Acta Mathematica et Informatica Universitatis Ostraviensis

Holger Boche

Eine axiomatische Charakterisierung der Hilbert-Transformation

Acta Mathematica et Informatica Universitatis Ostraviensis, Vol. 8 (2000), No. 1, 11--23

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/120555`

Terms of use:

© University of Ostrava, 2000

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* `http://project.dml.cz`

Eine axiomatische Charaktersierung der Hilbert-Transformation

Holger Boche

Abstract: The behaviour of the well known Hilbert-transform is investigated in the paper. An axiomatic characterization of the Hilbert-transform is given. The result extends E.M. Stein's Theorem about the characterization of the Hilbert-transform.

Key Words: Hilbert-Transform, Axiomatic System Theory, Input Output Systems, Singular Integral of Cauchy Type

Mathematics Subject Classification: 93A05, 93A25, 44A15

1. Einleitung und Problemstellung

In dieser Arbeit wird die Hilbert-Transformation von einem axiomatischen Standpunkt aus gesehen untersucht. Es wird eine genaue Charakterisierung des Input Output Verhaltens der Hilbert-Transformation angegeben.
Im weiteren wird mit $L^2(\mathbb{R})$ der Raum der quadratisch integrierbaren Lebesgue meßbaren Funktionen betrachtet. Mit $C_0^\infty(\mathbb{R})$ wird die Menge alle unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit kompakten Träger bezeichnet. Für eine Funktion $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ ist die Hilbert-Transformierte $\tilde{f}$ durch

$$\tilde{f}(t) = (\mathcal{H}f)(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi} \int\limits_{|t-\tau|>\varepsilon} \frac{f(\tau)}{t-\tau}\, d\tau \tag{1}$$

$$= VP \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\tau)}{t-\tau}\, d\tau \tag{2}$$

gegeben. Der Grenzwert in (1) existiert für alle $t \in \mathbb{R}$. Die Hilbert-Transformierte $\tilde{f}$ einer stetigen Funktion ist nicht unbedingt beschränkt. Zu jeder Menge E vom Lebesgueschen Maß Null kann eine steige Funktion $f_1 \in L^2(\mathbb{R})$ der Gestalt angegeben werden, daß $\tilde{f}_1(t) = \infty$ für $t \in E$ gilt [5]. Für Untersuchungen in dieser Richtung und Relationen zum Verhalten des Poissonschen Integrals sei auf [4], [5] und [6] verwiesen.

Im weiteren wird mit $\hat{f}$ die Fourier-Transformierte der Funktion f bezeichnet, d.h. es gilt für alle $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t}\, dt \; . \tag{3}$$

Für beliebige Funktionen $f \in L^2(\mathbb{R})$ kann die Fourier-Transformierte $\hat{f}$ als $L^2(\mathbb{R})$-Grenzwert definiert werden. Aufgrund der Parsevalschen Gleichung gilt $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$. Für Funktionen $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ besitzt die Hilbert-Transformation ebenfalls die Form

$$\tilde{f}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)(-i sign(\omega)\,) e^{i\omega t}\, d\omega \; . \tag{4}$$

Hierbei wurde die Funktion

$$sign(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega > 0 \\ 0 & \omega = 0 \\ -1 & \omega < 0 \end{cases}$$

benutzt. Aufgrund der Parsevalschen Gleichung gilt damit

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}(t)|^2\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, dt \; , \tag{5}$$

d.h. man hat $||\tilde{f}||_2 = ||f||_2$. Hierbei wurde mit $||f||_2$ die $L^2(\mathbb{R})$-Norm der Funktion f bezeichnet.

Da die Hilbert-Transformation ein singuläres Integral ist, treten numerische Schwierigkeiten bei der Errechnung der Hilbert-Transformation auf [2] [3].
Die Hilbert-Transformation spielt ebenfalls beim Leistungsbegriff in der Theorie der elektrischen Netzwerke eine wichtige Rolle. Auf eine Darstellung der Rolle der Hilbert-Transformation wollen wir jedoch nicht eingehen. Der Leser sei dazu auf die Arbeiten [15] und [16] verwiesen.

