n}\right)\frac{\sin^2\frac{\pi}{2}(q_ix-l)}{(x-\frac{l}{q_i})}\right| \quad &\leq \quad C_2 \ln q_i \|R_i\|_{C_0[0,1]} \sum_{k=i+1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\ln m_k}} \\ &\leq \quad 2C_2\sqrt{\ln m_{i+1}} \sum_{k=i+1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\ln m_k}} \leq C_5\,.\end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\left|\frac{2}{q_i\pi}\sum_{l=1}^{q_i-1} f\left(\frac{l}{n}\right)\frac{\sin^2\frac{\pi}{2}(q_ix-l)}{(x-\frac{l}{q_i})}\right| \geq C_4\sqrt{\ln m_i} - C_6$$

für alle $i \geq i_0$, also ist der Satz bewiesen. ∎

Beweis von Lemma 1 Wir betrachten die Funktion

$$h(t) := \max\big(1 - |t|, 0\big) \ .$$

Für die Fourier-Transformierte erhält man

$$\begin{aligned}\hat{h}(\omega) &= \int_{-1}^{1} (1 - |t|)e^{-i\omega t}\, dt \\ &= 2\int_{0}^{1} (1 - t)\cos\omega t\, dt \\ &= 2\frac{1 - \cos\omega}{\omega^2} \ .\end{aligned}$$

Da

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{h}(\omega)|^2 (1 + |\omega|^2)\, d\omega < \infty$$

ist, gehört die Funktion h zum Raum $H^1(\mathbb{R})$. Damit sind durch

$$C(s) := \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{h}(\omega)|^2 (1 + |\omega|^2)^s\, d\omega$$

für $0 < s < \frac{1}{2}$ endliche Zahlen gegeben. Mit $h_m(t) := h(mt)$ haben wir $\hat{h}_m(\omega) = \frac{1}{m}\hat{h}\big(\frac{\omega}{m}\big)$. Folglich ergibt sich für $0 < s < \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{h}_m(\omega)|^2 (1 + |\omega|^2)^s\, d\omega &= \frac{1}{m}\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{h}(\omega)|^2 (1 + m^2|\omega|^2)^s\, d\omega \\ &= \frac{1}{m^{1-2s}}\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{h}(\omega)|^2 \Big(\frac{1}{m^2} + |\omega|^2\Big)^s d\omega \\ &< \frac{1}{m^{1-2s}}\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{h}(\omega)|^2 (1 + |\omega|^2)^s\, d\omega = \frac{C(s)}{m^{1-2s}} \ .\end{aligned}$$

Da $1-2s>0$ ist, kann eine Zahl m_1 so groß gewählt werden, daß

$$\frac{C(s)}{m^{1-2s}} < \frac{1}{l^2}$$

für alle $m \geq m_1$ gilt.
Die Hilbert-Transformierte der Funktion h ist stetig, und es gilt [2]

$$\tilde{h}(t) = \frac{-i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sign}(\omega)\hat{h}(\omega)e^{it\omega}\, d\omega$$

und somit

$$\begin{aligned}
|\tilde{h}(t)| &\leq \frac{2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left|\operatorname{sign}(\omega)\frac{1-\cos\omega}{\omega^2}\right| d\omega \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\frac{1-\cos\omega}{\omega^2}\, d\omega = h(0) = 1\ .
\end{aligned}$$

Bezeichnen wir mit $\tilde{h}_m$ die Hilbert-Transformierte der Funktion h_m, so ist $\tilde{h}_m(t) = \tilde{h}(mt)$. Damit haben wir $|\tilde{h}_m(t)| \leq 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Es sei $t_1 < \ldots < t_l$ und $\delta = min(t_{n+1} - t_n)$. Für $m > \frac{4}{\delta}$ und $|t| > \frac{\delta}{4}$ haben wir

$$\begin{aligned}
\left|\int_{-\frac{1}{m}}^{\frac{1}{m}} \frac{h_m(\tau)}{t-\tau}\, d\tau\right| &\leq \int_{-\frac{1}{m}}^{\frac{1}{m}} \left|\frac{h_m(\tau)}{t-\tau}\right| d\tau \\
&\leq \frac{1}{\frac{\delta}{4}-\frac{1}{m}} \int_{-\frac{1}{m}}^{\frac{1}{m}} |h_m(\tau)|\, d\tau \\
&\leq \frac{2}{\frac{m\delta}{4}-1}\ .
\end{aligned}$$

