Otomar Pankraz

Poznámka k mému článku: O pojmu pravděpodobnosti

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 69 (1940), No. Suppl., D161--D165

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121003

Označíme-li kterýkoliv z těchto trojúhelníků jako i-tý, bude $(i \pm 1)$-ní trojúhelník sousední. Dva sousední trojúhelníky mají jeden úhel společný. Úhly označme tak, že $\beta_i = \alpha_{i+1}$, čili také $\alpha_i = \beta_{i-1}$. Trojúhelník $(i \pm 2)$-hý bude k i-tému protilehlý. Z obr. 4 je zřejmo, že (při $\gamma = R$) platí vztahy

$$\left.\begin{matrix} a_i \\ b_i \end{matrix}\right\} = R - \left\{\begin{matrix} c_{i+1} \\ c_{i-1} \end{matrix}\right. . \qquad \left.\begin{matrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{matrix}\right\} = c_{k \pm 2}. \tag{14}$$

Prvá a druhá věta cosinová pro i-tý trojúhelník má tvar

$$\cos c_i = \cos a_i \cos b_i = \operatorname{cotg} \alpha_i \operatorname{cotg} \beta_i.$$

Podle (14) bude

$$\cos c_i = \sin c_{i+1} \sin c_{i-1} = \operatorname{cotg} c_{i+2} \operatorname{cotg} c_{i-2}. \tag{15}$$

To však je pravidlo Neperovo. Přepony c_i pěti trojúhelníků tvoří totiž pětiúhelník

$$\begin{matrix} & \beta \quad \alpha & \\ R - b & & R - a \\ & c & \end{matrix}$$

a rovnici (15) lze vyjádřit slovy: cosinus kteréhokoliv prvku pětiúhelníkového schematu je dán součinem sinů přilehlých prvků nebo součinem cotangent protilehlých prvků.

Podle toho dostáváme pro pravoúhlý trojúhelník dvě serie rovnic

$$\begin{aligned} \cos c &= \cos a \cos b = \operatorname{cotg} \alpha \operatorname{cotg} \beta \\ \sin a &= \sin \alpha \sin c = \operatorname{cotg} \beta \operatorname{tg} b \\ \cos \alpha &= \sin \beta \cos a = \operatorname{tg} b \operatorname{cotg} c \\ \cos \beta &= \cos b \sin \alpha = \operatorname{cotg} c \operatorname{tg} a \\ \sin b &= \sin c \sin \beta = \operatorname{tg} a \operatorname{cotg} \alpha. \end{aligned}$$

Pravidlo a schema zde uvedené se liší poněkud od pravidla obvykle uváděného. Je však toto znění odůvodněno celou geometrickou konstrukcí, kdežto obvyklé znění je z rovnic pro pravoúhlý trojúhelník pouze odpozorováno.

Kreslil Em. Klier. Archiv JČMF.

Poznámka k mému článku „O pojmu pravděpodobnosti“.

Otomar Pankraz.

Do tohoto článku (Časopis 69 (1940), seš. 2, část D) vniklo mi vlivem Reichenbachových problematických výkladů v jeho knize „Wahrscheinlichkeitslehre (1935)“ do axiomů na str. D 80 nedopatření tím, že jsem z definičního oboru funkce $P(X, Y)$, t. j. pravděpodobnosti P výskytu jevu Y za předpokladu, že jev X jistě nastal, nevyloučil element $(\emptyset, \emptyset)$, kde $\emptyset$ jest nulová množina. Bez jeho vyloučení by zřejmě axiomy III. a IV. vedly ke sporu, neboť bych nemohl užít známé věty z teorie aditivních množinových funkcí, podle které každá tato funkce pro $\emptyset$ má nulovou hodnotu (Čech, Bodové množiny I., str. 135).

