Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Jules Drach

Sur l'«Intégration logique» des équations de la Dynamique

*Časopis pro pěstování matematiky a fysiky*, Vol. 64 (1935), No. 5, 141--143

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/121249`

## Herleitung der Doppelungleichung $3+\frac{10}{71}<\pi<3+\frac{1}{7}$ aus der arc sin-Reihe.

*Karl Carda,* Prag.

$$\frac{\pi}{6}=\text{arc sin}\,\frac{1}{2};\ \pi=3+\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{3\,.\,2^3}+\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\cdot\frac{6}{5\,.\,2^5}+$$
$$+\frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\cdot\frac{6}{7\,.\,2^7}+\dots \tag{1}$$

Est ist $a_1=\frac{1}{8}$, $a_2=\frac{1}{8}\cdot\frac{9}{80}$, $a_3=a_2\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{1}{4}>\frac{1}{8}\cdot(\frac{9}{80})^2$.
Es gilt allgemein

$$a_n>\tfrac{1}{8}\cdot(\tfrac{9}{80})^{n-1}. \tag{2}$$

Den Beweis führen wir durch den „Schluß von $n$ auf $(n+1)$". Es sei (2) für ein gewisses $n$ richtig. Dann ist

$$a_{n+1}>\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{9}{80}\right)^{n-1}\cdot\frac{2n+1}{2n+2}\cdot\frac{2n+1}{2n+3}\cdot\frac{1}{4}.$$

Wir zeigen, daß die Ungleichung

$$\frac{2n+1}{2n+2}\cdot\frac{2n+1}{2n+3}>\frac{1}{2}$$

für jedes $n>1$ richtig ist. In der Tat ist

$$2\,(4n^2+4n+1)>4n^2+10n+6$$

oder $n\,(2n-1)>2$. Diese Ungleichung trifft für alle $n>1$ zu. Demnach ist

$$\sum_1^\infty a_n>\sum_1^\infty \tfrac{1}{8}\cdot(\tfrac{9}{80})^{n-1}=\tfrac{10}{71}.$$

Andererseits ist

$$\sum_1^\infty a_n<a_1+a_2+a_3\,.\,\frac{1}{1-\frac{1}{4}}<\frac{1}{7}.$$

## Sur l'«Intégration logique» des équations de la Dynamique.

*Jules Drach,* Paris.

J'ai donné antérieurement (Comptes rendus du Congrès intern. de Strasbourg, 1920, p. 376—380) la détermination des cas de réduction d'une équation, $\frac{d^2y}{dx^2}=F(x,\,y)$, quand il existe une intégrale première rationnelle en $dy/dx$ (ou même de forme plus générale (Comptes rendus Ac. Sciences, Paris, *195*, 1932, p. 1337). C'est l'étude du problème des forces centrales quand on fixe la constante des aires. De même, j'ai traité en détail de la réduction du problème des géodésiques relatif à un élément linéaire $4\lambda(x, y)\, dx\, dy$ quand il existe une intégrale première rationnelle en $dy/dx$ (ou plus générale). On est conduit à intégrer des équations aux dérivées partielles de tous les ordres, à une fonction inconnue des variables $x$, $y$: J'ai réussi, par une méthode nouvelle, particulière, à la remplacer par un système complètement intégrable d'équations linéaires de Laplace, à $n$ variables caractéristiques, qu'on intègre par quadratures — et un système d'équations aux différentielles totales dont on forme les combinaisons intégrables. (Cf. Proceedings of the Int. Math. Congress, Toronto, 1924, p. 493—510, et Comptes rendus Ac. Sciences, Paris, *196*, 1933, p. 312). Le problème de Dynamique s'achève par des quadratures. Lorsqu'on envisage des problèmes de Dynamique à plus de deux variables, l'existence de plusieurs éléments (vitesses ou moments) qui figurent rationnellement dans la force vive conduit pour la détermination des autres, quand il y a réduction, à des systèmes surabondants d'équations. Il arrive ainsi qu'on obtienne explicitement la solution avec des fonctions arbitraires des éléments caractéristiques. C'est ce qui se présente quand on suppose l'existence d'une intégrale quadratique. Dans le cas le plus général d'une force vive quadratique, j'ai pu montrer que la solution du problème se ramène analytiquement aux cas indiqués par Paul Staeckel, sous forme synthétique a priori (Comptes rendus Ac. Sciences, Paris, *198*, 1934, p. 294). Pour les problèmes de Dynamique à deux variables où l'on possède une intégrale première (intégrale des aires pour les forces centrales, des forces vives pour systèmes conservatifs) on est de même amené à étudier les cas de réduction d'une équation différentielle du second ordre, rationnelle en $dy/dx$ et contenant aussi rationnellement un paramètre $h$. Des circonstances très diverses se prèsentent: Par exemple, pour le problème des forces centrales avec constante des aires quelconque, on a à étudier l'équation: $\dfrac{d^2y}{dx^2} = h\,F(x, y)$. Le cas d'une intégrale quadratique en $y'$, conduit à une solution avec une fonction arbitraire pour F, fonction d'un argument caractéristique.

