Ludwig Berwald
Über Finslersche und verwandte Räume

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 64 (1935), No. 5, 1--16

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121260

Über Finslersche und verwandte Räume.

Ludwig Berwald, Prag.

Seit ich die ehrenvolle Aufforderung erhielt, vor Ihnen über ein Thema aus meinem engeren Arbeitsgebiet, etwa die Theorie der Finslerschen Räume zu sprechen, hat diese nach längeren Bemühungen verschiedener Mathematiker in den letzten Arbeiten von É. Cartan[1]) ihre wohl endgiltige Gestalt erhalten. Ich glaube daher der an mich gerichteten Aufforderung am besten zu entsprechen, indem ich Ihnen die Grundgedanken der Cartanschen Theorie auseinandersetze; besonders, da ich das in einer Weise tun will, die den Zusammenhang mit anderen Untersuchungen, vor Allem mit einer 1930 von Winternitz[2]) aufgestellten Theorie hervortreten läßt. Als Einleitung möchte ich einen ganz kurzen Abriß der Entwicklung der Lehre von den Finslerschen und anderen „verallgemeinerten" Räumen vorausschicken, der nur als Wegweiser durch die schon ziemlich ausgedehnte Literatur des Gebietes gedacht ist. Ich darf mich dabei umsomehr auf bloße Andeutungen beschränken, als über die bis zum Jahre 1930 erschienenen Arbeiten ein ausführlicher Bericht von Koschmieder[3]) vorliegt.

* * *

1. Schon Riemann hat in seiner Habilitationsschrift[4]) die Möglichkeit erwähnt, daß in einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit die Entfernung zweier unendlich benachbarten Punkte nicht durch die Quadratwurzel aus einer quadratischen Form der Differentiale, sondern z. B. durch die vierte Wurzel aus einer Differentialform vierten Grades gegeben ist. Aber erst zu Beginn dieses Jahrhunderts hat der Aufschwung der Variationsrechnung die Mathematiker veranlaßt, sich eingehender mit Mannigfaltigkeiten zu beschäftigen, in denen die Entfernung zweier unendlich benachbarten Punkte durch eine beliebige positive Funktion der Koordinaten und ihrer Differentiale dargestellt wird, die in den Differentialen positiv homogen von erster Ordnung ist.

Zunächst wurde, namentlich von Bliss, Landsberg und Underhill[5]) der zweidimensionale Fall untersucht. Als wichtigste Ergebnisse dieser Arbeiten kann man etwa bezeichnen: die Aufstellung eines Winkel-[6]) und Flächeninhaltsbegriffes,[7]) des Begriffes der „extremalen" Krümmung einer Kurve,[8]) des Krümmungsmaßes einer solchen Mannigfaltigkeit,[9]) des „Hauptskalars" (einer in Riemannschen Räumen verschwindenden Invariante[10]), endlich die Beantwortung der Frage, in welchen zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten mit nicht quadratischer Maßbestimmung eine Verallgemeinerung des Gauß-Bonnetschen Integralsatzes gilt.[11])

Mit dem n-dimensionalen Fall hat sich als erster Finsler[12]) beschäftigt, nach dem die in Rede stehenden Mannigfaltigkeiten heute ziemlich allgemein als Finslersche Räume bezeichnet werden. Seine Arbeit behandelt außer den geometrischen Grundbegriffen vor allem die Theorie der Kurven[13]) und p-dimensionalen Flächen ($2 \leqq p \leqq n - 1$)[14]) in einem solchen Raum.