Als nächstes werden einige wichtige Operatoren eingeführt.
Es sei $\tau \in \mathbb{R}$ eine feste Zahl. Dann ist der Verschiebungsoperator T_τ durch

$$(T_\tau f)(t) = f(t - \tau) \tag{6}$$

definiert. Man hat $||T_\tau f||_2 = ||f||_2$.
Für eine reelle Zahl a, $a \neq 0$, ist der Delitationsoperator U_a durch

$$(U_a f)(t) = f\,(a \cdot t) \tag{7}$$

definiert. Es gilt $||U_a f||_2 = \frac{1}{\sqrt{|a|}} ||f||_2$.

In der Arbeit werden nur lineare Operatoren $S : L^2(\mathbb{R}) \Longrightarrow L^2(\mathbb{R})$ untersucht, für welche ebenfalls

$$||S|| = \sup_{||f||_2 \leq 1} ||Sf||_2 < \infty \tag{8}$$

gilt. Alle Operatoren sind somit beschränkt und linear.
Mit den eingeführten Begriffen ist es nun möglich, eine genaue Charakterisierung der Hilbert-Transformation zuerzielen.
Es sei Γ_1 die Klasse aller der Operatoren $\mathcal{S}$, welche für alle Funktionen $f \in L^2(\mathbb{R})$ die folgenden Eigenschaften besitzen.

ai) Es gilt für alle Funktionen $f \in L^2(\mathbb{R})$ und alle $\tau \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{S}T_\tau f = T_\tau \mathcal{S} f \ . \tag{9}$$

aii) Es gilt für alle Funktionen $f \in L^2(\mathbb{R})$ und alle Zahlen $a > 0$

$$\mathcal{S}U_a f = U_a \mathcal{S} f \ . \tag{10}$$

aiii) Es gilt stets alle Funktionen $f \in L^2(\mathbb{R})$

$$\mathcal{S}U_{-1} f = -\mathcal{S} f \ . \tag{11}$$

aiv) Für alle Funktionen $f \in L^2(\mathbb{R})$ gilt die Gleichung

$$\int_{-\infty}^{\infty} |(\mathcal{S}f)(t)|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \, dt \ . \tag{12}$$

Eine genaue Charakterisierung der Operatoren, welche die Bedingungen ai)-aiv) erfüllen, wurde von E.M. Stein [17] angegeben.

Satz 1. (E.M. Stein) *Es sei $\mathcal{S}$ ein beliebiger Operator mit den Eigenschaften ai)-aiv). Es existiert dann eine komplexe Zahl λ, $|\lambda| = 1$, mit $\mathcal{S} = \lambda\mathcal{H}$, d.h. im wesentlichen (bis auf einen konstanten Faktor) ist die Hilbert-Transformation der einzige Operator, welcher die Bedingungen ai)-aiv) erfüllt.*

Im weiteren wird das von E.M. Stein bewiesene Resultat untersucht. Vom praktischen Standpunkt aus gesehen erweisen sich die Bedingungen ai)-aiv) als zu einschränkend. Im weiteren soll die Forderung, daß die Beziehungen ai)-aiv) für alle Funktionen $f \in L^2(\mathbb{R})$ gelten sollen, fallen gelassen werden. Es wird als nächstes ein geeignetes Testsignal eingeführt. Dazu wird die Bezeichnung

$$q(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t}, \qquad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \ , \tag{13}$$

und $q(0) = 1$ benutzt. Man hat

$$\int_{-\infty}^{\infty} |q(t)|^2 \, dt = 1 \ .$$

Im weiteren wird gezeigt, daß eine große Klasse von linearen Operatoren allein durch ihr Verhalten für die Funktion q eindeutig bestimmt sind.

Es sei Γ_2 die Klasse aller Operatoren $\mathcal{S}$, die die folgenden Bedingungen bi)-biv) erfüllen.

bi) Es gilt für alle $\tau \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{S}T_\tau q = T_\tau \mathcal{S}q \ . \tag{14}$$

bii) Es gilt für alle $a > 0$

$$\mathcal{S}U_a q = U_a \mathcal{S}q \ . \tag{15}$$

biii) Die Funktion $Q = \mathcal{S}q$ ist eine ungerade Funktion, d.h. es gilt für alle $t \in \mathbb{R}$ stets $Q(t) = -Q(-t)$.

biv) Für die Norm der Funktion Q ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} |Q(t)|^2 \, dt = 1 \ . \tag{16}$$

Die Bedingungen bi)-biv) sind wesentlich schwächer als die Bedingungen ai)-aiv). Für die Operatoren $\mathcal{S}$ aus der Klasse Γ_2 wird im nächsten Abschnit der folgende Satz beweisen.