Une intégrale entière en $h$ de degré $n$ est de degré $2n$ en $y'$. Le degré en $y'$ étant donné, celui en $h$ peut être arbitraire — c'est le cas quand F est linéaire en $y$, pour les intégrales quadratiques en $y'$. J'ai pu intégrer les systèmes différentiels qui définissent F, par une méthode régulière, qui fait appel aux fonctions abéliennes hyperelliptiques; etc....

L'étude des systèmes conservatifs, c'est à dire ici de l'équation aux dérivées partielles $pq = \lambda\ (U + h)$ où $p = \frac{dz}{dx}$, $q = \frac{dz}{dy}$. $\lambda$ et $U$ étant des fonctions de $x$, $y$ à trouver pour qu'une réduction fixée d'avance se présente, conduit à des conclusions analogues — j'indique à titre d'exemple, quelques uns des résultats obtenus. Il y a lieu de distinguer suivant que l'élément linéaire $4\lambda\, dx\, dy$ convient au plan, à la sphère, à une surface de révolution quelconque, est un $ds^2$ de Liouville, etc... (Cf. Comptes rendus Ac. Sciences, Paris, *185*, 1927, p. 1568).

Enfin j'ai abordé la détermination des problèmes non conservatifs du plan qui possèdent des intégrales quadratiques ou d'ordre supérieur par rapport aux vitesses; problèmes où les mêmes méthodes s'appliquent encore.

## O současném stavu teorie a některých nových problémech z teorie funkcí Mathieuových.

*Karel Dusl*, Praha.

Diferenciální rovnice Mathieuova

$$\frac{d^2y}{dx^2} + (a + 16q \cos 2x)\, y = 0 \tag{1}$$

má partikulární integrály periodické a neperiodické tvaru $e^{\pm\mu x}\Phi(x)$, kde $\Phi(x)$ je reálná funkce periodická. Mezi funkce periodické patří autofunkce Whittaker-Mathieuovy $\mathrm{se}_n(x)$, $\mathrm{ce}_n(x)$ o periodě $\pi$ resp. $2\pi$.

Vedle těchto funkcí periodických uvažoval E. C. G. Poole roku 1921 řešení $\mathrm{se}_{n+\frac{1}{2}}(x)$, $\mathrm{ce}_{n+\frac{1}{2}}(x)$ o periodě $4\pi$. Podobně lze konstruovati řešení o periodě vícenásobné $6\pi$ atd.

Mezi funkce neperiodické náleží především funkce Lindsay-Inceovy, t. j. Mathieuovy funkce druhého druhu $\mathrm{in}_k(x)$, $\mathrm{jn}_k(x)$. Důležitá jest otázka stability těchto neperiodických řešení. Současné práce Struttovy, P. Humbertovy, Goldsteinovy týkají se především právě oborů stability těchto funkcí a to nejen pro $q = 0$, nýbrž i reálná $q$ vůbec. Obdržíme tak zajímavé křivky, které udávají rozhraní mezi obory stability i nestability.

V letech 1922/23 zavedl L. Ince a P. Humbert t. zv. funkce Mathieuovy vyšších řádů, jakožto periodické partikulární integrály diferenciální rovnice:

$$\frac{d^2z}{dx^2} + [a + \nu^2 - \frac{\nu\,(\nu - 1)}{\sin^2 x} + k^2 \cos^2 x]\, z = 0. \tag{2}$$