Avšak i po odstranění sporu způsobeného nulovou množinou vykazují axiomy na str. D 80 jednu nepříjemnost a to, že pro nenulové množiny X, Y obě $\epsilon\ \Omega$ s podmínkou $Y \supseteqq X$ vedou k hodnotě $P(X, Y) \geqq 1$. Platí totiž obecná věta, podle které nezáporná aditivní množinová funkce $f(X)$ v množinovém tělese Ω jest neklesající, to znamená: $f(A) \geqq f(B)$, jestliže $A \supseteqq B$ pro A, B obě $\epsilon\ \Omega$ (Čech, loc. cit. str. 141, cvičení 19.8—19.10). Zvolíme-li tedy pevný element X_0, jest $P(X_0, Y) \geqq P(X_0, X_0) = 1$ pro všechny $Y \supseteqq X_0$. Pro účely počtu pravděpodobnosti jest proto výhodné upraviti axiom III. uvedený ve zmíněném článku.

Budou tedy axiomy (pro obyčejné rozložení) míti tento tvar:

I. Ω nechť jest těleso množin $X, Y, Z, \ldots$ s největší množinou E.*)

II. Ke každé dvojici (X, Y) elementů $X \epsilon\ \Omega$, $Y \epsilon\ \Omega$ s výjimkou dvojic $(\emptyset, Y)$ jest jednoznačně přiřazeno reálné číslo $P(X, Y) \geqq 0$. [Důsledek: $P(\emptyset, Y)$ pro libovolné $Y \epsilon\ \Omega$ není definováno; tedy také bez významu jest $P(\emptyset, \emptyset)$.]

III. Pro každou dvojici (X, Y) nenulových elementů $X \epsilon\ \Omega$, $Y \epsilon\ \Omega$ s podmínkou $Y \supseteqq X$ platí $P(X, Y) = 1$.

IV. Pro libovolný nenulový element $X \epsilon\ \Omega$ a pro dva libovolné elementy $Y \epsilon\ \Omega$, $Z \epsilon\ \Omega$ s podmínkou $YZ = \emptyset$ platí

$$P(X, Y + Z) = P(X, Y) + P(X, Z).$$

[Důsledek: Pro libovolný nenulový element $X \epsilon\ \Omega$ jest $P(X, \emptyset) = 0$.]

Značí-li $\mathfrak{M}$ množinu všech dvojic $(\emptyset, Y)$, kde Y probíhá všechny elementy z Ω, a $\mathfrak{S}$ kartézský součin $\Omega \times \Omega$ [Čech, loc. cit. str. 7], pak $P(X, Y)$ jest definována na množině

$$\mathfrak{S} - \mathfrak{M}.$$

Pokud jde o význam rčení „$P(X, Y)$ jest ohodnocení inklusního vztahu $\supseteqq$ mezi množinami X a Y“, jest na př. určen takto:

Nechť konkrétně množiny X a Y jsou vyznačeny kruhy v ro-

*) V počtu pravděp. jeví se výhodnější podati relativní definici pojmu „tělesa“ vzhledem k určité množině operací: Nechť F jest množina operací definovaných na množině Ω abstraktních elementů. Ω sluje F-těleso, je-li uzavřená vůči každé operaci z F.

vině a nechť $P(X, Y)$ značí podíl, v jehož jmenovateli jest velikost plochy X a v čitateli velikost té části plochy Y, která překrývá plochu X. Potom poměry mezi X a Y jsou vyčerpány těmito čtyřmi případy:

1. Mezi X a Y jest úplná inkluse $X \supseteqq Y \neq \emptyset$. Platí $0 \leqq P(X, Y) \leqq 1$.

2. Mezi X a Y jest úplná inkluse $Y \supseteqq X \neq \emptyset$. Platí $P(X, Y) = 1$, což jest axiom III.

3. Mezi X a Y jest částečná inkluse, takže $XY \neq Y$ a také $XY \neq X$, při čemž $XY \neq \emptyset$. $P(X, Y)$ jest ohodnocení inkluse $X \supseteqq YX$; platí $0 \leqq P(X, Y) \leqq 1$.

4. Mezi X a Y není vůbec inkluse, to jest $XY = \emptyset$. Pak $P(X, Y)$ jest ohodnocení inkluse $X \supset \emptyset$ a platí $P(X, Y) = 0$, jako důsledek axiomu IV.