Inzwischen hatte der von Levi-Civita eingeführte Begriff der Parallelübertragung eines Vektors die Begründung der Riemannschen Geometrie in ungeahnter Weise vereinfacht. Alsbald wurde versucht, diesen Begriff auch für Finslersche Räume zu definieren und ihn beim Aufbau der Theorie dieser Räume zu verwenden.[15]) Auch die in den letzten zwei Jahrzehnten aufgestellte affine, projektive und konforme Theorie „nichtholonomer" Räume wurde auf entsprechende „verallgemeinerte" Räume ausgedehnt, in denen die Übertragung vom Linienelement abhängt.[16])

Von besonderen Finslerschen Räumen, die in letzter Zeit untersucht wurden, seien genannt: die Minkowskischen Räume[17]) und die Finslerschen Räume konstanter Krümmung.[18])

Weniger bearbeitet wurde bisher die Theorie der n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten, deren Geometrie auf dem Begriff des Inhalts eines $(n - 1)$ - dimensionalen Hyperflächenstückes beruht. Auch sie ist neuerdings von É. Cartan zu einem gewissen Abschluß gebracht worden.[19])

Zur Theorie der Mannigfaltigkeiten, deren Bogenelement auch Differentiale höherer als erster Ordnung enthält, liegen bisher nur Ansätze in verschiedenen Richtungen vor.[20])

2. Bei der Erörterung meines eigentlichen Themas, dem ich mich jetzt zuwende, will ich mich der „infinitesimalen" Redeweise bedienen, weil sie kurz und anschaulich ist, ohne daß der Übergang zu einer strengen Formulierung Schwierigkeiten böte. Der Kürze halber gehe ich auch auf die Stetigkeits- und Differenzierbarkeitsvoraussetzungen nicht ein: sie sind leicht zu ergänzen.

Zunächst erinnere ich daran, wie man die n-dimensionale Riemannsche Geometrie aus den Grundbegriffen: Maßbestimmung und Parallelübertragung aufbauen kann.

Das Raumelement ist hier der Punkt. Von der Maßbestimmung wird verlangt, daß sie in der unmittelbaren Umgebung jedes Punktes (x) euklidisch sein soll. Anders ausgedrückt:

(R. I.) Das Quadrat der Entfernung eines beliebigen Punktes (x) und eines willkürlichen unendlich benachbarten Punktes $(x + dx)$ ist eine positiv definite quadratische Differentialform $g_{ik}(x)\, dx^i\, dx^k$.

Die Figur, die der Maßbestimmung zugrundeliegt, ist also die eines Punktes (x) und eines unendlich benachbarten Punktes $(x + dx)$. Sie heißt ein infinitesimaler Vektor im Punkte (x). Indem man sich die Stückchen von euklidischen Räumen, zu denen die Umgebungen der einzelnen Punkte der betrachteten Mannigfaltigkeit durch (R. I.) geworden sind, vervollständigt denkt, indem man also jedem Punkte (x) einen euklidischen Raum zuordnet, kann man auch zu endlichen Vektoren im Punkte (x) übergehen, derart, daß die quadrierte Länge eines Vektors (X) im Punkte (x) durch

$$\lambda^2 = g_{ik}(x)\, X^i X^k \tag{1}$$

gegeben wird.

Die euklidischen Räume, die den einzelnen Punkten (x) zugeordnet wurden, werden nun in Zusammenhang gebracht, indem man definiert, was unter der Parallelübertragung eines Vektors von einem Punkte nach einem unendlich benachbarten zu verstehen ist. Dies geschieht durch:

(R. II. 1) Es sei (X) ein willkürlicher Vektor im beliebigen Punkte (x), ferner $(x + dx)$ ein beliebiger zu (x) unendlich benachbarter Punkt. Dann heißt der Vektor $(X + dX)$ im Punkte $(x + dx)$ parallel zum Vektor (X) im Punkte (x), wenn

$$dX^i = -\, \Gamma_{kh}{}^i(x)\, X^k\, dx^h. \tag{2}$$

Man fordert also, daß die Zuwächse dX^i, die man den Komponenten X^i eines Vektors (X) im Punkte (x) erteilen muß, um den dazu parallelen Vektor $(X + dX)$ im Punkte $(x + dx)$ zu erhalten, in den Zuwächsen dx^i der Punktkoordinaten sowie in den Komponenten X^i des Vektors (X) linear sind.