Satz 2. *Es sei $\mathcal{S}$ ein beliebiger Operator mit den Eigenschaften bi)-biv). Es existiert dann eine komplexe Zahl λ, $|\lambda| = 1$, mit $\mathcal{S} = \lambda\mathcal{H}$.*

Mit Hilfe des Satzes 2 wurde eine axiomatische Charakterisierung der Hilbert-Transformation erzielt. Eine ähnliche Charakterisierung existiert ebenfalls für die periodische Hilbert-Transformation $\mathcal{H}_\pi$. Diese ist durch

$$\begin{aligned}(\mathcal{H}_\pi f)(t) &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\varepsilon<|t-\tau|\leq\pi} \frac{f(\tau)}{\tan\frac{t-\tau}{2}} \, d\tau & (17)\\ &= VP \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\tau)}{\tan\frac{t-\tau}{2}} \, d\tau & (18)\end{aligned}$$

definiert. Hierbei ist f eine beliebige 2π-periodische unendlich oft differenzierbare Funktion. Unter diesen Voraussetzungen existiert der Grenzwert in (17) für alle $t \in [-\pi, \pi)$. Für ausführliche Untersuchungen zur periodischen Hilbert-Transformation sei auf [10], [11] und [18] verwiesen.

2. Beweis von Satz 2

In diesem Abschnitt wird der Satz 2 beweisen. Dazu werden als erstes einige Bezeichnungen eingeführt.

Im weiteren wird mit W_α, $\alpha > 0$, die Menge aller stetigen Funktionen $f \in L^2(\mathbb{R})$ bezeichnet, für die Beziehung

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, dt = \int_{-\alpha\pi}^{\alpha\pi} |\hat{f}(\omega)|^2\, d\omega \tag{19}$$

gilt. Damit hat man $\hat{f}(\omega) = 0$ für fast alle $|\omega| > \alpha\pi$. Die Funktion f heißt bandbegrenzt mit der Bandgrenze $\alpha \cdot \pi$.
Für die Hilbert-Transformierte $\tilde{q}$ der Funktion q gilt

$$\begin{aligned}\tilde{q}(t) &= -\frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} sign(\omega) e^{i\omega t}\, d\omega \\ &= \frac{1 - \cos \pi t}{\pi t} .\end{aligned}$$

Hierbei wurde für die Fourier-Transformierte $\hat{q}$ der Funktion q die Darstellung

$$\hat{q}(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \pi \\ \frac{1}{2} & |\omega| = \pi \\ 0 & |\omega| > \pi \end{cases}$$

benutzt. Weiterhin wurde die Darstellung (4) der Hilbert-Transformation berücksichtigt. Wenn eine Funktion zur Menge W_α gehört, dann gehört ebenfalls die Hilbert-Transformierte $\tilde{f}$ zur Menge W_α. Dies folgt unmittelbar aus der Darstellung Darstellung

$$\tilde{f}(t) = -\frac{i}{2\pi} \int_{-\alpha\pi}^{\alpha\pi} sign(\omega) \hat{f}(\omega) e^{i\omega t}\, d\omega .$$

Für die Funktion f aus der Klasse W_α gilt die Darstellung

$$f(t) = \frac{1}{\alpha\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\Big(\frac{k}{\alpha}\Big) \frac{\sin \alpha\pi (t - \frac{k}{\alpha})}{t - \frac{k}{\alpha}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\Big(\frac{k}{\alpha}\Big) \cdot q(\alpha t - k) \tag{20}$$

wobei

$$\lim_{N\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| f(t) - \sum_{k=-N}^{N} f\Big(\frac{k}{\alpha}\Big) \cdot q(\alpha t - k) \right|^2 dt = 0 \tag{21}$$

und

$$\lim_{N\to\infty} \max_{t\in\mathbb{R}} \left(\left| f(t) - \sum_{k=-N}^{N} f\Big(\frac{k}{\alpha}\Big) \cdot q(\alpha t - k) \right| \right) = 0 \tag{22}$$

gilt. Die Beziehung (20) stellt die Shannonsche Abtastreihe dar [13], [14]. Die Beziehung (22) ist eine unmittelbare Konsequenz der Beziehung (21). Für eine ausführliche Diskussion dieser Resultate sei auf [7], [8] und [9] verwiesen.

