Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Jan Vojtěch

Theorie geometrických konstrukcí. [III.]

*Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky*, Vol. 31 (1902), No. 4, 329--351

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/120957

Příloha k Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky.

# Theorie geometrických konstrukcí.

Napsal

**Jan Vojtěch** v Praze.

(Pokračování.)

17. Za jisté supposice jest však, jak řečeno, obor působnosti pravítka dost rozsáhlý. Mimo uvedené autory zvláště *Steiner*[12]) provádí řadu pěkných konstrukcí a sice s podmínkou: dány (to jest narýsovány již předem) dvě rovnoběžky; nebo dána racionálně dělená úsečka; nebo dány dvě dvojice rovnoběžek (rovnoběžník); nebo dány dvě racionálně dělené úsečky; nebo dány dvě rovnoběžky a racionálně dělená úsečka; nebo dán čtverec v rovině. Konstrukce Steinerovy opírají se o nauku o harmonických paprscích a bodech; jako příklady uvádíme z jeho spisku některé úlohy:

*a*) Dány-li na přímce tři body $G$, $D$, $F$, z nichž jeden, $D$, leží uprostřed mezi dvěma ostatními — jest (pouhým pravítkem) vésti libovolným bodem $H$ rovnoběžku k oné přímce.

Veďme $GH$, $FH$, zvolme na $GH$ kdekoli bod $A$ a veďme $AD$, $AF$; průsečíkem $C$ přímek $FH$ a $AD$ veďme přímku $GC$, jež protne $AF$ v $I$. $HI$ jest žádaná rovnoběžka. Důkaz je na snadě.

*b*) Dány-li dvě rovnoběžky $P$ a $R$, jest rozpůliti danou úsečku ležící na jedné z nich (třebas $\overline{GF}$ na $P$).

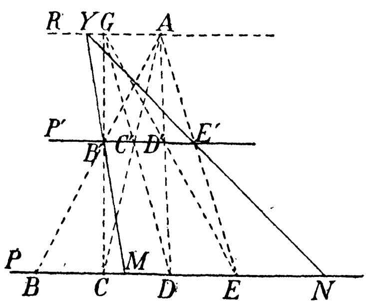
Z libovolného bodu $A$ veďme ku koncovým bodům $G$, $F$ dané úsečky přímky $AG$, $AF$, jež protnou druhou rovnoběžku

[12]) *Jacob Steiner*, Die geometrischen Constructionen, ausgeführt mittels der geraden Linie und eines festen Kreises, poprvé v Berlíně 1833, také v Sebraných spisech v I. díle, potom v Ostwalds Klassiker der exakten Wiss. čís. 60.

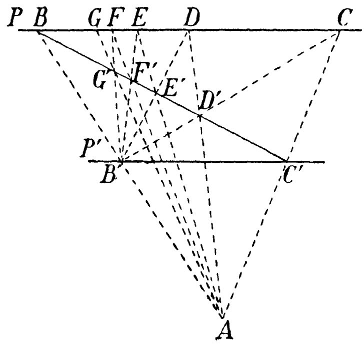
v bodech $H$, $I$; tyto průsečíky spojme s oněmi koncovými body přímkami $HF$, $IG$, i dostaneme jako jich průsečík bod $C$. Přímka $AC$ půlí danou úsečku v bodě $D$. $(\overline{GD} = \overline{DF} = \frac{1}{2}\overline{GF})$.

*c*) Dány-li dvě rovnoběžky $P$ a $P'$ a na jedné z nich ($P$) úsečka $\overline{BC}$, jest na téže přímce nanésti od daného bodu $M$ $n$-násobnou tuto úsečku.

Veďme libovolným bodem $A$ (obr. 9.) třetí rovnoběžku $R$ (spojíce obě předchozí konstrukce) a přímky $AB$, $AC$, jež protnou druhou rovnoběžku $P'$ v bodech $B'$ a $C'$. Dále sestrojme přímku $CB'$, která protne $R$ v bodě $G$; veďme nyní $GC'D$, i jest $\overline{DC} = \overline{BC}$, pročež $\overline{BD} = 2 . \overline{BC}$. Vedeme-li dále $AD$ a pak $GD'E$, jest $\overline{BE} = 3 . \overline{BC}$ atd. Aby naše $n$-násobná úsečka počí-




Obr. 9.




Obr. 10.

nala daným bodem $M$, veďme $MB'$, jež zastihne přímku $R$ v bodě $Y$; nyní sestrojme $YE'N$, i bude $\overline{MN}$ žádaná úsečka.

*d*) Dány dvě rovnoběžky $P$ a $P'$, jest sestrojiti $n$-tý díl úsečky $\overline{BC}$, vyznačené na jedné z nich ($P$).

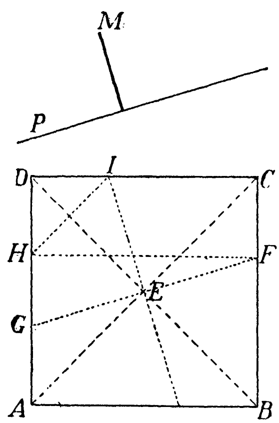
Veďme (obr. 10.) $AB$, $AC$ ($A$ je libovolný bod), obdržíme body $B'$ a $C'$ na $P'$. Potom veďme spojnice $BC'$, $CB'$, jež se protínají v $D'$; tento průsečík spojme s bodem $A$, i dostaneme na $P$ bod $D$ a $\overline{BD} = \frac{1}{2}\overline{BC}$. Vedeme-li $B'D$, jež protne přímku $BC'$ v $E'$ a sestrojíme-li pak $AE'E$, jest $\overline{BE} = \frac{1}{3}\overline{BC}$. (Neboť body $BCD\infty$ tvoří harmonickou čtveřinu, rovněž body $BD'E'C'$ a tedy i $BDEC$, t. j. $\frac{BE}{DE}:\frac{BC}{DC}=-1$ čili

$$\frac{BE}{BE-\frac{BC}{2}}=\frac{-BC}{\frac{BC}{2}}$$

čili $\overline{BE}=-2\overline{BE}+\overline{BC}$, t. j. $3.\overline{BE}=\overline{BC}$.) Stejně, vedeme-li $B'E$, dostaneme na $BC'$ bod $F'$; stejně potom obdržíme

$$\overline{BG}=\frac{1}{5}\overline{BC}.$$

(Tato konstrukce pochází prý od Brianchona.)




Obr. 11.

*e*) Dán-li v rovině čtverec $ABCD$, jest na danou přímku $P$ z daného bodu $M$ spustiti kolmici.

Bod $E$ (obr. 11.) je průsečík diagonál čtverce daného, tedy střed jeho. Vedeme-li středem tímto přímku $GF \parallel$ s danou $P$, sestrojíme snadno v bodě $E$ kolmici ku $GF$. Stačí vésti $FH \parallel CD$, pak $HI \parallel AC$; tím docíleno, že $\overline{DI}=\overline{CF}$, i jest $IE \perp$ na $GF$; nyní vedeme daným bodem $M$ rovnoběžku ku $IE$. Tato stojí kolmo na $P$.

Tolik z dotčených konstrukcí.

