Václav Láska

# O zpracování výsledků fysikálních měření

*Časopis pro pěstování matematiky a fysiky*, Vol. 56 (1927), No. 4, 268--277

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/120828

# O zpracování výsledků fysikálních měření.

Přednášel v JČMF dne 17. a 31. března 1927 *V. Láska.*

## I.

Čím to jest, že přírodní zákony, které lidský duch abstrahuje z přírody, novými zkušenostmi se potvrzují, anebo proč výpočet, který ne fakty, nýbrž myslícím duchem byl proveden, nakonec odpovídá faktům, to jest hádanka, ba ta největší hádanka, kterou řecká filosofie si rozřešila heslem:

„ἀεὶ ὁ θεὸς γεωμέτρει“

uznávajícím matematiku za nejvyšší formulaci světa, hádanka, kterou i nejnovější věda nedovede jinak řešiti než Leibnizem po prvé zdůrazněnou prestabilisovanou harmonií, t. j. odvěkým souhlasem světa mimo nás se světem v nás samých.

»Astronom najde vždy hvězdu tam, kde podle výpočtu býti má, a byl by nejvýše překvapen, kdyby nebyla na svém místě.«

Těmito slovy charakterisoval Lipps (Naturwiss. und Weltansicht 1906) velice případně jeden z nejzajímavějších problémů nové doby, problém definice přírodního zákona, kterému chci věnovati několik slov.

K matematické formulaci přírodních zákonů dospíváme v onom stadiu vývoje exaktních věd, v kterém metodou indukce tvoříme typy jevů. Matematická formulace přírodních zákonů jest nutna, abychom se mohli objektivně přesvědčiti, zdali její matematické důsledky odpovídají skutečnosti, jak to žádá postulát Hertzův.

Otázku definice přírodního zákona můžeme tudíž položiti takto: **Jest zjistiti, zdali daná matematická formulace, odvozená induktivně z výsledků experimentálních pokusů, jest výrazem zákona anebo jen interpolačním vzorcem.**

K tomu účelu jest nejprve definovati některé základní pojmy. Mějmež řadu číselných dvojic plynoucích z pozorování

| $k$ | $1$ | $2$ | $3 \ldots n$ |
|---|---|---|---|
| $a$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3 \ldots a_n$ |
| $b$ | $b_1$ | $b_2$ | $b_3 \ldots b_n$ |

Vyhovují-li veškeré páry $(a_k, b_k)$ podmínce

$$b_k - f(a_k) = 0,$$

kde $f(a)$ jest funkčním symbolem, pravíme, že je mezi veličinami $a_k$ a $b_k$ funkční vztah.
Je-li

$$b_k - f(a_k) = \Delta_k,$$

kde $\Delta_k$ jsou veličiny, které možno nazvati přípustnými chybami, obdržíme tak zvanou »korelaci«.

Odpovídá-li nadto kolektivum hodnot $\Delta_k$ určité statistické měřitelnosti, to značí, má-li stabilní křivku frekvencí, pak představuje uvažovaná formulace »statistickou zákonitost«. Statistickou zákonitost máme před sebou, když na př. kolektivum hodnot $\Delta_k$ vede ke Gaussově křivce frekvencí

$$C(\Delta) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\Delta^2}.$$

Zkušenost ukazuje, že statistická zákonitost jest nutnou podmínkou existence přírodního zákona. Nutnou, však ne dostatečnou, poněvadž očividně neplatí opak

Své úvahy objasníme příkladem: Věta, že součet tří úhlů v trojúhelníku rovinném se rovná 180°, jest přírodní zákon, neboť více než 100letá zkušenost ukazuje, že kolektivum rozdílů

$$\alpha + \beta + \gamma - 180^0 = \Delta$$

při správném měření vede vždy ke Gaussově křivce frekvencí.

Další podmínku existence přírodního zákona lze formulovati takto:

Má-li vztah

$$b - f(a) = \Delta$$

býti formulací fysikálního zákona, musí nezbytně fysikální dimense funkce $f(a)$ býti táž, jako dimense veličiny $b$, neboť jinak nebyla by tato rovnice fysikálně možna.

Z toho následuje, že:

Křivka frekvencí hodnot $\Delta$ musí míti tentýž charakter, jaký má křivka frekvencí hodnot $b$.