Da die Funktion $\tilde{f}$ ebenfalls zur Menge W_α gehört, hat man

$$\tilde{f}(t) = \frac{1}{\alpha\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k}{\alpha}\right) \frac{1-\cos\alpha\pi(t-\frac{k}{\alpha})}{t-\frac{k}{\alpha}} . \tag{23}$$

wobei die Reihe auf der rechten Seite von (23) ebenfalls bezüglich der $L^2(\mathbb{R})$-Norm und gleichmäßig auf ganz $\mathbb{R}$ konvergiert. Mit den eingeführten Bezeichnungen wird der Satz 2 bewiesen.

Beweis: (Satz 2)
Der Beweis wird in 2 Schritten geführt. Als erstes wird die Gleichung $\mathcal{S}f = \lambda \cdot \mathcal{H}f$ für alle $f \in W_1$ bewiesen. Dann wird das Resultat für alle Funktionen $f \in L^2(\mathbb{R})$ gewonnen.

1. Schritt: Es sei $f \in W_1$ beliebig mit der Darstellung

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) \frac{\sin\pi(t-k)}{\pi(t-k)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)(T_k q)(t) .$$

Die Reihe ist bezüglich der $L^2(\mathbb{R})$-Norm konvergent. Damit ist

$$(\mathcal{S}f)(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)Q(t-k) , \tag{24}$$

wobei die Reihe bezüglich der $L^2(\mathbb{R})$-Norm konvergiert. Hierbei wurde die Bezeichung $Q = \mathcal{S}q$ benutzt. Diese Tatsache folgt unmittelbar aus der Stetigkeit des Operators $\mathcal{S}$. Jede Funktion $f \in W_1$ gehört ebenfalls zur Menge W_α, $\alpha > 1$. Damit erhält man ebenfalls für alle $\alpha \geq 1$

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k}{\alpha}\right) \frac{\sin\pi(\alpha t-k)}{\pi(\alpha t-k)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k}{\alpha}\right)(U_\alpha T_{\frac{k}{\alpha}} q)(t) . \tag{25}$$

Die Konvergenz von (25) ist ebenfalls bezüglich der $L^2(\mathbb{R})$-Norm gegeben. Dies ergibt nun

$$\begin{aligned}(\mathcal{S}f)(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k}{\alpha}\right)(SU_\alpha T_{\frac{k}{\alpha}} q)(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k}{\alpha}\right)(U_\alpha T_{\frac{k}{\alpha}} Sq)(t) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k}{\alpha}\right)Q(\alpha t-k) . \end{aligned} \tag{26}$$

Es wird nun die Fourier-Transformierte $\hat{\mathcal{S}f}$ untersucht. Dazu nutzt man die Parsevalsche Gleichung und die Darstellungen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| f(t) - \sum_{k=-N}^{N} f\left(k\right) q(t-k) \right|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \hat{f}(\omega) - \sum_{k=-N}^{N} f\left(k\right) e^{-ik\omega} \right|^2 d\omega \tag{27}$$

bzw.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|f(t)-\sum_{k=-N}^{N}f\left(\frac{k}{\alpha}\right)\cdot q(\alpha t-k)\right|^2 dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\alpha\pi}^{\alpha\pi}\left|\hat{f}(\omega)-\frac{1}{\alpha}\sum_{k=-N}^{N}f\left(\frac{k}{\alpha}\right)e^{-i\frac{k}{\alpha}\omega}\right|^2 d\omega\ . \quad (28)$$