18. *Je-li konečně dána v rovině pevná kružnice*, lze všechny geometrické úlohy 2. stupně provésti pouhým pravítkem jednoduchým, jak poprvé a definitivně dokázal Steiner.[12]) V úvodě proslulého dílka svého „Die geometrischen Constructionen, ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises" praví, že někteří francouzští mathematikové upozornili na četné úlohy, jichž řešení vyžaduje pouze užití pravítka. „Ba někteří," pokračuje, „vyslovili i domněnku, že lze pravítkem provésti všechny konstrukce, jakmile v rovině jest dána nějaká pevná kružnice pomocná. Přítomný spisek má za účel potvrditi tuto domněnku. Cíle toho dosáhneme snáze než jsem z počátku doufal a než se dle rozsahu předmětu zdálo." Neboť všechny konstrukce, které se vyskytují v obyčejné geometrii, v níž užívá se kružítka a pravítka bez omezení, spočívají — vyjímaje případy, kde pravítko samo vystačí — na uvedených už dvou konstrukcích hlavních:

I. Nalézti průsečíky přímky a kružnice; II. průsečíky dvou kružnic.

Pro omezené pomůcky, jak si je nyní se Steinerem stanovíme, ukazuje se, že z uvedených dvou úloh druhá se redukuje na první, takže tedy řešení všech úloh závisí na jediné hlavní úloze (první). Aby pak tento úkol za všech okolností mohl býti řešen a aby byly podány zároveň konstrukce důležitých prvků všech konstruktivních úloh, provádí J. Steiner předem 6 konstrukcí, které uvedeny již v odstavci 15. jako základní. — Dejme tomu tedy, že v rovině leží vyrýsovaná kružnice $K$, jakož i její střed $S$, a že jest dovoleno užívati jen pravítka (vésti přímky); i lze zmíněné základní úlohy takto řešiti:

1. K dané přímce $P$ daným bodem $M$ vésti rovnoběžku.

$\alpha$) Přímka $P$ jde středem $S$ pomocné pevné kružnice $K$: $ASB$ ($A$ a $B$ jsou body přímky a kružnice zároveň). — Veďme $AM$, $BM$; $AM$ prodlužme za bod daný a z libovolného bodu $X$ na tomto prodloužení veďme $XB$, $XS$. Přímky $XS$ a $MB$ protínají se v $C$, kterýžto bod spojme s $A$; $AC$ nám vyznačí na $XB$ bod $E$, načež $ME$ je hledaná rovnoběžka.

$\beta$) $P$ protíná kružnici $K$, ale nejde středem jejím: $C$ a $D$ jsou jejich průsečíky. — Veďme $CSC'$, $DSD'$; body $C'$ a $D'$ určují sečnu (tětivu) rovnoběžnou s $CD$. Majíce nyní vésti bodem

$M$ rovnoběžku k $CD$, veďme $CM$, $DM$, kteréžto přímky určí na $C'D'$ body $F$ a $G$. Veďme $FD$ a $GC$, i dostaneme průsečík jich $H$; $MH$ půlí úsečku $CD$ v bodě $I$. Odtud lze si vésti jako při $\alpha$).

$\gamma$) $P$ má libovolnou polohu. — Veďme z libovolného bodu dané přímky, třeba z $G$, průměr $ASBG$, položme libovolným bodem $C$ kružnice $K$ sečnu rovnoběžnou s $AB$ (viz $\alpha$), jež protne $K$ v bodech $C$ a $D$, přímku $P$ v bodě $E$; veďme dále průměry $CSC'$, $DSD'$ a koncovými body $C'$ a $D'$ přímku $C'D'$, jež protne $P$ v bodě $F$. I jest bod $G$ na $P$ stejně vzdálen od $E$ jako od $F$; proto lze daným bodem vésti rovnoběžku dle $\alpha$).

Při této úloze hledíme tedy ve všech případech dostati úsečku půlenou, jež potom je základem další konstrukce dle $a$) odstavce 17.

2. Dána-li na přímce $P$ úsečka $\overline{BC}$, jest

$a$) nalézti úsečku $n$-násobnou, neb

$b$) danou úsečku rozděliti na $n$ částí,

$c$) nalézti jinou úsečku, jež k dané jest v daném racionálním poměru.

Veďme k dané přímce $P$ rovnoběžku $P'$ (1. úloha), i lze úlohy $a$) — $c$) takto řešiti:

$a$) Veďme libovolným bodem $A$ třetí rovnoběžku $R$ a přímky $AB$ a $AC$, jež protnou druhou rovnoběžku $P'$ v bodech $B'$ a $C'$; nyní veďme $CB'$, i obdržíme na $R$ bod $G$, veďme $GC'D$, i jest $\overline{DC} = \overline{BC}$, $\overline{BD} = 2\,.\,\overline{BC}$. Dále, vedeme-li $AD$ a potom $GD'E$, jest $\overline{BE} = 3\,.\,\overline{BC}$ atd. (Viz úl. $c$) odst. 17.)

$b$) Úsečku $\overline{BC}$ jest rozděliti v $n$ dílů. Je-li $B'F'$ $n$-násobná délka úsečky $\overline{B'C'}$, veďme přímky $CB'$, $BF'$, jež se protnou v $I$; na to veďme $C'ID$, $D'IE$, $E'IF$, ..., i jest

$$\overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EF} = \ldots = \frac{1}{n}\overline{BC}.$$

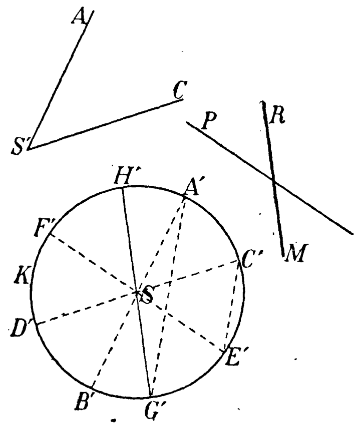
$c$) Hledaná úsečka má býti k dané v poměru $q:p$. Veďme, mají-li se třeba úsečky $F'D'$ a $D'B'$ na $P'$ rovněž k sobě jako $q:p$, přímky $BB'$, $CD'$ a z bodu, v němž se protínají, veďme přímku bodem $F'$, i dostaneme na přímce $P$ bod $V$ takový, že $\overline{BC} : \overline{CV} = p : q$.

3. K dané přímce $P$ daným bodem $M$ vésti kolmici. $\alpha$) $P$ prochází středem kružnice $K$, $A$ a $B$ jsou koncové body průměru. — Veďme rovnoběžku $CD$, dále $DSD'$, potom $CD'$; $CD'$ jest $\perp$ ku $AB$. Stačí bodem $M$ vésti rovnoběžku k $CD'$.

$\beta$) $P$ protíná $K$ v bodech $C$ a $D$ (nejde středem $S$). Veďme průměry $CC'$, $DD'$, potom $CD'$ a $DC'$; tyto jsou $\perp$ ku $CD$, i lze dále postoupiti jako v $\alpha$).

$\gamma$) $P$ leží mimo $K$. — Veďme sečnu kružnice $K$ rovnoběžnou s $P$, třebas $DC$; potom veďme průměry $DD'$ a $CC'$ a dále $C'D$ a $D'C$; tyto jsou $\perp$ ku $DC$, tedy i ku $P$. Další postup je patrný.

Také pomocí harmonických vztahů lze úkol řešiti.




Obr. 12.

4. Daným bodem $M$ vésti přímku $R$, jež by s danou přímkou $P$ svírala úhel, rovný danému $AS'C$.

Veďme (obr. 12.) průměry $A'B'$ a $C'D'$ rovnoběžně s rameny úhlu daného, takže $\sphericalangle A'SC' = AS'C$, a dále průměr $E'F'$ rovnoběžně s danou přímkou $P$. Na to sestrojme tětivu $C'E'$ a z bodu $A'$ tětivu $A'G' \parallel C'E'$, dále průměr $G'H'$; i jest oblouk $A'C' =$ oblouku $G'E'$, pročež $\sphericalangle G'SE' = \sphericalangle A'SC' = \sphericalangle AS'C$. Konečně veďme bodem $M$ rovnoběžku k průměru $G'SH'$; jest to hledaná přímka $R$. — Druhé řešení: Sestrojme tětivu $A'E'$, z bodu $C'$ k ní rovnoběžku atd. Přímka $R'$ pak svírá stanovený úhel s druhým směrem přímky $P$.

Bod $M$ může ovšem ležeti přímo na $P$.

5. Daný úhel $AS'C$: *a*) rozpůliti,
*b*) znásobiti.

*a*) Veď průměry $A'B'$ a $C'D'$ rovnoběžně s rameny $S'A$ a $S'C$ daného úhlu, tak že $A'SC' = AS'C$. Veď potom tětivu $A'D'$ (nebo $C'B'$) a vrcholem daného úhlu $S'$ přímku $S'N \parallel A'D'$ (nebo $C'B'$); přímka $S'N$ půlí úhel $AS'C$.

*b*) Zjednáme si dle řešení úl. 3. pravý úhel, načež provedeme konstrukci opírajíce se o sestrojený čtverec.