Es wird weiter verlangt, daß der durch die Parallelübertragung erzeugte Zusammenhang euklidisch sein soll, d. h.:

(R. II. 2) Die Länge eines beliebigen Vektors wird durch Parallelübertragung nicht geändert.

Diese Forderung ergibt leicht die Gleichungen:

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^h} = \Gamma_{ikh} + \Gamma_{kih} \qquad (\Gamma_{ikh} = g_{kj}\Gamma_{ih}{}^j). \tag{3}$$

Eine Mannigfaltigkeit von Punkten, die den Forderungen (R. I., II. 1, 2) genügt, heißt euklidisch zusammenhängend.

Zum Riemannschen Raum gelangt man durch eine Symmetrieforderung, die bewirkt, daß die Parallelübertragung eindeutig durch die Metrik bestimmt ist. Sie lautet:

(R. II. 3) Es gibt infinitesimale Parallelogramme.

D. h. sind (dx) und (δx) zwei beliebige infinitesimale Vektoren in einem willkürlichen Punkte (x), und ist der Maximalbetrag der zweireihigen Determinanten $dx^i\,\delta x^k - \delta x^i\,dx^k$ ungleich Null, so soll die Figur, die man erhält, wenn man den Vektor (dx) von (x) nach ($x + \delta x$) und den Vektor (δx) von (x) nach ($x + dx$) parallel überträgt, sich (in der Größenordnung dieses Maximalbetrags) schließen.

Diese Forderung ist äquivalent mit der Symmetriebedingung

$$\Gamma_{kh}{}^{i} = \Gamma_{hk}{}^{i}. \tag{4}$$

Hieraus und aus (3) folgt

$$\Gamma_{ikh} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^h} + \frac{\partial g_{kh}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{hi}}{\partial x^k}\right); \quad \Gamma_{ih}{}^{j} = g^{kj}\Gamma_{ikh}, \tag{5}$$

so daß die Parallelübertragung in eindeutiger Weise durch die Maßbestimmung definiert ist.

Durch Herumführung eines Vektors um ein infinitesimales Viereck erhält man nunmehr in bekannter Weise den Krümmungstensor des Riemannschen Raumes.

3. Es liegt nahe, die Geometrie des Finslerschen Raumes möglichst nach dem soeben geschilderten Vorbild der Riemannschen Geometrie aufzubauen, indem man als Raumelement nach wie vor den Punkt beibehält. Man gelangt so im Wesentlichen zu der Theorie von Winternitz.[2])

Die Maßbestimmung ist in diesem Falle durch folgende Forderung definiert:

(W. I.) Die Entfernung eines beliebigen Punktes (x) und eines willkürlichen unendlich benachbarten Punktes ($x + dx$) ist eine positive und in den dx^i von erster Ordnung positiv homogene Funktion $L(x, dx)$, derart, daß die quadratische Form

$$\frac{\partial^2(L^2)}{\partial dx^i\,\partial dx^k}\, Z^i Z^k \tag{6}$$

der Hilfsveränderlichen $Z^1, Z^2, \ldots, Z^n$ positiv definit ist.

$L(x, dx)$ heiße die Grundfunktion des Finslerschen Raumes. Lassen sich insbesondere in einem Finslerschen Raum solche Koordinaten x^i einführen, daß die Grundfunktion nur von den Differentialen dx^i allein abhängt, also die Gestalt $L(dx)$ hat, so heißt der Raum ein Minkowskischer.[21])

Die Forderung (W. I.) bedeutet, daß die Maßbestimmung des Finslerschen Raumes in der unmittelbaren Umgebung jedes Punktes eine Minkowskische sein soll. Indem man sich diese Stückchen von Minkowskischen Räumen vervollständigt denkt, indem man also jedem Punkt (x) des Finslerschen Raumes einen

Minkowskischen Raum mit der entsprechenden Maßbestimmung $L(x, dx)$ — (x) fest — zuordnet, kann man auch zu endlichen Vektoren im Punkte (x) übergehen. Die Länge eines Vektors (X) im Punkte (x) ist dann

$$\lambda = L(x, X). \tag{7}$$

Trägt man in dem Minkowskischen Raum, der dem Punkte (x) des Finslerschen Raumes zugeordnet ist, alle möglichen Vektoren vom Anfangspunkt (x) und der Länge Eins ab, so bilden ihre Endpunkte eine Hyperfläche, die Indikatrix des Punktes (x). Wegen (W. I.) ist die Indikatrix konvex.