Tyto inklusní případy můžeme přepsat do implikací (definice implikace Čech, loc. cit. str. 4) a tím přejíti od množinové interpretace k výrokům. Nechť značí $X(\xi)$ výrok „ξ má vlastnost X, to jest ξ patří do množiny X“, takže

$$X(\xi) \equiv \xi \in X$$

[$\equiv$ značí zde logickou (definitorickou) rovnost].

Pak jest známo, že

$$X \supseteqq Y \equiv (\xi)\,(Y(\xi) \Rightarrow X(\xi)),$$

kde (ξ) jest logický operátor „všechny“, to znamená pravá strana se čte: „Každé ξ, které má vlastnost Y (patří do Y), má vlastnost X (patří do X), při čemž opak ovšem obecně neplatí.“ Touto definicí lze vztah $\supseteqq$ nahraditi vztahem implikace $\Rightarrow$, čímž získáme novou a to větnou interpretaci pravděpodobnostních axiomů.

Axiomy I.—IV. zůstává nerozřešen tento problém: Zaručují axiomy I.—IV., že funkce $P(X, Y)$ jimi definovaná připouští vždy statistickou interpretaci?

K tomu jest třeba, shodnouti se na významu slova „statistický“ výklad. Všeobecně platí dohoda, že „statistickým“ jest každé číslo, které se dá redukovat na frekvence. Vskutku, kromě jediného případu [kvantová fysika], nevede tato dohoda nikdy k pochybnostem.

Chtěl-li bych funkci $P(X, Y)$ na $\mathfrak{G} - \mathfrak{M}$ specialisovati tak, aby byla vždy schopna statistické (t. j. frekvenční) interpretace, musil bych přidati tento nový axiom:

V. Pro každou dvojici (X, Y) z oboru $\mathfrak{G} - \mathfrak{M}$ jest

$$P(X, Y) = \frac{P(E, XY)}{P(E, X)}.$$

Zverifikujme, že ve zlomku v axiomu V. jest již předpoklad $P(E, X) > 0$. Podle axiomu II. má míti tento zlomek **určitou** hodnotu. Kdyby $P(E, X) = 0$, pak také $P(E, XY) = 0$, ježto $X \supseteqq XY$ a zlomek by dával t. zv. neurčitý tvar $\frac{0}{0}$, což se vylučuje.

Nerozhodnutá zůstává otázka platnosti axiomu V. pro kvantovou fysiku. Jest možno **každý** případ této fysiky vyložiti pomocí frekvencí, uvážíme-li, že existují

1. nejmenší měřitelná délka řádu 10^{-13} cm,
2. nejmenší měřitelný časový interval řádu 10^{-13} cm/c, c = rychlost světla ve vakuu a
3. komplementární měřitelné údaje řídící se Heisenbergovými relacemi neostrosti?

Jest oprávněné přiřaditi axiom V. k axiomům I.—IV. pro „pravděpodobnostní" popis subatomárních jevů probíhajících v prostoro-časových oborech ještě menších řádů než 10^{-13}, kde principielně nemohu mluviti o „spočitatelnosti" elementů, ačkoli jde o hromadné (kolektivní) jevy? Jak patrno, jde zde o to, zda pravděpodobnostní výklad určitých jevů nutně znamená výklad pomocí frekvencí, či zda jeho rámec jest širší.

V důsledku toho, že tato otázka není doposud rozřešena s konečnou platností, nezařadil jsem na str. D 80 axiom V., nýbrž ponechal jsem axiomatický systém otevřený a teprve na str. D 81 jsem si zaručil dva případy, t. j. $P(A) = P(E, A)$ a $P_A(B) = P(A, B)$, které statistický (frekvenční) výklad jistě připouštějí. Zdali jsou tyto případy s hlediska teorie pravděpodobnosti jedině možné, o tom prozatím ničeho bližšího nevíme.