6. Od daného bodu $S_2$ počínaje, nanésti daným směrem úsečku rovnou dané $\overline{S_1A_1}$.

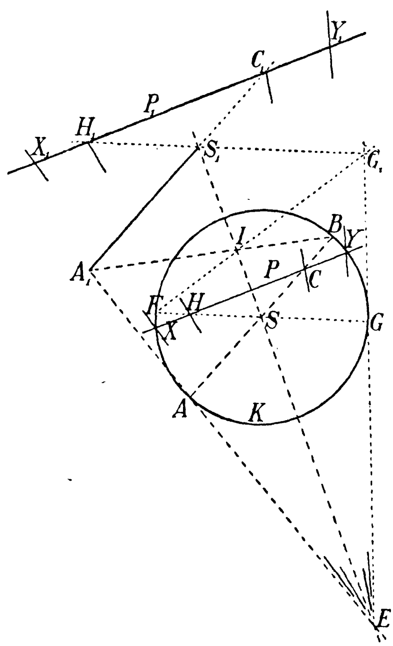
Nehledíme-li k danému směru, ve kterém má býti úsečka sestrojena, leží koncové body všech úseček, hovících úloze, na kružnici, jejíž středem je $S_2$ a poloměrem délka $S_1A_1$. Tím jsme vedeni na myšlenku, bychom pokládali body $S_2$ a $S_1$ (místo $S_1$ lze ovšem voliti $A_1$) za středy dvou stejných kružnic poloměru $S_1A_1$; běží nyní o to, jak nalézti ve vzájemném vztahu tří kružnic $S_1$, $S_2$ a $S$ (hlavně v jich bodech podobnosti) prostředky, jimiž by se vyhovělo dané úloze. K tomu cíli mysleme si v bodech $E_2$ a $I_2$, $E_1$ a $I_1$, $E$ a $I$ středy podobnosti ($E$ vnější, $I$ vnitřní) resp. kružnic $S$ a $S_1$, $S$ a $S_2$, $S_1$ a $S_2$. Střed podobnosti $I$ leží uprostřed na centrále $\overline{S_1S_2}$, $E$ pak je v nekonečnu; proto $E_1E_2 \parallel I_2I_1 \parallel S_2S_1$. — Středy podobnosti nalezneme takto: Veďme centrály $SS_1$, $SS_2$ a $S_1S_2$, sestrojme dále průměr pevné kružnice $AB \parallel A_1S_1$ a potom přímky $A_1A$, $A_1B$, jež protnou spojnici $S_1S$ v bodech $E_2$ a $I_2$. Bodem $E_2$ veďme rovnoběžku k $S_2S_1$, která vytkne na $S_2S$ bod $E_1$; spojnice $E_1I_2$ vyznačí na $S_1S_2$ bod $I$, konečně $IE_2$ protne přímku $SS_2$ v bodě $I_1$. — Úlohu danou provedeme nyní za krátko:

Vedeme-li v pevné kružnici průměr $CD$ předepsaným směrem (t. j. rovnoběžně s přímkou daného směru) a spojíme-li jeho koncové body se středy podobnosti $E_1$, $I_1$ přímkami $E_1C$ a $DI_1$, $E_1D$ a $CI_1$, protnou se tyto v bodech $C_2$ a $D_2$, z nichž každý je vzdálen o danou délku $S_1A_1$ od daného bodu $S_2$ a sice leží tyto tři body ($C_2$, $S_2$, $D_2$) v jedné přímce.

Přistoupíme nyní k oněm dvěma úlohám hlavním.

I. Nalézti průsečíky dané přímky (vyrýsované $P_1$) a kružnice, dané velikostí (poloměrem $S_1A_1$) a polohou (středem $S_1$) [kružnice ta ovšem není vyrýsována].

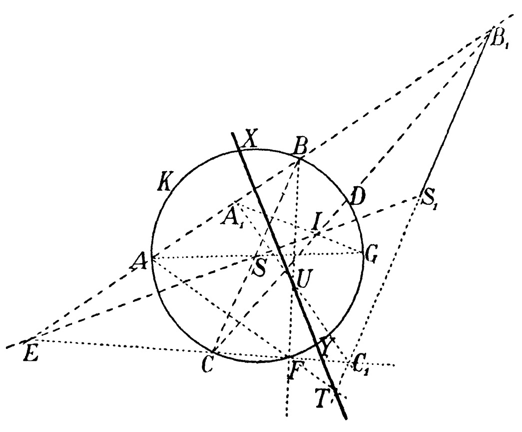
Předložená úloha může býti řešena tím, že sestrojíme středy podobnosti $E$ a $I$ kružnic $S$ a $S_1$ a pak vyhledáme onu přímku $P$, která má vůči pevné kružnici $S$, vzhledem k jednomu ze středů podobnosti, podobnou polohu jako daná přímka $P_1$ vůči kružnici $S_1$; neboť pak musí průsečíky $X$, $Y$ přímky $P$ a kružnice $S$ odpovídati průsečíkům $X_1$ a $Y_1$ přímky $P_1$ a kružnice $S_1$, čili $X_1$ a $X$, $Y_1$ a $Y$ jsou body homothetické, i lze body $X_1$ a $Y_1$ nalézti bezprostředně na základě bodů $X$ a $Y$.




Obr. 13.

Provedení (obr. 13.): Veďme průměr $AB \parallel A_1S_1$, veďme dále osu $SS_1$ a spojnice $A_1A$, $A_1B$, jež protnou tuto v bodech $E$ a $I$ (středech podobnosti). Prodlužme poloměr $A_1S_1$, až protne přímku $P_1$ v bodě $C_1$, pak veďme $EC_1$, čímž dostaneme na $AB$ bod $C$; $C$ a $C_1$ jsou dva podobně položené body vzhledem ku $E$. Nyní veďme v pevné kružnici libovolný průměr $FG$ a přímky

$EG$, $FI$, které se protnou v $G_1$ (neb přímky $EF$ a $GI$, jež se protnou v $F_1$), dále veďme průměr $G_1S_1$ ($F_1S_1$), jenž odpovídá průměru $FG$, je s ním tedy rovnoběžný, a jenž přímku $P_1$ protíná v bodě $H_1$; konečně veďme $EH_1$, čímž obdržíme bod $H$ (na $FG$); body $H$ a $H_1$ jsou rovněž homothetické vzhledem k $E$. Proto jsou přímky $CH$ a $C_1H_1$ neboli $P$ a $P_1$ vzhledem ku středu podobnosti $E$ podobně položeny a rovněž body $X$ a $X_1$, $Y$ a $Y_1$, v nichž přímky ony protínají příslušné kružnice $S$ a $S_1$. Veďme dle toho dále přímku $CH$, jež vytkne na kružnici $S$ body $X$ a $Y$; sestrojme potom paprsky $EX$ a $EY$, které protnou přímku $P_1$ v hledaných bodech $X_1$ a $Y_1$.

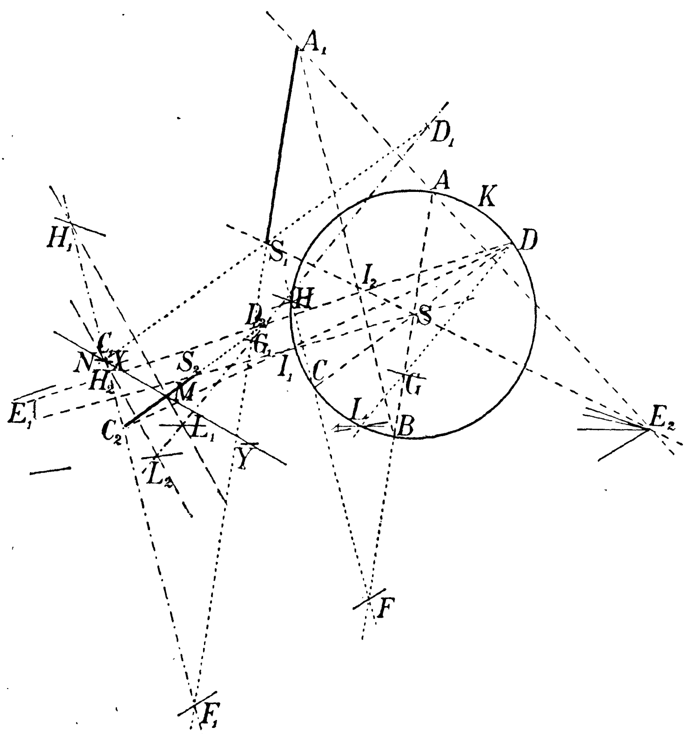



Obr. 14.