Die Minkowskischen Räume, die den einzelnen Punkten (x) zugeordnet sind, werden nun wieder durch eine Parallelübertragung in Zusammenhang gebracht. Diese wird definiert durch:

(W. II. 1) Es sei (X) ein willkürlicher Vektor im beliebigen Punkte (x), und $(x+dx)$ ein beliebiger zu (x) unendlich benachbarter Punkt. Dann heißt der Vektor $(X + dX)$ im Punkte $(x + dx)$ parallel zum Vektor (X) im Punkte (x), wenn

$$dX^i = - G_h^i(x, X)\, dx^h. \tag{8}$$

Hier wird also nur gefordert, daß die Zuwächse dX^i, die man den Komponenten X^i eines Vektors (X) im Punkte (x) erteilen muß, um den dazu parallelen Vektor $(X + dX)$ im Punkte $(x + dx)$ zu erhalten, in den Differentialen dx^i der Punktkoordinaten linear sind, während über die Art der Abhängigkeit von den Vektorkomponenten X^i nichts vorausgesetzt wird.

Von dieser Parallelübertragung wird nun wieder verlangt:

(W. II. 2) Die Länge eines beliebigen Vektors wird durch Parallelübertragung nicht geändert.

Diese Forderung ergibt die Beziehungen:

$$\frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{\partial L}{\partial X^p} G_i^p = 0 \qquad [L = L(x, X)]. \tag{9}$$

Eine Mannigfaltigkeit von Punkten, die den Forderungen (W. I., II. 1, 2) genügt, heiße Minkowskisch zusammenhängend.

Zum Finslerschen Raum gelangt man durch eine Symmetrieforderung, die bewirkt, daß die Parallelübertragung eindeutig durch die Metrik bestimmt ist. Diese Symmetrieforderung, die schwächer ist als (R. II. 3), lautet:

(W. II. 3) Es gibt infinitesimale spitze Rhomben.

Das bedeutet Folgendes: Es sei (dx) ein beliebiger infinitesimaler Vektor im willkürlichen Punkte (x), ferner (Δdx) ein Vektor im gleichen Punkte, der klein ist gegenüber dem Vektor (dx) und so beschaffen, daß der Maximalbetrag der zweireihigen Determinanten $dx^i \Delta dx^k - dx^k \Delta dx^i$ ungleich Null ist. Endlich sei $(\delta x) = (dx + \Delta dx)$. Dann soll die Figur, die man erhält, wenn man den Vektor (dx) von (x) nach $(x + \delta x)$ und den Vektor (δx) von (x) nach $(x + dx)$ parallel überträgt, sich (in der Größenordnung dieses Maximalbetrags) schliessen. Es soll m. a. W. in der Entwicklung der Differenz

$$\delta dx^i - d\delta x^i = -\{G_h{}^i(x, dx)(dx^h + \Delta dx^h) - G_h{}^i(x, dx + \Delta dx)\, dx^h\}$$

nach Potenzen der Δdx^i das lineare Glied Null sein. Diese Forderung gibt für die Funktionen $G_h{}^i$ die Bedingungen

$$G_h{}^i(x, dx) - \frac{\partial G_k{}^i(x, dx)}{\partial dx^h}\, dx^k = 0. \tag{10}$$