Důležitá jest též podmínka konvergence, kterou lze vysloviti takto: Výsledky docílené zpracováním obšírnějšího a dokonalejšího materiálu musí býti zároveň i lepší aproximací formulovaného zákona. Každý zákon jest totiž evidentně neodvislý od počtu pozorování. Proto také nesmí se zvětšováním počtu a přesnosti pozorování měniti kolektivní povaha hodnot $\Delta$, čili což jest totéž, geometrický charakter křivky frekvencí.

Z uvažovaného plyne sama sebou nezbytnost křivek frekvencí pro zpracování vědeckých pozorování. Dosud uvažovali jsme matematické postuláty formulace přírodních zákonů. K nim přistupují ještě logické, o kterých zde nemůžeme uvažovati.

Pojem zákona, jehož definice zde byla podána analyticky, lze vyjádřiti i synteticky výměrem, že přírodní zákon jest formulací závislosti mezi kolektivními invariantami jevů. Z toho plyne však, že dosavadní způsob matematického zpracování výsledků pozorovacích není ve všech případech správný a musí býti nahrazen metodou plynoucí z předcházející formulace přírodního zákona, jejíž východiskem jest křivka frekvencí.

Dosavadní postup byl zásadně takový, že z výsledků pozorování se vyhledal aritmetický průměr a nejvýše ještě určila se jeho pravděpodobná chyba podle předpisů metody nejmenších čtverců. To jest však jen v tom případu přípustno a správno, když kolektivum chyb $\Delta$ vede k normální Gaussovské křivce. Proto také žádá se vždy ještě zkouška a posteriori, která však jest málo přesvědčivá, neboť tím, že považujeme aritmetický průměr za hodnotu pravděnejpodobnější, vnucujeme uvažovanému kolektivu charakter, který jemu vždy nepřísluší. U křivek asymetrických nemá na př. průměrná hodnota očividně významu hodnoty nejčastěji se objevující, která jedině při stejné hodnověrnosti všech pozorování, může býti považována za nejlepší aproximaci hledané veličiny, neboť pravda jest, čemu svědčí největší počet stejně hodnověrných svědků.

Proto také rozhoduje v experimentálních výsledcích nejčastěji se objevující hodnota a následkem toho aritmetický průměr jen tehdy, je-li zároveň hodnotou v daném kolektivu nejčastěji se objevující. Že metoda nejmenších čtverců byla považována za samospasitelnou, nemůže nás překvapiti. Její příručky jsou dodnes psány výhradně s hlediska geodesie a na základě zkušeností geodetických a v geodesii ovládá metoda nejmenších čtverců oprávněné pole.

V dnešní své přednášce chci především podati několik kritických a důležitých poznámek k správnému použití metody nejmenších čtverců. Píšeme-li rovnici

$$y_k = ax_k, \qquad k = 1, 2, \ldots n$$

takto:

$$\text{I.} \quad \frac{1}{a} y_k = x_k, \qquad \text{II.} \quad y_k = ax_k,$$

zůstává patrně vždy algebraicky správná. Metoda nejmenších čtverců vede však k následujícím normálním rovnicím

$$\text{I.} \quad \frac{1}{a} [y^2] = [xy], \qquad \text{II.} \quad [xy] = a[x^2],$$

tudíž ke dvěma rozdílným hodnotám a jež obě jsou správně odvozeny podle metody nejmenších čtverců.

Poněvadž ale nemohou býti stejně pravděpodobny, jest otázka, která z nich jest nejpravděpodobnější?

Abychom na tuto otázku mohli správně odpověděti, uvažujeme nový problém.

I. Budiž dán vztah

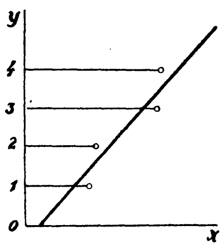
$$y_k = ax_k,$$

kde $y_k$, a $x_k$, jsou dané veličiny, $a$ hledanou hodnotou. Zde dlužno, podle toho, z jaké statistické tabulatury má býti odvozena hledaná hodnota $a$, rozeznávati tři případy, jež jsou znázorněny graficky na obr. 1—3.