Mit (27) und (28) erhält man

$$\hat{f}(\omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f\Big(k\Big)e^{-ik\omega}=\frac{1}{\alpha}\sum_{k=-\infty}^{\infty}f\left(\frac{k}{\alpha}\right)e^{-i\frac{k}{\alpha}\omega}\ , \quad (29)$$

wobei die beiden Summen auf der rechten Seite von (29) in der $L^2(-\alpha\pi,\alpha\pi)$-Norm konvergieren. Mit den Darstellungen (24) und (26) erhält man für die Fourier-Transformierte $\hat{\mathcal{S}f}$ der Funktion $\mathcal{S}f$ die Darstellung

$$\begin{aligned}(\hat{\mathcal{S}f})(\omega) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty}f\Big(k\Big)e^{-ik\omega}\cdot\hat{Q}(\omega)=\hat{f}(\omega)\cdot\cdot\hat{Q}(\omega)\\ &= \frac{1}{\alpha}\sum_{k=-\infty}^{\infty}f\left(\frac{k}{\alpha}\right)e^{-i\frac{k}{\alpha}\omega}\cdot\hat{Q}\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)\\ &= \hat{f}(\omega)\cdot\hat{Q}\left(\frac{\omega}{\alpha}\right) \end{aligned} \quad (30)$$

wobei die Beziehung (30) für fast alle $|\omega|<\pi$ gilt. Da (30) ebenfalls für alle $f\in W_1$ gilt, hat man für fast alle $|\omega|<\pi$

$$\hat{Q}(\omega)=\hat{Q}\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)\ . \quad (31)$$

Da die Beziehung (31) für alle Zahlen $\alpha\geq 1$ gilt, und Q ist eine ungerade Funktion. Damit existiert eine Konstante C_2 mit

$$\hat{Q}(\omega)=\begin{cases} C_2 & \omega\in(0,\pi)\\ -C_2 & \omega\in(-\pi,0)\ .\end{cases} \quad (32)$$

Nun wird die Darstellung

$$\frac{\sin\pi(t-\tau)}{\pi(t-\tau)}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\sin\pi(k-\tau)}{\pi(k-\tau)}\frac{\sin\pi(t-k)}{\pi(t-k)}$$

benutzt. Es gilt also

$$(T_\tau q)(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(T_\tau q)(k)\cdot(T_k q)(t)\ . \quad (33)$$

Die Reihe auf der rechten Seite von (33) ist in der $L^2(\mathbb{R})$-Norm konvergent. Damit ist

$$\begin{aligned} Q(t-\tau) = (ST_\tau q)(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (T_\tau q)(k) \cdot (T_k q)(t) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (T_\tau q)(k) \cdot (ST_k q)(t) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi(k-\tau)}{\pi(k-\tau)} Q(t-k) \ . \end{aligned} \tag{34}$$

Durch Anwendung der Fourier-Transformation ergibt sich daraus

$$\hat{Q}(\omega)e^{-i\tau\omega} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi(k-\tau)}{\pi(k-\tau)} e^{-ik\omega} \cdot \hat{Q}(\omega) = \hat{q}(\omega)\hat{Q}(\omega)e^{-i\tau\omega} \ .$$

für fast alle $\omega \in \mathbb{R}$.
Damit muß

$$\hat{Q}(\omega) = 0 \tag{35}$$

für fast alle $|\omega| > \pi$ sein. Folglich ist

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} |Q(t)|^2 \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |C_2|^2 \, d\omega = |C_2|^2 \, ,$$

womit $|C_2| = 1$ gilt. Für die Funktion Q gewinnt man somit die Darstellung

$$Q(t) = C_2 \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sign}(\omega) e^{i\omega t} \, d\omega = i \cdot C_2 \cdot \frac{1-\cos \pi t}{\pi t} \ . \tag{36}$$

Dies ergibt mit $C_4 = i \cdot C_2$ für alle Funktion $f \in W_1$

$$(\mathcal{S}f)(t) = C_4 \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) \frac{1-\cos \pi(t-k)}{\pi(t-k)} = C_4 \cdot (\mathcal{H}f)(t) \ , \tag{37}$$

womit der Satz 2 für Funktionen $f \in W_1$ bewiesen wurde.

