Vojtěch Jäger

Řešení rovnice V. stupně:

$$x^5 + 5px^3 + 5p^2x + q = 0$$

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 8 (1879), No. 1, 25--27

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/121153`

Řešení rovnice V. stupně:

$x^5 + 5p x^3 + 5p^2 x + q = 0.$

Napsal

Vojtěch Jäger, v Německém Brodě.

1. Má-li identická rovnice:

$$[\alpha_1 + \alpha_2]^5 - 5\alpha_1\alpha_2[\alpha_1 + \alpha_2]^3 + 5\alpha_1^2\alpha_2^2[\alpha_1 + \alpha_2] - (\alpha_1^5 + \alpha_2^5) = 0$$

pro $x = \alpha_1 + \alpha_2$, s rovnicí danou býti totožnou, platí podmínky

$$p = -\alpha_1\alpha_2 \quad \text{čili} \quad \alpha_1^5\alpha_2^5 = -p^5; \qquad (1)$$

$$q = -(\alpha_1^5 + \alpha_2^5) \quad \text{čili} \quad \alpha_1^5 + \alpha_2^5 = -q \qquad (2)$$

z nichž vyplývá, jak patrno,

$$\alpha_1 = \sqrt[5]{1}\sqrt[5]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + p^5}}$$

$$\alpha_2 = \sqrt[5]{1}\sqrt[5]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + p^5}}.$$

Označíme-li patero hodnot páté odmocniny z jednotky, totiž $+1$

$$\cos\frac{2\pi}{5} \pm i\sin\frac{2\pi}{5} = +\frac{\sqrt{5}-1}{4} \pm i\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

$$\cos\frac{4\pi}{5} \pm i\sin\frac{4\pi}{5} = -\frac{\sqrt{5}-1}{4} \pm i\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

dle téhož pořádku krátce

$$+1,\ J_1,\ J_2,\ J_3,\ J_4,$$

následuje z podmínky (1), dle níž musí součin

$$\alpha_1\alpha_2 = (\sqrt[5]{1})\alpha_1 \times (\sqrt[5]{1})\alpha_2$$

realní veličinou ($-p$) býti, že jen vždy takové dvě hodnoty páté odmocniny z jednotky vzíti jest, jejichž součin jest kladnou jednotkou, tedy

$$+1 \quad \text{s} \quad +1$$

$$\left(\cos\frac{2\pi}{5} \pm i\sin\frac{2\pi}{5}\right) \quad \text{s} \quad \left(\cos\frac{2\pi}{5} \mp i\sin\frac{2\pi}{5}\right),$$

$$\left(\cos\frac{4\pi}{5} \pm i\sin\frac{4\pi}{5}\right) \quad \text{s} \quad \left(\cos\frac{4\pi}{5} \mp i\sin\frac{4\pi}{5}\right),$$

neboť všeobecně platí, jak známo,

$$\left(\cos \frac{2n\pi}{k} \pm i \sin \frac{2n\pi}{k} \right) \left(\cos \frac{2n\pi}{k} \mp i \sin \frac{2n\pi}{k} \right)$$
$$= \cos^2 \frac{2n\pi}{k} + \sin^2 \frac{2n\pi}{k} = +1.$$

Kořeny rovnice předložené jsou pak

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} x_1 = [\alpha_1 + \alpha_2] = \sqrt[5]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + p^5}} \\ \qquad + \sqrt[5]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + p^5}} \\ x_2 = J_1 \alpha_1 + J_2 \alpha_2 ; \quad x_3 = J_2 \alpha_1 + J_1 \alpha_2 , \\ x_4 = J_3 \alpha_1 + J_4 \alpha_2 ; \quad x_5 = J_4 \alpha_1 + J_3 \alpha_2 , \end{cases}$$

při čemž platí podmínka $q \gtrless 0$, $p > 0$.