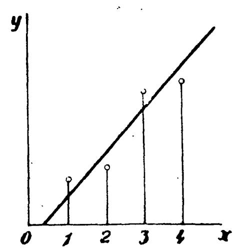
V I. případu jsou hodnoty $y_k$ volenými argumenty a rovnice má prakticky tvar

$$\text{I.} \quad \ldots \quad y_k = a(x_k + \Delta_k),$$

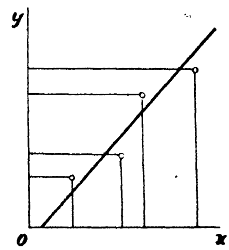
neboť měřena po případě pokusem aneb sčítáním, stanovena byla vlastně jen hodnota $x_k$.




Obr. 1.




Obr. 2.




Obr. 3.

V II. případu bylo tomu opačně a uvažovaná rovnice má proto vlastně tvar

$$\text{II.} \quad \ldots \quad y_k + \Delta_k' = ax_k.$$

V III. případu měříme $x_k$ a $y_k$, takže musíme psáti

$$\text{III.} \quad \ldots \quad y_k + \Delta_k' = a(x_k + \Delta_k).$$

V případu I. žádá princip metody nejmenších čtverců, aby

$$\text{I'.} \quad \left[\left(\frac{y_k}{a} - x_k\right)^2\right] = [\Delta_k^2] = \min.$$

V II. zase, aby

$$\text{II'.} \quad [(y_k - ax_k)^2] = [\Delta_k'^2] = \min.$$

v III. jest konečně

$$y_k - ax_k = a\Delta_k - \Delta_k'$$

a proto podle algoritmu metody nejmenších čtverců

$$(y_k - ax_k)^2 = a^2\Delta_k^2 + \Delta_k'^2.$$

Hodnoty $\Delta_k$ a $\Delta_k'$ souvisí však mezi sebou rovnicí

$$\frac{\Delta_k'}{\Delta_k} = \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} = a,$$

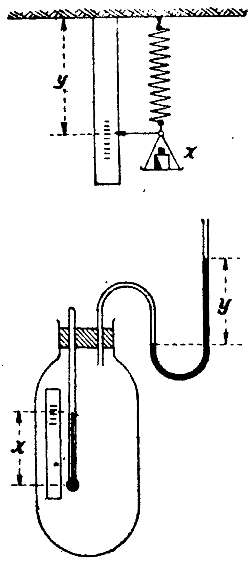
takže obdržíme

$$x_k^2 (y - ax_k)^2 = 2y_k^2 \Delta_k^2$$

a proto

$$\text{III}''. \quad \left[\frac{x_k^2 (y - ax_k)^2}{2y_k^2}\right] = [\Delta_k^2] = \min.$$

Podle metody nejmenších čtverců máme tudíž následující správná řešení:




Obr. 4. a 5.

$$\text{I}'''. \quad \frac{1}{a}[y_k^2] - [x_k y_k] = 0,$$

$$\text{II}'''. \quad [x_k y_k] - a[x_k^2] = 0,$$

$$\text{III}'''. \quad \left[\frac{x_k^3}{y_k}\right] - a\left[\frac{x_k^4}{y_k^2}\right] = 0.$$

Z uvedených příkladů jest patrno, že metoda nejmenších čtverců musí býti vždy užívána s rozmyslem a sice tak, jak to odpovídá principu $[\Delta^2] = \min$. Různost vzorců I''', II''', III''', nemá na štěstí valného významu pro hrubou praxi, neboť hodnoty z nich vypočtené mohou se přirozeně od sebe jen málo lišiti. Tam však, kde výsledky experimentů mají býti důkazem, jest to věc velké důležitosti.

Jak jsou realisovány jednotlivé případy, ukáží příklady. Dejme tomu, že měříme prodloužení ($y$) drátěné spirály pomocí přesných závaží (obr. 4), pak očividně máme experiment odpovídající statistice typu II. Pokus typu III. obdržíme při stanovení závislosti objemu plynu na teplotě. Zde odečítáme jak teplotu ($x = t$), tak i objem ($y = v$) na stupnici (obr. 5).