Aus (10) folgt, wenn

$$G_h{}^i(x, dx)\, dx^h = 2G^i(x, dx) \tag{11}$$

gesetzt wird:

$$G_h{}^i(x, dx) = \frac{\partial G^i(x, dx)}{\partial dx^h}. \tag{12}$$

Man stellt jetzt leicht fest, daß als Folge von (W. II. 2) und (W. II. 3) die Funktionen $G^i(x, dx)$ den Gleichungen

$$\frac{\partial(L^2)}{\partial x^h} - \frac{\partial(L^2)}{\partial x^k\, \partial dx^h}\, dx^k + 2\frac{\partial(L^2)}{\partial dx^k\, \partial dx^h}\, G^k = 0 \quad [L = L(x, dx)] \tag{13}$$

genügen. Da nach (W. I.) die Determinante

$$\left| \frac{\partial(L^2)}{\partial dx^h\, \partial dx^k} \right|$$

von Null verschieden ist, so lassen sich diese Gleichungen nach den G^i auflösen, womit auch die $G_h{}^i$ aus der Metrik des Finslerschen Raumes eindeutig bestimmt sind. Diese Auflösung zeigt, daß die $G^i(x, dx)$ in den dx^k von zweiter, die $G_h{}^i(x, dx)$ also von erster Ordnung positiv homogen sind.

Der geometrische Sachverhalt, der in den Gleichungen (13) zum Ausdruck kommt, ist dieser: die Extremalen des Variationsproblems $s \equiv \int L\left(x, \frac{dx}{dt}\right) dt \to$ Extr. sind mit den geraden (autoparallelen) Linien bei der Parallelübertragung (W. II. 1—3) identisch, und die „Bogenlänge" s ist auf ihnen affiner Parameter.

Im weiteren Verlaufe der Theorie spielt außer dem Krümmungstensor, zu dem man in der gewöhnlichen Weise gelangt, auch der Asymmetrietensor

$$\frac{\partial^3 G^i(x, dx)}{\partial dx^h\, \partial dx^k\, \partial dx^m}$$

eine Rolle, der für das nicht verschwindende Glied niedrigster Ordnung in der Entwicklung von

$$\mathrm{G}_h{}^i(x, \mathrm{d}x - \tfrac{1}{2}\Delta\mathrm{d}x)\,(\mathrm{d}x^h + \tfrac{1}{2}\Delta\mathrm{d}x^h) - \mathrm{G}_h{}^i(x, \mathrm{d}x + \tfrac{1}{2}\Delta\mathrm{d}x)\,(\mathrm{d}x^h - \tfrac{1}{2}\Delta\mathrm{d}x^h)$$

nach Potenzen der $\Delta\mathrm{d}x^k$ maßgebend ist.

4. Ich komme jetzt zur Cartanschen Theorie der Finslerschen Räume.

Das Raumelement in dieser Theorie ist nicht der Punkt, sondern das (orientierte) Linienelement, das ist die Figur, die aus einem Punkte (x) und einer von diesem Punkte ausgehenden Richtung $(\dot{x})$ besteht. Der Punkt heißt das Zentrum des Linienelements. Die Richtung $(\dot{x})$ des Linienelements wird durch n nicht sämtlich verschwindende Parameter $\dot{x}^1, \dot{x}^2, \ldots, \dot{x}^n$ gegeben, die in dem Sinn homogen sind, daß sie alle mit demselben willkürlichen positiven Faktor multipliziert werden dürfen. Eine Mannigfaltigkeit, die als Punktmannigfaltigkeit n-dimensional ist, hat als Mannigfaltigkeit von Linienelementen betrachtet, $2n - 1$ Dimensionen.

Der Aufbau der Cartanschen Theorie kann wieder in zwei Schritten vollzogen werden. Man definiert zunächst eine euklidisch zusammenhängende Mannigfaltigkeit von Linienelementen durch Forderungen, die man für die Maßbestimmung und die Parallelübertragung von Vektoren stellt und schränkt dann durch Zusatzforderungen die dabei auftretenden Funktionen soweit ein, daß sie eindeutig aus der Grundfunktion $\mathrm{L}(x, \mathrm{d}x)$ des Finslerschen Raumes folgen.