II. Nalézti průsečíky dvou daných kružnic.

*a*) Jedna z obou kružnic je kružnice pevná $K$ (středu $S$), druhá kružnice dána jen co do velikosti a polohy ($S_1$ je její střed, $\overline{S_1B_1}$ daný její poloměr). Běží patrně o to, bychom nalezli společnou sečnu obou kružnic, neboť ta dá nám bezprostředně na pevné kružnici hledané body $X$ a $Y$. — Věc lze provésti takto (obr. 14.): Veďme průměr $BSC \parallel S_1B_1$, dále osu $SS_1$, pak $B_1B$ a $B_1C$; tyto přímky vyznačí na ose $SS_1$ středy podobnosti $E$ a $I$ a protnou kruh $S$ podruhé v $A$ a $D$. Dále veďme paprsek $EC$, jenž zasáhne kružnici $S$ podruhé v bodě $F$ a prodloužený poloměr $B_1S_1$ v bodě $C_1$; $C_1$ leží zároveň na kružnici $S_1$. Potom veďme průměr $AG$, přímku $GI$, která protne paprsek $EB_1$ v bodě $A_1$; tento patří spolu kružnici $S_1$. Vedeme-li dále sečny $AF$ a $B_1C_1$, $BF$ a $A_1C_1$, jež se protnou resp. v bodech $T$ a $U$, jest $TU$ společná sečna daných kružnic a protíná kružnici $S$ v hledaných bodech $X$ a $Y$.

*b*) Obě kružnice dány jen velikostí a polohou ($S_1$ a $S_2$ jejich středy, $S_1A_1$ a $S_2C_2$ poloměry). Úlohu tuto převedeme




Obr. 15.

na I., sestrojíce společnou sečnu kružnic $S_1$ a $S_2$; zbývá potom hledati průsečíky této sečny a jedné z daných kružnic.

Veďme průměry (obr. 15.) $ASB$ a $CSD$ rovnoběžně s danými poloměry $S_1A_1$ a $S_2C_2$ a vyhledejme hned středy podobnosti $E_2$ a $I_2$, $E_1$ a $I_1$ resp. kružnic $S$ a $S_1$, $S$ a $S_2$. Potom sestrojme pomocí středů podobnosti $E_2$ a $I_2$ průměr $C_1D_1$ kružnice $S_1$

rovnoběžný s $CD$, tedy i s $C_2S_2$; určeme pak také druhý konec $D_2$ průměru $C_2S_2$. Potom veďme spojnice $C_2C_1$, $D_2D_1$, které protnou poloměr $A_1S_1$ v $F_1$ a $G_1$; paprsky $E_2F_1$ a $E_2G_1$ zasáhnou průměr $ASB$ v bodech $F$ a $G$. Body $F$ a $F_1$, $G$ a $G_1$ jsou body podobně položené ke kružnicím $S$ a $S_1$ vzhledem k středu podobnosti $E_2$. Sestrojme dále $CF$, $DG$, jež protnou $S$ (podruhé) v $H$ a $L$; položme $E_2H$ a $E_2L$, $E_1H$ a $E_1L$ čímž dostaneme na $C_2C_1$ a $D_2D_1$ resp. body $H_1$ a $L_1$, $H_2$ a $L_2$. Tyto body leží zároveň na kružnicích $S_1$ a $S_2$. Myslíme-li si dále vedeny sečny $H_1L_1$ a $H_2L_2$ a protíná-li prvá průměr $C_2D_2$ v bodě $M$, druhá průměr $C_1D_1$ v $N$, jest $MN$ společná sečna kružnic $S_1$ a $S_2$ Tím úloha převedena na I. Stačí vésti $E_2M$, jež protne sečnu $HL$ v $M'$, potom spojnici $E_2N$, která vytkne na $CD$ bod $N'$; spojnice $M'N'$ zasáhne kružnici $S$ v bodech $X'$ a $Y'$. Průsečíky přímek $E_2X'$, $E_2Y'$ s přímkou $MN$ jsou hledané body $X$ a $Y$.

Uvedená řešení (jichž důkaz správnosti nečiní obtíže) jsou jen neúplnými ukázkami způsobu konstrukcí Steinerových při stanovených podmínkách; zároveň ovšem tím ukázáno, že — jak praví Steiner — všechny geometrické úlohy elementární jsou řešitelny pouhým pravítkem, jakmile jest v rovině dána pevná kružnice (se středem).

Konstrukce Steinerovy jsou velmi prospěšné, jak v úvodu slavný geometr podotýká, pro ingenieury a zeměměřiče. Ostatně resultát Steinerův byl podán již před ním v díle Ponceletově „Traité des propriétés projectives des figures" (Paris, 1822), což ovšem Steinerovi zásluh neubírá. — Konstrukce Steinerovy zobecnil E. Knabl[13]) v tom ohledu, že jako pomocný obrazec místo kružnice přijal libovolnou kuželosečku s ohnisky (nebo s jedním ohniskem a středem). Poněvadž však kuželosečku nelze sestrojiti jedním tahem našimi prostředky, nemáme pro toto rozšíření zájem. Jest to implicite obsaženo vlastně už v knize Steinerově (Dodatek).

Shrneme-li vše, ce se týká pravítka jednoduchého, lze říci, že pravítkem tím pouhým nelze provésti všech konstrukcí geometrických (o jakých mluvíme), za jistých podmínek se však

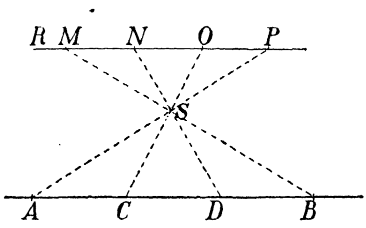
---

[13]) *Ed. Knabl*, Die geometrischen Konstruktionen der Aufgaben 1. und 2. Grades ve výr. zprávě gymn. v Salzburku, 1881.

obor jeho působnosti rozšíří značně, ba máme-li v rovině vyrýsovanou kružnici, jest možno provésti jím konstrukce všechny.

19) *B*) *Pravítko s dvěma rovnoběžnými hranami* (v konstantní vzdálenosti $c =$ šířce pravítka) stačí samo o sobě k provedení všech geom. úloh konstruktivních, a konstrukce jsou namnoze velmi jednoduché. Důkaz toho podal Adler[14]). Provedeme dle něho 8 konstrukcí, které už při Steinerově druhu konstrukcí sloužily k objasnění a důkazu. Jsou to úlohy 1.—6., potom I., II.*b*.

1. Dán bod $M$, přímka $P$. Přiložme pravítko jednou hranou k přímce $P$, podle druhé hrany pak narýsujme $R \parallel P$. Zvolme bod $N$ mimo tyto přímky a veďme z něho jednu příčku bodem $M$, druhou libovolnou, jež protnou přímku $R$ resp. $P$ v bodech $A$ a $B$, resp. $C$ a $D$. (Body $N$, $M$, $A$ a $C$ jsou na oné prvé příčce). Veďme dále spojnice $AD$ a $BC$, čímž dostaneme prů-




Obr. 16.

sečík $E$; $EN$ protne spojnici $MD$ v bodě $F$, $CF$ pak konečně vyznačí na $ND$ bod $M'$. Hledaná rovnoběžka je $MM'$.

2. $\alpha$) Úsečku $\overline{AB}$ ztrojnásobiti. — Budiž $\overline{AB}$ na přímce $P$. Veďme $R$ ve vzdálenosti $c$, $R'$ ve vzdálenosti $2c$ rovnoběžně s $\overline{AB}$ (přiložíce pravítko k $P$, resp. k $R$ a rýsujíce dle druhé hrany). Na $R'$ zvolme kdekoli bod $N$, spojnice $NA$, $NB$ dají na přímce $R$ body $A'$ a $B'$. Spojením bodů $A'$ a $B$ dostaneme bod $N'$ na $R'$, $N'B'$ protíná přímku $P$ v bodě $C$. Spojnice $NC$ určuje na $R$ bod $C'$, $N'C$ určuje na $P$ bod $D$; $\overline{AD} = 3.\ \overline{AB}$.