Rozhodnouti při každém jednotlivém pokusu, o který případ se jedná, lze evidentně velmi snadno. Uvažované rovnice lze všeobecně psáti takto:

$$f(x, y, a) = 0.$$

Z toho obdržíme po vynechání indexů

$$f(x + \Delta, y + \Delta', a) = 0,$$

což rozvinuto v řadu dá

$$f(x, y, a) = \Delta \frac{\partial f}{\partial x} + \Delta' \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Jest tudíž

$$\frac{\Delta'}{\Delta} = -\frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y}$$

a dále

$$f(x, y, a)^2 = \Delta^2 \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + 2\Delta\Delta' \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} + \Delta'^2 \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \ldots$$

Sumací obdržíme, přihlížejíce k postulátu metody nejmenších čtverců

$$[\Delta\Delta'] = 0$$

podmínku

$$\left[\frac{f(x, y, a)^2}{2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2}\right] = [\Delta^2] = \min.$$

a z ní

$$\text{IV.} \quad \ldots \left[f \frac{\partial f}{\partial a} : \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\right] = 0.$$

Že výpočet tímto způsobem provedený odpovídá skutečnosti, ukazuje následující příklad. Jest stanoviti konstantu $a$ měřením délek $x$ a $y$ daných na grafu představujícím přesně hyperbolu

$$a = xy.$$

Učiníme-li při měření délky $x$ chybu $\Delta$, bude (obr. 6) očividně chyba $\Delta'$ v měření $y$ dána rovnicí;

$$\Delta' = \Delta \operatorname{tg} \varphi.$$

Jest však

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \varphi$$

a proto bez ohledu na znamení

$$\Delta' = \frac{y}{x} \Delta.$$

Základní rovnice zní tudíž

$$a - (x_k + \Delta_k)\left(y_k + \frac{y_k}{x_k}\Delta_k\right) = 0$$

čili

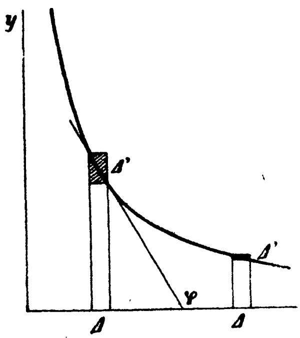
$$a - x_k y_k = 2y_k \Delta_k.$$

Obdržíme tak pro

$$[\Delta_k^2] = \left[\left(\frac{a - x_k y_k}{2y_k}\right)^2\right] = \min$$

podmínečnou rovnici:

$$\frac{1}{2}\,\frac{\partial\,[\Delta_k^2]}{\partial\, a} = \left[\frac{a - x_k y_k}{2y_k}\cdot\frac{1}{2y_k}\right] = 0$$




Obr. 6.

a z té konečně

$$a = \left[\frac{x_k}{y_k}\right] : \left[\frac{1}{y_k^2}\right],$$

co odpovídá přesně vzorci IV, dosadíme-li v něm

$$f = a - xy.$$

Jenom tenkráte, když postupujeme podle uvedeného způsobu, můžeme očekávati, že kolektivum chyb

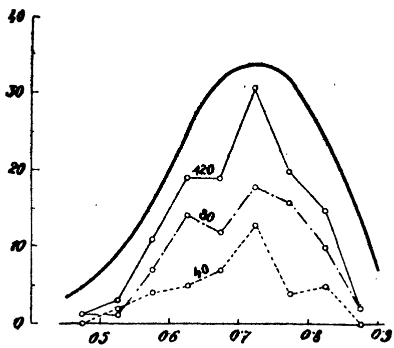
$$a - x_k y_k = \Delta_k$$

poveďe k symetrické křivce Gaussově.

II.

Východiskem našich dalších úvah, které mají ukázati, jak náleží postupovati při zpracování experimentálních výsledků v případu, když nemůžeme předpokládati aplikabilitu principu metody nejmenších čtverců, jest svrchu uvedená definice přírodního zákona, podle které přírodní zákon formuluje *závislosti mezi kolektivními invariantami jevů.*

Mají-li výsledky pozorování vésti k invariantám, *musí býti vždy dán takový počet pozorování, aby 1. mohla býti zajištěna stabilita křivky frekvenční. Dále jest zapotřebí, aby 2. každá frekvenční křivka měla co možno ostré maximum,* jež by dovolovalo co možno přesné určení jeho úsečky, konečně 3. musí veškeré, při opětovaných pokusech obdržené *křivky seskupení hodnot býti téhož druhu.*



Obr. 7.

Abychom pojem stability blíže určili, sestrojme si frekvenční křivku pro logaritmy homogenisovaných ročních srážek Prahy z let 1805—1924, jež se pohybují mezi 2·48—2·88 a rozmísťují jak podává tab. I.