Pomocí funkce $P(X, Y)$ bez axiomu V. jest možno vybudovat počet pravděpodobnosti analogický obvyklému počtu tím, že bychom podmíněné pravděpodobnosti (a tím t. zv. větu o násobení pravděpodobností) zrelativisovali vzhledem k elementu X definicí

$$P_Z(X, Y) = \frac{P(X, YZ)}{P(X, Z)}, \qquad P(X, Z) > 0.$$

Význam tohoto počtu pravděpodobnosti dal by se charakterisovati takto: Dosavadní počet pravděpodobnosti určuje čísla $P(X, Y)$ vzhledem k největší množině E jakožto k universálnímu oboru diskuse. Zrelativisovaný počet pravděpodobnosti určoval by $P(X, Y)$ vzhledem k diskusním oborům X, které jsou podobory universálního oboru E, čímž by se pravděpodobnostní výroky objevily v novém a hlubším světle.

Uvádím ještě jednu poznámku. Nechť Ω jest množinové těleso, které může ale nemusí míti největší množinu. K vybudování počtu pravděpodobnosti úplně by postačila funkce $P(X, Y)$ definovaná na množině $\mathfrak{N}$ všech dvojic (X, Y) s podmínkou $X \supseteqq Y$, $X \neq \emptyset$, $X \in \Omega$, $Y \in \Omega$ takto: $P(X, Y)$ **nechť jest na** $\mathfrak{N}$ **ohraničená** (nikoliv jen konečná!) nezáporná (identicky nenulová, to znamená: není identicky rovná nule) množinová funkce, která kromě toho v proměnné Y jest aditivní. Toto pojetí počtu pravděpodobnosti nevede k jeho ochuzení; toliko některé jeho formule se zjednoduší.

Restrikce všech možných případů inkluse mezi dvěma množinami na případ $X \supseteqq Y$ odůvodněna jest tím, že dvě různé množiny $Y_1 \neq Y_2$ překrývající X ve stejné části, t. j. s průnikovou podmínkou $XY_1 = XY_2$, vedou ke stejné hodnotě funkce P: $P(X, Y_1) = P(X, Y_2)$. Překrývá-li Y množinu X, pak její část $(Y - XY)$ jest pro vybudování počtu pravděpodobnosti irelevantní, neboť může býti libovolně volitelna.

Příklad zjednodušení formulí: V obvyklém počtu pr., kde X, Y, Z se jen z části mohou překrývat, platí

$$P(X, Y \,.\, Z) = P(X, Y) \,.\, P(X \,.\, Y, Z),$$

kdežto ve zjednodušeném počtu pr. jest

$$P(X, Z) = P(X, Y) \,.\, P(Y, Z),$$

neboť nyní $X \supseteqq Y \supseteqq Z$. Známý Bayesův vzorec (Rychlík, Úvod do počtu pravděpodobnosti, Praha 1938, str. 32, 34) se přepíše jako

$$\frac{P(X, Y_1)}{P(X, Y_2)} = \frac{P(Y_2, Z)}{P(Y_1, Z)},$$

kde $X \supseteqq Y_i \supseteqq Z$, při čemž ovšem nemusí $Y_i \supseteqq Y_j$ $(i, j = 1, 2)$.

O grafickém násobení a dělení funkcí.

V. Pleskot, Praha.

Při sestrojování grafu součinu (resp. podílu) dvou funkcí užívá se v grafickém počtu obvykle konstrukce, která je systematickou aplikací konstrukce součinu (resp. podílu) dvou čísel, prováděné na ramenech téhož úhlu. Viz Láska-Hruška, Počet grafický a graficko-mechanický, str. 36; Pleskot, Grafické počítání, Rozhledy matematicko-přírodovědecké, roč. 15, str. 2.

Abychom ji mohli porovnat s jinou konstrukcí, kterou chceme vyložit, zopakujme si ji stručně.

Buďtež grafy funkcí

$$y_1 = f(x) \text{ a } y_2 = g(x),$$

jichž součin chceme sestrojit, zakresleny s modulem α na ose úseček (ξ), společném pro oba grafy, ale třeba různém modulu na ose pořadnic (η), na př. β_1 pro $f(x)$ a β_2 pro $g(x)$. V obr. 1 grafy f a g.