2. $\beta$) Půlení úsečky plyne z řešení 1. úkolu. Abychom roztrojili úsečku $\overline{AB}$ (obr. 16.), nanesme na $R \parallel AB$ 3 stejné,

[14]) *A. Adler*, Uiber die zur Ausführung geometrischer Constructionsaufgaben zweiten Grades nothwendigen Hilfsmittel, Sitzungsberichte der kais. Akad. in Wien, 1890.

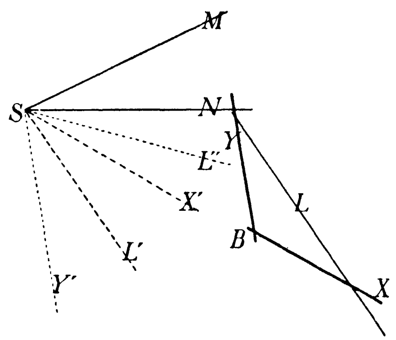
ale jinak libovolné délky po sobě (dle 2 $\alpha$). Pomocí bodu $S$ obdržíme pak řešení.

5. $\alpha$) Bychom rozpůlili $\sphericalangle$ $MSN$, veďme přímky $R$ a $R'$ rovnoběžně k ramenům úhlu toho (každou ve vzd. $c$), jich průsečík) určuje s vrcholem úhlu $S$ hledanou symmetrálu.

$\beta$) Bychom $\sphericalangle$ $MSN$ zdvojili, veďme $R \parallel SM$, čímž obdržíme bod $A$ na rameni $SN$. Položme teď pravítko jednou hranou bodem $S$ a otáčejme kol $S$ dotud, až druhá hrana půjde bodem $A$ potom veďme $SX$ podél hrany jdoucí vrcholem $S$, i jest

$$\sphericalangle XSN = 2 . \sphericalangle MSN.$$

3. V bodě $B$ na přímce $P$ jest vztyčiti kolmici. — Veďme přímku $R$ libovolně bodem $B$, potom $R'$ s jedné, $R''$ s druhé strany přímky $R$ rovnoběžně s ní ve vzdálenosti $c$. Položme




Obr. 17.

potom pravítko tak, aby jedna hrana jeho šla bodem $B$, druhá pak průsečíkem $A$ přímek $R'$ a $P$, i dostaneme bod $C$ jako průsečík druhé této hrany s přímkou $R''$. Kolmice hledaná je $CB$. — Neleží-li $B$ na $P$, veďme jím rovnoběžku k $P$ (úl. 1. a potom postupujme, jak vyloženo.

4. Bodem $B$ jest vésti přímky $BX$ a $BY$, jež by svíraly s přímkou $L$ úhel $MSN = \alpha$. (obr. 17.). — Majíce úhel $MSN$ sestrojený, veďme $SL' \parallel L$ a rozpůlme $\sphericalangle$ $MSL'$, čímž obdržíme $\sphericalangle$ $L''SN = \beta$. Učiňme teď $X'SL'' = \beta$, jest tedy $\sphericalangle$ $X'SL' = \alpha$, pročež hledaná přímka $BX \parallel SX'$. — Naneseme-li vedle $X'SL$ úhel $Y'SL' = L'SX'$, obdržíme v $BY \parallel SY'$ druhou hledanou přímku.

6. Na přímce $P$ od bodu $M$ máme nanésti úsečku $\overline{MX} = \overline{AB}$. ($\overline{AB}$ dána ovšem mimo přímku $P$). — Sestrojme napřed $A'M \nparallel \overline{AB}$ a rozpůlme pak $\sphericalangle A'MP$; přímka rovnoběžná k této symmetrále a jdoucí bodem $A'$ protne $P$ v hledaném bodě $X$.

I. $\alpha$) Zvláštní případ: Dejme tomu, že přímka $P$, jejíž průsečíky $X$ a $Y$ s kružnicí $K$ chceme hledati, má od středu jejího $S$ vzdálenost $c$. Poloměr kruhu $K$ jest — můžeme říci se zřetelem na úk. 6. — rovnoběžný k $P$ ($\overline{SA}$). Položme pravítko body $S$ a $A$ tak, by jedna hrana šla bodem $S$, druhá bodem $A$. To jest možno na dva, jeden, nebo žádný způsob, mají tedy $K$ a $P$ buď 2 průsečíky nebo 1 nebo žádný.

$\beta$) Obecný případ: $\overline{SA} \parallel P$ budiž zase poloměr $r$ kružnice $K$. Úloha tato se převede na $\alpha$) tím, že sestrojíme ku $K$ a $P$ podobný a podobně položený útvar $K'$ a $P'$ s $S$ jako středem podobnosti tak, aby $P'$ měla od $S$ vzdálenost $c$. Provedení: Veďme $P' \parallel SA$ ve vzdálenosti $c$ od $S$, bodem $S$ veďme libovolnou příčku, která protne původní přímku $P$ v bodě $B$ a přímku $P'$ v bodě $B'$; dále veďme $B'C \parallel BA$, vznikne bod $C$ na poloměru $SA$; jsou-li $X'$ a $Y'$ průsečíky kružnice $K'$ (střed $S$, poloměr $r' = \overline{SC}$) s $P'$, jsou $X$ a $Y$ hledané průsečíky.

II. $b$) Kružnice $K_1$ a $K_2$ o středech $S_1$ a $S_2$, poloměrech $r_1$ a $r_2$. (Vyznačeny jsou ovšem pouze středy kružnic a délky jich poloměrů, kružnice samy nevyrýsovány). Lze převésti na I. — Bod $C$ (průsečík centrály kružnic $K_1$ a $K_2$ se společnou jejich sečnou) sestrojíme takto: Veďme $\overline{S_1A} = r_2$ a $\overline{S_2B} = r_1$, obě $\perp$ na $S_1S_2$; vztyčíme-li nyní v bodě $M$ půlícím úsečku $\overline{AB}$ kolmici $N$ ku $AB$, obdržíme bod $C$ jako průsečík přímek $N$ a $S_1S_2$. Tím máme již společnou chordálu $Ch$ kružnic našich. Průsečíky přímky $Ch$ s některou z obou kružnic jsou hledané průsečíky $X$ a $Y$ kružnic těch.

Dokázáno tímto, co tvrzeno z počátku: pravítko s dvěma hranami rovnoběžnými má týž obor působnosti jako obyčejné pravítko a kružítko dohromady. Vzdálenost jeho hran musí ovšem býti přiměřena velikosti roviny, ve které sestrojujeme.

20. $C$) *Pravítko jednoduché, způsobilé měřiti a přenášeti úsečky*, nevystačuje samo, jak se zdá, pro všechny konstrukce. H. Simon, jenž touto věcí se zabývá v pojednání „Geometrische

Konstruktionen ohne Zirkel" [15]) praví, že se mu nepodařilo provésti konstrukci, která je nejdůležitější při důkaze možnosti sestrojení všech úloh elementárních jistým nástrojem, totiž určiti průsečíky kružnice a přímky; nepokládá to však přirozeně za důkaz nemožnosti, smíme prý doufati, dokud nebude nemožnost positivně dokázána, že jinému se podaří řešení provésti. Přes onu mezeru lze naše základní úlohy 1.—6. velmi dobře řešiti; úloha II. převádí se i pro tento nástroj na úlohu I. Zde podáváme zmíněné konstrukce dle článku Simonova.

Úloha 6. řeší se přenášecím pravítkem bezprostředně.

Úl. 1. $\alpha$) K přímce $AB$ vésti libovolnou rovnoběžku. Buď: Veďme $AO$, $BO$, průsečík je $O$; dále nanesme na prvou příčku $\overline{OA'} = \overline{AO}$, na druhou $\overline{OB'} = \overline{BO}$. Přímka $A'B'$ je rovnoběžná s $AB$.