Tab. I.

| mezi | 1805—1844 | 1845—1924 | 1805—1924 |
|---|---|---|---|
| 2·46 — 2·50 | 0 | 1 | 1 |
| 2·51 — 2·55 | 2 | 1 | 3 |
| 2·56 — 2·60 | 4 | 7 | 11 |
| 2·61 — 2·65 | 5 | 14 | 19 |
| 2·66 — 2·70 | 7 | 12 | 31 |
| 2·71 — 2·75 | 13 | 18 | 20 |
| 2·76 — 2·80 | 4 | 16 | 15 |
| 2·81 — 2·85 | 5 | 10 | 1 |
| 2·86 — 2·90 | 0 | 1 | |

Považujeme-li středy intervalů za úsečky a obsažený v nich počet logaritmů ročních srážkových hodnot za pořadnice, obdržíme frekvenční křivku logaritmů ročních průměrů srážek.

Křivka jest stabilní, neboť frekvenční křivky z období 1805—1844 (40leté), 1845—1924 (80leté) a 1805—1844 (120leté) konvergují k jedné a geometricky té samé křivce.

Křivka frekvencí stává se tím tvarovou invariantou.

Jak obr. 7 ukazuje, nejsou grafy jednotlivých období symetrické. Střední hodnota logaritmů období 1805—1924 jest 2·70. Hodnota největší frekvence jest však něco větší a sice 2·73. Průměrná hodnota ročních srážek jest proto 506 *mm*, kdežto nejpravděpodobnější 533 *mm*.

Majíce tak pojem stability frekvenčních křivek náležitě definovaný, můžeme nyní přistoupiti ke zpracování výsledků pozorování.

Mějmež řadu $s$ stejně přesných a stejně obsažných tabulatur typu II, plynoucích z $s$-krát za stejných fysikálních podmínek vykonaného pokusu téhož druhu:

| $x$ | $y$ | $x$ | $y$ | ... | $x$ | $y$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | $b_{11}$ | $a_1$ | $b_{12}$ | | $a_1$ | $b_{1s}$ |
| $a_2$ | $b_{21}$ | $a_2$ | $b_{22}$ | | $a_2$ | $b_{2s}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $a_n$ | $b_{n1}$ | $a_n$ | $b_{n2}$ | ... | $a_n$ | $b_{ns}$ |

Sestrojme si z $b$ hodnot argumentu $a_k$ t. j. z hodnot

$$b_{k1}, b_{k2}, \ldots, b_{ks}$$

frekvenční křivky. Pak musí veškeré tyto křivky vyhovovati svrchu uvedeným třem podmínkám. Kdyby frekvenční křivka některého argumentu $a_k$ vykazovala odlišný tvar, jest to znamením, že hodnoty dotyčného argumentu nejsou správné.

Uvažovaným postupem kontrolujeme tudíž zároveň správnost výsledků pozorování.

Je-li uvažovaným podmínkám vyhověno, můžeme nahraditi veškeré svrchu uvedené tabulatury jednou jedinou.

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| $a_1$ | $b_1$ |
| $a_2$ | $b_2$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ |
| $a_n$ | $b_n$, |

kde $b_k$ jsou úsečky maximální frekvence, plynoucí z frekvenčních křivek hodnot $b_{ks}$. Tak sestrojená tabulatura nesmí se již zásadně měniti novým opakováním pokusů, mají-li výsledky z ní odvozené býti skutečně invariantními.

Máme-li takto připravený materiál, přistupujeme k vyhledání statistické zákonitosti mezi $a_k$ a $b_k$, která jest nutnou podmínkou pro existenci přírodního zákona.

To jest však kapitola, o které jedná s potřebnou obšírností III. svazek příručky užité matematiky, kterou píši společně s kolegou Hruškou.

Metoda frekvenčních křivek má proti obvyklé metodě středních hodnot to, že plyne nutně a přirozeně z definice přírodního zákona a má tu neocenitelnou vlastnost, že zajišťuje zároveň homogenitu experimentálních řad.

## Sur le traitement des mesures physiques.

(Extrait de l'article précédent.)

Le point de départ du mémoire est la définition de la loi naturelle, d'après laquelle une loi naturelle est une formulation de la dépendance mutuelle des invariants collectifs des phénomènes naturelles. La courbe de répartition devient ainsi la base des traitements des phénomènes naturelles. De ce point de vue il faut considérer aussi la méthode des moindres carrés, car elle n'est applicable que dans le cas où la courbe de répartition est symmétrique et a la forme de Gauss.