2. Je-li veličina p zápornou, stane se v rovnici dané druhý člen záporným, takže zní pak

$$x^5 - 5px^3 + 5p^2x + q = 0.$$

Kořeny rovnice této vyplývají z předešlého, dosadí-li se místo $+p$ veličina $-p$, takže jsou pak:

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} x_1 = \sqrt[5]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - p^5}} \\ \qquad + \sqrt[5]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - p^5}} \\ x_2 = J_1 \beta_1 + J_2 \beta_2 ; \quad x_3 = J_2 \beta_1 + J_1 \beta_2 , \\ x_4 = J_3 \beta_1 + J_4 \beta_2 ; \quad x_5 = J_4 \beta_1 + J_3 \beta_2 , \end{cases}$$

kdež β má obdobný význam jako α prvé.

3. Je-li ve vzorci (II) ve zvláštním případě

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2 < p^5,$$

objeví se kořeny rovnice v podobě imaginarní, totiž

$$x = \sqrt[5]{-\frac{q}{2} + i\sqrt{p^5 - \left(\frac{q}{2}\right)^2}} + \sqrt[5]{-\frac{q}{2} - i\sqrt{p^5 - \left(\frac{q}{2}\right)^2}}.$$

Dosadíme-li však do vzorce tohoto

$$\frac{\left(\frac{q}{2}\right)^2}{p^5} = \cos^2 \varphi \quad \text{čili} \quad \frac{q}{2} = [\cos \varphi] \sqrt{p^5}$$

obdrží se z něho napřed

$$x = -\sqrt{p}\left[(\cos\varphi - i\sin\varphi)^{\frac{1}{5}} + (\cos\varphi + i\sin\varphi)^{\frac{1}{5}}\right]$$

a po odstranění imaginarních členů pomocí poučky Moivreovy jest

$$x = -2\sqrt{p}\cos\left(\frac{\varphi + 2n\pi}{5}\right),$$

kdež n libovolné celistvé číslo znamená. Jelikož ale veličina

$$\cos\left(\frac{\varphi + 2n\pi}{5}\right)$$

jen pět od sebe rozdílných hodnot dává, jež se obdrží, klade-li se tam za n postupně 0, 1, 2, 3, 4, jsou kořeny rovnice

$$x^5 - 5px^3 + 5p^2x + q = 0$$

pro $\left(\frac{q}{2}\right)^2 < p^5$ vesměs realné a sice

$$\text{(III)}\left\{\begin{aligned}
x_1 &= -2\sqrt{p}\cos\frac{\varphi}{5}\\
x_2 &= -2\sqrt{p}\cos\left(\frac{\varphi}{5} + \frac{2\pi}{5}\right) = -2\sqrt{p}\cos\left(\frac{\varphi}{5} + 72^0\right)\\
x_3 &= -2\sqrt{p}\cos\left(\frac{\varphi}{5} + \frac{4\pi}{5}\right) = +2\sqrt{p}\cos\left(\frac{\varphi}{5} - 36^0\right)\\
x_4 &= -2\sqrt{p}\cos\left(\frac{\varphi}{5} + \frac{6\pi}{5}\right) = +2\sqrt{p}\cos\left(\frac{\varphi}{5} + 36^0\right)\\
x_5 &= -2\sqrt{p}\cos\left(\frac{\varphi}{5} + \frac{8\pi}{5}\right) = -2\sqrt{p}\cos\left(\frac{\varphi}{6} - 72^0\right).
\end{aligned}\right.$$

Elementarní dedukce zákonů gravitačních.

Napsal

Dr. **Fr. Koláček**, v Brně.

V následujících řádkách podán elementarní vývod těchto dvou vět:

1. Pohybuje-li se hmotný bod m v kuželosečce, a opisuje-li průvodič z ohniska k bodu m vedený, v rovných dobách plochy rovné, tož hmota m podléhá centralné, přítažlivé síle z ohniska vycházející, jíž ubývá se čtvercem vzdálenosti.