Nebo: Z bodu $O$ mimo $AB$ veďme $OA$ a $OB$, prodlužme e o délku $\overline{AP} = \overline{OA}$ resp. $\overline{BQ} = \overline{OB}$ a spojme koncové body $PQ \parallel AB$.

$\beta$) K přímce $AB$ vésti daným bodem $M$ rovnoběžku.

Veďme přímku $MA$, prodlužme ji o délku $\overline{MA}$ do $O$, veďme potom $OB$, prodlužme o délku $\overline{OB}$ až do $Q$, i jest $MQ \parallel AB$. (Obrácené druhé řešení úlohy 1. $\alpha$).

Úl. 2. $\alpha$) Úsečku znásobiti lze ovšem bezprostředně.

$\beta$) Úsečku $\overline{AB}$ rozpůliti: Z libovolného bodu $M$ veďme přímky $MA$ a $MB$ a nanesme na ně od bodu $A$ resp. $B$ délku $\overline{AA'} = \overline{MA}$, resp. $\overline{BB'} = \overline{MB}$. Spojme $A'B$, $B'A$, i dostaneme jako průsečík bod $O$. Přímka $MO$ půlí úsečku $\overline{AB}$.

$\gamma$) Úsečku $\overline{AB}$ rozděliti v $n$ stejných dílů. — Nanesme na lib. přímku jdoucí bodem $A$ délky $\overline{AA_1} = \overline{A_1A_2} = \overline{A_2A_3} = \ldots = \overline{A_{n-1}A_n} = \overline{A_nC}$, celkem $n+1$ stejných úseček. Spojme $CB$ a nanesme $\overline{BB'} = \overline{CB}$ na prodloužení této spojnice, pak veďme $A_{n-1}B'$, jež protne $\overline{AB}$ v bodě $M$; $\overline{MB} = \frac{1}{n}\overline{AB}$.

Úl. 3. $\alpha$) Sestrojiti pravý úhel v poloze libovolné. — Dán li vrchol $C$, veďme tímto bodem přímku libovolné délky $CD$; bodem $D$ položme lib. přímku, na niž od bodu $D$ na obě strany

[15]) v 22. ročníku Hoffmannova časopisu Zeitschrift für math. und nat. Unt. (1891.)

nanesme $\overline{DA} = \overline{DB} = \overline{DC}$. Pravý úhel jest $\sphericalangle ACB$. — Dána-li přepona, vedeme si obráceně.

$\beta$) V daném bodě $C$ přímky dané $P$ vztyčiti kolmici. — Vytkněme si bod $D$ na $P$, kterým vedeme přímku, a na této nanesme na obě strany $\overline{DA} = \overline{DB} = \overline{DC}$; tím dostaneme v bodě $C$ pravý úhel $ACB$. Otočme pravoúhlý trojúhelník $ACB$ o $90^0$ tím, že prodloužené odvěsny přiměřeně rozšíříme. Rozpůlením nové přepony (nanesouce délku $CD$) nalezneme polohu nové mediany $CD'$, která jest hledanou kolmicí.

$\gamma$) Z daného bodu $M$ spustiti kolmici na danou přímku $AB$. — Vztyčme v lib. bodě $Q$ přímky $AB$ kolmici a veďme bodem $M$ rovnoběžku takto: Přímkou $MA$ protneme onu pomocnou kolmici v $R$, přenesme na druhou stranu kolmice od $Q$ délku $\overline{QR'} = \overline{RQ}$, na přímku $AR'$ nanesme pak $\overline{AM'} = \overline{AM}$. Kolmice hledaná jest $MM'$.

Úl. 4. Přenésti daný úhel. — Vztyčíme kolmici v lib. bodě jednoho ramene a přeneseme pravoúhlý trojúhelník tím vzniklý dle odvěsen (přeneseme jejich délky).

Úl. 5. $\alpha$) Rozpůliti úhel. — Nanesme na obě ramena napřed délky $m$, potom $n$, spojme křížem koncové body, i obdržíme bod symmetrály. Pohodlné jest učiniti $m = n$ (resp. $n = 2m$).

$\beta$) Zdvojiti daný úhel. — Přenesme pravoúhlý trojúhelník tak, aby odvěsna přilehlá onomu úhlu se kryla s původní a odvěsna protilehlá aby ležela v prodloužení druhé (stejně dlouhé) odvěsny trojúhelníka původního. Máme-li sestrojiti úhel $n$-násobný, pokračujeme od zdvojeného dále tím, že přeponu nahradíme odvěsnou a činíme totéž co prve.

Úl. II. Konstrukce společné sečny dvou kružnic. Dány $(S, r)$ a $(S_1; r_1)$. Možnost konstrukce plyne z úvahy: Dejme tomu, že společná sečna $PQ$ rozděluje centrálu $c$ v úseky $p$ a $q$; máme tu

$$p^2 - q^2 = r^2 - r_1^2, \qquad p + q = c,$$

tedy

$$p - q = \frac{r^2 - r_1^2}{c} = \frac{(r + r_1)(r - r_1)}{c}.$$

Lze tedy $p - q$ sestrojiti jako čtvrtou úměrnou dle úlohy 1. $\beta$). Učiníme-li pak na $SS_1$ úsečku $\overline{SR} = p - q$, jest $Q$ střed úsečky $\overline{RS_1}$. Tímto úloha II. redukuje se na I.

Jde konečně tedy o konstrukci úlohy I., která provedena nebyla; na její možnosti závisí odpověď, zda přenášecí pravítko je nástroj s oborem působnosti takovým jako kružítko s pravítkem.[16])

21. *D*) Na čtvrtém místě uvedeno *měřicí pravítko s dvěma hranami*, které tedy spojuje výhodné vlastnosti pravítka druhého a třetího. Jest nepochybno, že takovým pravítkem lze provésti všechny konstrukce 2. stupně, když jednodušším pravítkem dvojhranným možnost ta je dána. Ovšem mnohé konstrukce se zjednoduší a zkrátí. Není zde třeba zvlášť znova uváděti sestrojení podaná již sub *B*), zjednodušení jich dle *C*) snadno se naleznou. Případ tento je již vlastně kombinace dvou jednoduchých nástrojů a vytknut zde proto, že často pravítko dvojhranné přichází zároveň upraveno k měření; má býti tedy upozorněno na dvojí jeho výhodu.

22. *E*) *Pohyblivý úhel,* nejčastěji v podobě trojúhelníkového pravítka, je sám o sobě nástroj, jenž nám nahrazuje pravítko s kružítkem.[14]) Dokážeme to v následujícím na základních konstrukcích, při nichž tedy jako jedinou pomůcku stanovíme pohyblivý úhel $\alpha$. Úhel tento *volme nejdříve kosý;* jinak může míti kteroukoli velikost mimo $180^0$. Ve skutečných konstrukcích vezměme třebas $\alpha = 30^0$.

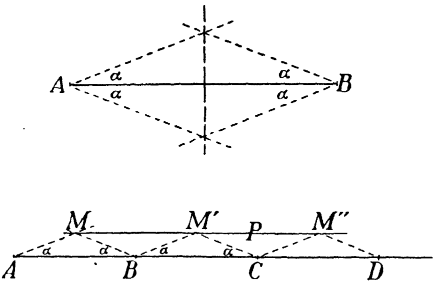
Úloha 1. Dána-li přímka $P$ a bod $B$, přiložíme jedním ramenem úhlu $\alpha$ pravítko k přímce $P$ tak, aby druhé procházelo bodem $B$; dle druhého tohoto ramene vyrýsujme pomocnou přímku jako dráhu, dle níž potom pravítko posouváme, až vrchol úhlu $\alpha$ padne do bodu $B$. Dle hrany prve k přímce $P$ přiložené lze narýsovati rovnoběžku k $P$.