2. Schritt: Es sei nun $f \in L^2(\mathbb{R})$ beliebig. Es sei weiterhin $\varepsilon > 0$ eine beliebige Zahl. Es wird die Funktion f_n mit

$$\hat{f}_n(\omega) = \begin{cases} \hat{f}(\omega) & |\omega| < n\pi \\ 0 & |\omega| > n\pi \end{cases}$$

betrachtet. Für die Funktion f_n mit

$$f_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-n\pi}^{n\pi} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} \, d\omega \tag{38}$$

ergibt sich aufgrund der Parsevalschen Gleichung

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t) - f_n(t)|^2 \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{|\omega|>n\pi} |\hat{f}(\omega)|^2 \, d\omega \tag{39}$$

d.h. es existiert eine natürliche Zahl n_0, so daß

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)-f_{n_0}(t)|^2 dt < \varepsilon^2 \tag{40}$$

ist. Nun hat man

$$f_{n_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_{n_0}\left(\frac{k}{n_0}\right) \frac{\sin \pi(n_0 t - k)}{\pi(n_0 t - k)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_{n_0}\left(\frac{k}{n_0}\right) \varphi(n_0 t - k), \tag{41}$$

also

$$\begin{aligned}(Sf_{n_0})(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_{n_0}\left(\frac{k}{n_0}\right)(S\varphi)(n_0 t - k) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_{n_0}\left(\frac{k}{n_0}\right) C_4 (H\varphi)(n_0 t - k) = C_4 (Hf_{n_0})(t) .\end{aligned} \tag{42}$$

Darnit erhält man

$$\begin{aligned}\left(\int_{-\infty}^{\infty} |(Sf)(t) - C_4 \cdot (Hf)(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} |(Sf)(t) - (Sf_{n_0})(t) + \right. \\ &\quad \left. + C_4 \cdot (Hf_{n_0})(t) - C_4 \cdot (Hf)(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\le \left(\int_{-\infty}^{\infty} |(Sf)(t)-(Sf_{n_0})(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} + \\ &\quad + \left(\int_{-\infty}^{\infty} |C_4(Hf_{n_0})(t) - C_4(Hf)(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\le \|S\| \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)-f_{n_0}(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} + \\ &\quad + \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)-f_{n_0}(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\le (\|S\| + 1) \cdot \varepsilon .\end{aligned} \tag{43}$$

Da aber $\varepsilon > 0$ beliebig ist, hat man $Sf = C_4 \cdot (Hf)$. Da ebenfalls $f \in L^2(E)$ eine beliebige Funktion ist, wurde der Satz 2 bewiesen.

3. Absolut integrierbare Funktionen

In Abschnitt 2 wurden nur quadratisch integrierbare Funktionrn zugelassen, d.h. es galt stets $f \in L^2(\mathbb{R})$. Es wurde gezeigt, daß ein Operator $\mathcal{S}$, welches den Bedingungen bi)-biv) genügt, stets die Form $\mathcal{S} = \lambda\mathcal{H}$ besitzt. Es war von vornherein klar, daß überhaupt ein System $\mathcal{S}$ mit den entsprechenden Transformationseigenschaften existiert. Hier war die Hilbert-Transformation $\mathcal{H}$ ein spezieller Kandidat für ein solches Operator $\mathcal{S}$. In diesem Abschnitt soll nun eine weitere Fragestellung in dieser Richtung untersuchen. Es wird der Frage nachgegangen, ob ein Operator $\mathcal{S}$ existiert, welches die Bedingungen bi)-biii) erfüllt und für das für alle absolut integrierbaren Signale f, d.h. $f \in L^1(\mathbb{R})$, stets die Beziehung

$$\int_{-\infty}^{\infty} |(\mathcal{S}f)(t)|\, dt \leq C_5 \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt \tag{44}$$

gilt. Die Konstante C_5 in der Ungleichung (44) soll dabei von der speziellen Funktion f unabhängig sein. Es wird gezeigt, daß kein solcher Operator $\mathcal{S}$ existieren kann. Dieses Resultat fassen wir in dem folgenden Satz zusammen.

Satz 3. *Es sei $\mathcal{S}$ ein beliebiger Operator, welcher den Bedingungen bi)-biii) genügt. Dann kann eine Funktion $f_1 \in L^2(\mathbb{R})$ mit*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f_1(t)|\, dt \leq 1$$

konstruiert werden, so daß

$$\int_{-\infty}^{\infty} |(\mathcal{S}f_1)(t)|\, dt = \infty \tag{45}$$

ist. Damit kann das System $\mathcal{S}$ nicht der Ungleichung (44) genügen.