Es kann nun eine Zahl $m_2 \geq m_1$ so groß gewählt werden, daß

$$\frac{2}{\frac{m\delta}{4}-1} < \frac{1}{l}$$

für alle $m \geq m_2$ gilt.
Wir betrachten nun die Funktion

$$f(t) = \sum_{n=1}^{l} p_n h_m(t - t_n) \ .$$

In der Summe ist höchstens ein Glied von Null verschieden. Damit ist $|f(t)| \leq \max |p_n|$ für alle $t \in \mathbb{R}$.
Weiterhin haben wir

$$\hat{f}(\omega) = \hat{h}_m(\omega) \sum_{n=1}^{l} p_n e^{-it_n \omega}$$

und damit

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 (1 + |\omega|^2)^s \, d\omega &= \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{h}_m(\omega)|^2 \, |\sum_{n=1}^{l} p_n e^{-it_n \omega}|^2 (1 + |\omega|^2)^S \, d\omega \\
&\leq l^2 (\max |p_n|)^2 \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{h}_m(\omega)|^2 (1 + |\omega|^2)^S \, d\omega < (\max |p_n|)^2 \ .
\end{aligned}$$

Es sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann können genau die beiden folgenden Fälle eintreten:

1. Es existiert genau ein Punkt t_k mit $|x - t_k| \leq \frac{\delta}{4}$.
2. Es gilt $|x - t_n| > \frac{\delta}{4}$ für $1 \leq n \leq l$.

Wir wollen nun den ersten Fall untersuchen.
Es ist

$$VP \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\tau)}{t - \tau} \, d\tau = \sum_{n=1}^{l} p_n \cdot \left(VP \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h_m(\tau - t_n)}{t - \tau} \, d\tau \right) \ .$$

Damit erhalten wir

$$| \sum_{n=1, n \neq k}^{l} p_n \cdot \left(VP \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h_m(\tau - t_n)}{t - \tau} \, d\tau \right) | \leq$$

$$\leq \sum_{n=1, n \neq k}^{l} |p_n| \cdot \left| VP \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h_m(\tau - t_n)}{t - \tau} \, d\tau \right|$$

$$\leq \max|p_n| \sum_{n=1,n\neq k}^{l} \left|VP\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{h_m(\tau-t_n)}{t-\tau}\,d\tau\right|$$

$$\leq \max|p_n|\frac{1}{l}\sum_{n=1,n\neq k}^{l} 1 < \max|p_n| \; .$$

Und mit

$$\left|p_k\cdot\left(VP\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h_m(\tau-t_k)}{t-\tau}\,d\tau\right)\right| \leq |p_k|$$

erhalten wir

$$\left|VP\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\tau)}{t-\tau}\,d\tau\right| \leq 2\max|p_n| \; .$$

Für den zweiten Fall haben wir bereits

$$\left|VP\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\tau)}{t-\tau}\,d\tau\right| \leq \max|p_n|$$

gezeigt, und damit ist das Lemma 1 bewiesen worden. ∎

Literatur

[1] N. Bary, *A treatise on Trigonometric Series Vol. 2*. Pergamon Press LTD, Oxford 1964

[2] P. Butzer, R. Nessel, *Fourier Analysis and Approximation*, Birkhäuser Verlag, New York, 1971

[3] P. Butzer, W. Splettstößer, R. Stens, *The Sampling Theorem and Linear Prediction in Signal Analysis*, Jber. Deutsch. Math.-Vereinigung 90, (1988), S. 1 - 70

[4] P. Butzer, R. Stens, *Sampling Theory for not necessarily band-limited Functions*, SIAM Review, March 1992, Vol. 34, No. 1

[5] P. Butzer, W. Splettstösser, *Approximation und Interpolation durch verallgemeinerte Abtastsummen*, Forschungsbericht No. 2515 des Landes Nordrhein-Westfalen, Köln-Opladen,1977

[6] P. Butzer, *A survey of Whittaker-Shannon sampling theorem and some of its extensions*,
J. Math. Res. Exposition, 3 (1983), p. 185-212.

[7] L. Carleson, *Convergence and growth of partial sums of Fourier series*,
Acta Math. 116, (1966), S. 135-157

[8] J. Churkin, C. Jakowlew, G. Wunsch, *Theorie und Anwendung der Signalabtastung*,
Verlag Technik Berlin, Berlin 1966

[9] A. Jerri, *The Shannon sampling theorem - its varios extensions and applications: a tutorial review*,
Proc. IEEE 65 (1977), 1565-1596

[10] R.J. Marks, *Introduction to Shannon Sampling and Interpolation Theory*,
Sringer Texts in Electrical Engineering, Springer Verlag New York, 1991

[11] R.J. Marks ed, *Advanced Topics in Shannon Sampling and Interpolation Theory*,
Sringer Texts in Electrical Engineering, Springer Verlag New York, 1993

[12] H. Triebel *Theory of Function Spaces II*,
Monographs in Mathematics, Birkhäuser Verlag, Basel, 1992

Address:
Mathematisches Institut,
Fakultät für Mathematik und Informatik,
Friedrich-Schiller-Universität Jena,
Ernst-Abbe-Platz 1-4,
D-07743 Jena,
Germany
Current Address:
Institut für Grundlagen der Elektrotechnik und Elektronik,
Technische Universität Dresden,
Mommsenstr. 13,
D-01062 Dresden,
Germany