2. Obrazec 18. ukazuje, jak půlíme úsečku $\overline{AB}$. Dále se tam podává znásobení úsečky, příkladem ztrojení: Z $A$ a $B$ jde $M$; vedeme-li $P \parallel AB$, obdržíme snadno $M'$, $C$, $M''$, $D$; $\overline{AD} = 3. \overline{AB}$. — Úloha, děliti úsečku na určitý počet stejných

[16]) Nejnověji D. Hilbert dokázal, že nelze všechny konstrukce, které obvykle provádíme pravítkem a kružítkem, provésti pouhým pravítkem a nástrojem na přenášení úseček, ač jest úloh těmito pomůckami řešitelných velmi mnoho. (Také na př. problém Malfattiho možno tak řešiti, nikoli Apolloniův). Viz D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie (ve Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss-Weber-Denkmals in Göttingen, Leipzig Teubner, 1899).

částí, řeší se zcela jako při pravítku dvojhranném (*B*.), ježto v obou případech lze snadno vésti rovnoběžky.

3. Máme-li bodem $M$ mimo přímku $P$ spustiti kolmici na $P$, veďme přímky $P'$ a $P''$ odchýlené od $P$ o úhel $\alpha$ tak, aby se protínaly v $M$, potom $P'_1 \parallel P'$ a $P''_1 \parallel P''$ (stejně jak ukazuje obr. 18., jenže zde nejsou body $A$ a $B$ předem stanoveny); $P'_1$ a $P''_1$ se protínají v bodě $M'$, $MM'$ je hledaná kolmice. — Leží-li $M$ na $P$, veďme předem rovnoběžku k $P$, čímž se úloha převede na předešlou.



Obr. 18.

6. Budiž dána úsečka $\overline{AB}$, přímka $P$ a na ní bod $O$; jest nalézti $\overline{OX} = \overline{AB}$ ($X$ ovšem na přímce $P$). Učiňme za tím cílem $\overline{OC} \# \overline{AB}$, veďme pak paprsek $P'$, odchýlený o $\sphericalangle\ \alpha$ od $OC$, dále $P''$ odchýlený o $\alpha$ od $P'$, konečně $CD \parallel P''$ ($D$ je průsečík této rovnoběžky a přímky $P'$) a $DE \parallel OC$ ($E$ je průsečík rovnoběžky $DE$ a přímky $P''$). Položíme-li nyní úhel $\alpha$ tak na plochu papíru, že jeho rameno jedno jde bodem $E$, druhé bodem $C$ a jeho vrchol leží na $P$ v bodě $X$, jest již $\overline{OX} = \overline{OC}$, úloha tedy řešena.

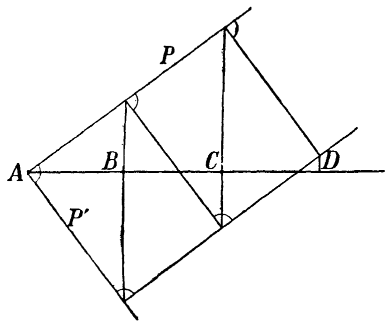
5. $\alpha$.) Majíce úhel daný $MSN$ rozpůliti, vyznačme na rameni $MS$ bod $A$ kdekoli, na rameni $NS$ pak dle úl. 6. nanesme $\overline{SB} = \overline{SA}$; k rameni $MS$ přiložme úhel $\alpha$ kladouce jeho vrchol do $A$ a dle druhé hrany vyrýsujme paprsek $X$; totéž učiňme u ramene $NS$, i dostaneme $Y$. Průsečík přímek $X$ a $Y$ dává bod $L$, $SL$ je symmetrála úhlu $MSN$.

$\beta$.) Podobnou cestou zdvojíme daný úhel.

4. Řešení jako při pravítku dvojhranném (*B*).

I. Bodem $S$ (středem) veďme $P'$ a $P''$, prvý paprsek o úhel $\alpha$ odchýlený od $\overline{SA}$ (daný poloměr), druhý zase o $\alpha$ odchýlený od prvého; dále veďme $AB \parallel P''$ ($B$ na $P'$) a $BC \parallel AS$ ($C$ na $P''$). Nyní položme úhel $\alpha$ tak, aby jeho ramena šla body $A$ a $C$ a jeho vrchol aby ležel na přímce $P$ (dané). Jest to možno na dva způsoby nebo na jeden nebo nemožno; body, na nichž spočívá vrchol úhlu $\alpha$, jsou pak hledané body $X$ a $Y$.

Úl. II. redukuje se na I., jakož ukázáno v $B$.).




Obr. 19.

23. F) *Pohyblivým úhlem pravým* jest rovněž možno provésti všechny konstrukce elementární. Pomůckou je tedy nyní zase třebas trojúhelníkové pravítko, ovšem s pravým úhlem. Konstrukce tohoto odstavce budou některé jiné než konstrukce odst. 22.; neboť jedny z oněch se nehodí pro $\alpha = 90^0$, jiné se velmi pro ten případ zjednodušují.

Sledujme opět 8 konstrukcí, už několikrát provedených, které nám zastupují všechny strojné úlohy geometrické. Úlohy 1., 4. a 5. řeší se zcela tak jako v odst. E. Úlohu 3. možno bezprostředně provésti.

Úl. 2. $\alpha$) Jak lze úsečku $\overline{AB}$ na př. ztrojnásobiti, ukazuje obrazec 19.; $P$ byla při tom vedena libovolně bodem $A$ a $P' \perp$ k $P$. Jest $\overline{AD} = 3. \overline{AB}$.

$\beta$) Půlení úsečky $\overline{AB}$ děje se tím, že v $A$ sestrojíme kolmici k $AB$ a bodem $B$ vedeme libovolnou příčku; průsečíkem této a kolmice oné sestrojíme rovnoběžku k $AB$. Kolmice k $AB$ v bodě $B$ vztyčená protne sestrojenou prve rovnoběžku v bodě, který spojíme s bodem $A$. Spojnice tato a příčka z počátku vedená stanoví průsečík, z něhož zbývá spustiti kolmici na $AB$, abychom dostali bod půlící.

$\gamma$) Dělení úsečky v několik částí děje se zcela tak jako v $B$) a $E$).

6. Máme-li učiniti na $P$ $\overline{OX} = \overline{AB}$, veďme nejprve $P' \parallel AB$ a učiňme na této přímce $\overline{OC} = \overline{OD} = \overline{AB}$. Položíme-li teď úhel pravý tak, aby jeho ramena procházela body $C$ a $D$ a aby jeho vrchol padl na $P$, jest bod $X$ již nalezen.

I. Sestrojme průměr kružnice $K$ rovnoběžný s $P$ a položme koncovými jeho body pravý úhel tak, by jeho vrchol padl na $P$, čímž průsečíky kružnice $K$ a přímky $P$ jsou určeny.

Úl. II. se převádí opět na úl. I.

Vidíme z podaného, že pohyblivý úhel jakýkoliv, také a zvláště pravý, mají obor působnosti stejně aspoň rozsáhlý jako naše známá dvojice. Pokud speciálně pravý úhel má ještě jiné přednosti, o tom až dále poznámka.

24. $G$) Jak veliký je rozsah působnosti *pouhého kružítka se stálým rozevřením,* nebylo vyšetřeno; zdá se, že není veliký.

Obrátíme se hned k případu, kdy *vedle kružítka s neměnitelným otvorem máme k ruce jednoduché pravítko.* Případ tento je příbuzný případu Steinerovu, kdy dána byla pevná kružnice v rovině a jednoduché pravítko, omezení zde není však tak veliké jako tam.

Dějiny geometrie kružítka s konstantním rozevřením podal W. M. Kutta; [17]) vedle toho na př. M. Cantor ve svých dějinách[18]) má zmínky o této geometrii. — Řekové nepřišli na myšlenku řešiti geometrické úlohy užitím pravítka a kružítka omezeného. Skutečný pokus o takovou geometrii nalézáme teprve u Araba Abûla Wefy [19]) v Bagdadě (940—998). Abûl Wefâ výslovně uvádí omezení, jaké my zde si činíme, avšak podává vedle několika nejzákladnějších konstrukcí jenom sestrojení pravidelných mnoho-

---

[17]) *W. A. Kutta,* Zur Geschichte der Geometrie mit constanter Zirkelöffnung, Nova Acta Leop.-Carol. Acad., Halle, 1897.

[18]) *M. Cantor,* Geschichte der Mathematik.