Beweis:

Der Beweis des Satzes 3 soll indirekt geführt werden. Es wird also angenommen, daß doch für alle absolut integrierbare Funktionen f die Beziehung (44) gilt. Hierbei muß die Konstante C_5 von der entsprechenden Funktion f unabhängig sein. Es wird die Funktion k, welche durch die Beziehung

$$\hat{k}(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq \frac{\pi}{2} \\ 2(1 - \frac{|\omega|}{\pi}) & \frac{\pi}{2} < |\omega| \leq \pi \\ 0 & |\omega| > \pi \end{cases}$$

definiert ist, betrachtet. Die Funktion k ist absolut integrierbar, d.h. es gilt $k \in$ $\in L^1(\mathbb{R})$. Für alle absolut integrierbaren Signale f mit $f \in W_\alpha$, $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$, erhält man

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)k(t-\tau)\,d\tau = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\hat{k}(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega$$
$$= \sum_{l=-\infty}^{\infty} f(l)k(t-l)\ .$$

Im weiteren wird nun $K = \mathcal{S}k$ gesetzt. Die Funktion K ist aufgrund der Bedingung biii) ungerade. Dies ergibt

$$(\mathcal{S}f)(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} f(l)K(t-l)\ .$$

Die Funktion $\mathcal{S}f$ ist nach Voraussetzung absolut integrierbar. Dies ergibt

$$(\hat{\mathcal{S}f})(\omega) = \Big(\sum_{l=-\infty}^{\infty} f(l)e^{-il\omega}\Big)\hat{K}(\omega)$$
$$= \hat{f}(\omega)\hat{K}(\omega)\ .$$

Es sei nun $0 < \beta \le 1$ beliebig und mit $f_\beta(t) = f(\beta t)$ erhält man

$$(\mathcal{S}f_\beta)(t) = (\mathcal{S}f)(\beta t)\ .$$

Dies ergibt

$$\frac{1}{\beta}(\hat{\mathcal{S}f})(\frac{\omega}{\beta}) = \hat{f}_\beta(\omega)\hat{K}(\omega) = \frac{1}{\beta}\hat{f}(\frac{\omega}{\beta})\hat{K}(\omega)\ .$$

Somit erhält man für alle $0 < \beta \le 1$

$$(\hat{\mathcal{S}f})(\omega) = \hat{f}(\omega)\hat{K}(\beta\omega)\ ,\ |\omega| \le \frac{\pi}{2}\,.$$

Damit muß

$$\hat{K}(\omega) = \hat{K}(\beta\omega)\,,\ |\omega| \le \frac{\pi}{2}\,, \tag{46}$$

für $0 < \beta \le 1$ sein. Die Funktion K ist nach Voraussetzung absolut integrierbar. Damit muß die Funktion $\hat{K}$ gleichmäßig stetig sein. Dies ergibt aufgrund der Gleichung (46)

$$|\hat{K}(\omega)| = C_2 > 0$$

für $|\omega| \le \frac{\pi}{2}$. Für $0 < \omega \le \frac{\pi}{2}$ ist

$$\hat{K}(\omega) = C_6\ .$$

Da die Funktion $\hat{K}$ ungerade ist, muß

$$|\hat{K}(\omega) - \hat{K}(-\omega)| = 2|C_6| > 0$$

für $0 < \omega \le \frac{\pi}{2}$ sein. Damit kann nicht

$$\lim_{\omega\to+0}\hat{K}(\omega) = \lim_{\omega\to-0}\hat{K}(\omega)$$

gelten. Somit ist die Funktion K nicht absolut integrierbar. Folglich ist der Satz 3 bewiesen worden.

Natürlich gilt für $1 < p < \infty$ stets $\mathcal{H} : L^p(\mathbb{R}) \longrightarrow L^p(\mathbb{R})$. Der Satz 3 zeigt, daß der Fall $p = 1$ eine Sonderstellung einnimmt. Die Ursache hierfür ist in den geforderten Translations- und Dilatationseigenschaften zusehen.

4. Abschließende Bemerkungen

Es ist bekannt, daßbei der numerischen Berechnung der Hilbert-Transformation eine ganze Reihe von Problemen auftreten. Die Arbeit stellt einen Beitrag dar, Systeme zur Ermittlung der Hilbert-Transformation zu entwerfen. Unterschiedliche Systeme zur Ermittlung der Hilbert-Transformation sind unter anderem in der Optik schon lange bekannt [1], [12]. Mit Hilfe des Satzes 2 ist es nun möglich, alle in Frage kommenden Systeme genau zu charakterisieren. Es mußnur noch das Input-Output Verhalten des Systems für ein Signal untersucht werden. Damit konnte das Problem des Systementwurfs wesentlich erleichtert werden.

Literatur

[1] P.K. Das, *Optical Signal Processing-Fundamentals*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, (1991),

[2] H. Boche, *Das Verhalten der Hilbert-Transformation und eine Problemstellung von W. Cauer*, Proc. ITG a. IEEE CAS, Berlin (1995), S. 1–6,

[3] H. Boche, *Charakterisierung des numerischen und analytischen Verhaltens der Hilbert-Transformation*, Kleinheubacher Berichte 39, (1996), S. 1–12, Proc. International Union of Radio Science,

[4] H. Boche, *Untersuchungen zum Verhalten des Hardy-Littlewood Maximaloperators und des Poissonschen Integrals für VMO-Funktionen*, accepted in Illinois Journal of Mathematics

[5] H. Boche, *Verhalten der Cauchy-Transformation und der Hilbert-Transformation für auf dem Einheitskreis stetige Funktionen*, accepted in Archives of Mathematics

[6] H. Boche, *Untersuchungen zur abgeschnittenen Hilbert-Transformation von BMO-Funktionen und VMO-Funktionen*, accepted in Bulletin of The Belgian Mathematical Society Simon Stevin

[7] P. Butzer, W. Splettstößer, R. Stens, *The Sampling Theorem and Linear Prediction in Signal Analysis*, Jber. Deutsch. Math.-Vereinigung 90, (1988), S. 1–70

[8] P. Butzer, R. Stens, *Sampling Theory for not necessarily band-limited Functions*, SIAM Review, March 1992, Vol. 34, No. 1

[9] P. Butzer, *A survey of Whittaker-Shannon sampling theorem and some of its extensions*, J. Math. Res. Exposition, 3 (1983), p. 185–212.

[10] J. Garcia-Cuerva, J. Rubio De Francia, *Weighted norm Inequalities and related topics*, North-Holland Mathematics Studies, New York, 1986

[11] J.B. Garnett, *Bounded Analytic Functions*, Pure and applied Mathematics Bd. 96, Academic Press, New York, 1981,

[12] J.W. Goodman, *Introduction to Fourier Optics*, McGraw-Hill, New York, (1988)

[13] R.J. Marks, *Introduction to Shannon Sampling and Interpolation Theory*, Springer Texts in Electrical Engineering, Springer Verlag New York, 1991

[14] R.J. Marks ed, *Advanced Topics in Shannon Sampling and Interpolation Theory*, Springer Texts in Electrical Engineering, Springer Verlag New York, 1993

[15] W. Marten and W. Mathis, *Theory of Power in Electrical Systems and Networks and Decomposition of Hilbert Transforms*, Proc. of the intern. Symp. MTNS' 93, Vol II, Akademie Verlag, Berlin, (1994), p. 781–784,

[16] W. Mathis, *Analysis of Power in Nonlinear Electrical Circuits*, Intern J. on Theoretical Electrotechnics, No. 5, (1994), p. 53–60,

[17] E.M. Stein, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Priceton University Press, Princton New Jersey, (1970),

[18] A. Zygmund, *Trigonometric Series I,II*, Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, Cambridge, 1990,

Author's address: Holger Boche, Heinrich-Hertz-Institut für Nachrichtentechnik Berlin GmbH, Broadband Mobile Communication Networks, Einsteinufer 37, D-10587 Berlin, Germany

und

Swiss Federal Institut of Technology (ETH Zurich), Communication Technology Laboratory, ETH-Zentrum, Sternwartstrasse 7, CH-8092 Zurich, Switzerland

Received: August 14, 1998