[19]) Rozbor přednášek tohoto geometra najdeme v pojednání *Woepckeho* (v Journal asiatique, 1855) a v *Rodetově* (Bulletino di Boncompagni, sv. XVI.)

úhelníků, při čemž daným stálým otvorem kružítka je buď strana $n$-úhelníka nebo poloměr opsaného kruhu. Vytknouti sluší u něho duchaplné konstrukce pětiúhelníka. Po něm teprve na konci století 15. dva umělci Lionardo da Vinci a Alb. Dürer podávají konstrukce uvedenými prostředky a sice opět jenom konstrukce pravidelných úhelníků. Přesné jsou však ze všech těch, které uvádějí, pouze sestrojení pravidelného osmiúhelníka a čtyřiadvacetiúhelníka v kruhu (u Lionarda); ostatní konstrukce jsou vesměs přibližné, což ovšem jim stačilo. Úlohu naši v celém rozsahu řešili brzy potom, v polovici stol. 16., italští známí mathematikové Ferrari, Tartaglia, Cardano a Benedetti.[20])

V novější době pak Woepke podávaje geom. konstrukce Abûl Wefovy řeší problém geometrie s konstantním rozevřením kružítka (vedle pravítka), a sice na základě rozboru Steinerova; podává totiž konstrukce základních jeho úloh.[21])

Abychom dali příklady této geometrie a dokázali, že obor pravítka a kružítka se stálým otvorem je tak rozsáhlý jako při pravítku a kružítku bez omezení, podáme konstrukce základních úloh, častěji už projednaných.

Úloha 5. Úhel rozpůliti a znásobiti. Lze provésti velmi snadno cestou obecně známou.

Úl. 1. Bodem $M$ vésti rovnoběžku k přímce $P$. Opišme kol $M$ jako středu daným rozevřením kružnici poloměru $r$, jež protne $P$ v bodech $A$ a $B$; úhel s rameny $MA$ a $MX$ rozpůlme ($X$ je směr přímky $BM$, prodloužené přes $M$). [Woepke.]

Jiná konstrukce: Učiňme $\overline{MD} = r$, čímž dostaneme na přímce $P$ bod $D$; prodlužme $MD$ přes $D$ až do $E$ ($\overline{DE} = r$), dále učiňme $\overline{EF} = r$, $F$ je na $P$, $EF$ prodlužme přes $F$ do bodu $G$ ($\overline{FG} = r$); i jest $MG \parallel P$. — Neprotne-li kružnice kol $M$ přímku $P$, nutno mezi $M$ a $P$ sestrojiti rovnoběžky jako sprostředkovatelky. [Tartaglia].

Úl. 3. $\alpha$) Vztyčiti kolmici k $P$ v bodě jejím $A$. — Omezme na $P$ délky $\overline{AB} = \overline{AC} = r$, sestrojme rovnostranné trojúhelníky $ABD$ a $ACE$, pak $DEF$; $AF$ je kolmice hledaná. [Benedetti].

---

20) Díla jejich uvedena v pojednání Kuttově.

21) Journal asiatique, 1855, str. 228.

Nebo: Sestrojme rovnostranný trojúhelník $ABC$, jehož stranou je $r$ a $B$ leží na $P$, a prodlužme $BC$ přes $C$ o vlastní délku $r$ do $D$. $AD$ je $\perp$ na $P$.

$\beta$) Spustiti kolmici z $A$ na $P$. — Bodem $A$ veďme rovnoběžku k $P$ a pokračujme dle $\alpha$).

2. Vztyčme v $A$ a $B$ ($\overline{AB}$ je daná úsečka) kolmice a nanesme na ně délky $m$ a $n$, tím dostaneme bod $C$ resp. $D$, spojnice $CD$ dělí pak $\overline{AB}$ v poměru $m:n$. [Wefâ.]

4. Bodem $M$ vésti přímku $R$ tak, aby svírala s danou přímkou $P$ daný úhel $BAC$. — Veďme $AD \parallel P$, rozpůlme $\sphericalangle CAD$ paprskem $AE$ a učiňme $\sphericalangle BAN = 2. BAE$. Rovnoběžka k $AN$ bodem $M$ vedená svírá s $P$ úhel rovný danému.

6. Kratší úsečku $\overline{AB}$ nanésti na delší $\overline{AC}$ od společného počátku $A$. — Úhel $BAC$ rozpůlme přímkou $R$, na $R$ určeme bod $E$ jako průsek kružnice poloměru $r$ opsané kol $B$, potom bod $F$ jako průsek přímky $AC$ s kružnicí vedenou týmž poloměrem $r$ kolem bodu $E$ jako středu. $\overline{AF} = \overline{AB}$ (při vhodné volbě průsečíku $F$). [Ferrari].

I. Průsek dané přímky $P$ a dané kružnice ($S$ její střed, $r'$ poloměr). — Spusťme ze středu $S$ kolmici $SD$ na $P$ ($D$ na $P$), nanesme poloměr $r'$ jako $\overline{SA}$ libovolným směrem z bodu $S$ a veďme spojnici $AD$. Kružnice sestrojená kolem $S$ jako středu poloměrem $r$ protne $SA$ v bodě $B$; bodem $B$ veďme rovnoběžku k $AD$, jež zasáhne $SD$ v $Q$, bodem $Q$ veďme rovnoběžku k $P$, která protne kružnici poloměru $r$ a středu $S$ v bodech $M$ a $N$. Hledané průsečíky nalezneme jako průseky přímek $MS$ a $NS$ s přímkou $P$. [Woepke.]

II. Nalézti průseky dvou kružnic daných poloměry a středy jest totéž jako sestrojiti trojúhelník z daných tří stran.

Hleďme tedy sestrojiti trojúhelník daných stran $a$, $b$, $c$ ($a < b < c$). Konstruujme nejprve podobný trojúhelník $DEF$ o stranách $DE = r$, $EF = r\frac{b}{a}$, $FD = r\frac{c}{a}$. Myslíme-li si kol $D$ jako středu opsánu kružnici poloměru $r$ a je-li $G$ druhý průsečík přímky $FE$ s kružnicí touto, platí známý vztah:

$$\overline{FE}.\overline{FG} = (\overline{FD} - r)\ (\overline{FD} + r).$$

Proto můžeme $FG$ sestrojiti jako čtvrtou úměrnou k daným třem délkám, odtud potom i tětivu $EG$, jež do kruhu se středem $D$ může od bodu $E$ býti nanesena. Bod $F$ určíme nanesouce délku $r.\frac{b}{a}$ na $GE$ od bodu $E$. Vlastní trojúhelník nalezneme nyní tím, že přeneseme známé už jeho úhly $D$ a $E$ (z podobného trojúhelníka) na úsečku $a$. [Ferrari.]

(Známou délku (zde $EG$) naneseme do kruhu jako tětivu tím, že sestrojíme napřed trojúhelník se základnou $EG$ a rameny $r$, úhel tohoto trojúhelníka při vrcholu naneseme potom jako středový v oné kružnici.)

Takto vidíme, že kružítko s jedním rozevřením stačí ve spojení s pravítkem na všechny konstrukce; ale lze provésti, jak už Ferrari učinil, ještě více, totiž vybudovati celou geometrii Euklidovu, tedy provésti i důkazy pouček týmiž omezenými prostředky.

(Dokončení.)

# Úlohy.

## Řešení úloh.

### Úloha 1.

*Čísla přirozené řady napsána jsou vedle sebe, aniž jedno od druhého odděleno. Kterak lze ustanoviti číslici stojící na určitém místě této řady? Na př. číslici 74892hou?*

Ing. C. *Vladimír Ibl.*

Řešení. (Zaslal p. *Josef Navrátil*, stud. VI. tř. r. v Uh. Brodě.)

Píšeme-li v přirozenou řadu čísla 1—99, neoddělujíce jich, tedy

$$123456789101112\ldots979899,$$

dostaneme celkem $9 + 2 . 90 = 189$ číslic. Píšíce dále čísla 100—999 dostaneme $3 . 900 = 2700$ číslic, v mezích 1000—9999 číslic $4 . 9000 = 36000$ atd. Vyžaduje tedy řada čísel