Von der Maßbestimmung wird verlangt, daß sie in der unmittelbaren Umgebung jedes Linienelements $(x, \dot{x})$ euklidisch sein soll. Das heißt:

(C. I. 1) Das Quadrat der Entfernung eines beliebigen Punktes (x) und eines willkürlichen unendlich benachbarten Punktes $(x + \mathrm{d}x)$ in Bezug auf das Linienelement $(x, \dot{x})$, dessen Richtung beliebig ist, ist eine positiv definite quadratische Differentialform $\mathrm{g}_{ik}(x, \dot{x})\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^k$, deren Koeffizienten nur vom Linienelement $(x, \dot{x})$ abhängen.

Die $\mathrm{g}_{ik}(x, \dot{x})$ sind also in den $\dot{x}^i$ positiv homogen von nullter Ordnung.

Die Figur, die der Maßbestimmung zugrunde liegt, ist somit die zweier unendlich benachbarten Punkte (x), $(x + \mathrm{d}x)$ und eines Linienelementes $(x, \dot{x})$, das den ersten Punkt zum Zentrum hat. Wir nennen diese Figur einen infinitesimalen Vektor im Linienelement $(x, \dot{x})$. Indem man sich die Stückchen von euklidischen Räumen, zu denen die Umgebungen der einzelnen Linienelemente der betrachteten Mannigfaltigkeit durch (C. I. 1) geworden sind, vervollständigt denkt, indem man also jedem

Linienelement $(x, \dot{x})$ einen euklidischen Raum zuordnet, kann man auch zu endlichen Vektoren im Linienelement $(x, \dot{x})$ übergehen, derart, daß das Quadrat der Länge eines Vektors (X) im Linienelement $(x, \dot{x})$ durch

$$\mu^2 = \mathrm{g}_{ik}(x, \dot{x})\, X^i X^k \tag{14}$$

gegeben wird.

Die euklidischen Räume, die den einzelnen Linienelementen $(x, \dot{x})$ zugeordnet wurden, werden wieder in Zusammenhang gebracht, indem man definiert, was unter der Parallelübertragung eines Vektors von einem Linienelement nach einem unendlich benachbarten zu verstehen ist:

(C. II. 1) Es sei (X) ein willkürlicher Vektor im beliebigen Linienelement $(x, \dot{x})$ und $(x + \mathrm{d}x, \dot{x} + \mathrm{d}\dot{x})$ ein beliebiges zu $(x, \dot{x})$ unendlich benachbartes Linienelement. Dann heißt der Vektor $(X + \mathrm{d}X)$ im Linienelement $(x + \mathrm{d}x, \dot{x} + \mathrm{d}\dot{x})$ parallel zum Vektor (X) im Linienelement $(x, \dot{x})$, wenn

$$\mathrm{d}X^i = -\Gamma_{kh}{}^i\,(x, \dot{x})\, X^k\, \mathrm{d}x^h - \mathrm{C}_{kh}{}^i(x, \dot{x})\, X^k\, \mathrm{d}\dot{x}^h. \tag{15}$$

Man fordert also, daß die Zuwächse $\mathrm{d}X^i$, die man den Komponenten X^i eines Vektors (X) im Linienelement $(x, \dot{x})$ erteilen muß, um den dazu parallelen Vektor $(X + \mathrm{d}X)$ im Linienelement $(x + \mathrm{d}x, \dot{x} + \mathrm{d}\dot{x})$ zu erhalten, einerseits in den $2n$ Zuwächsen $\mathrm{d}x^i$, $\mathrm{d}\dot{x}^i$, anderseits in den n Vektorkomponenten X^i linear sind.

Da der Vektor $(X + \mathrm{d}X)$ nur von den beiden Linienelementen $(x, \dot{x})$ und $(x + \mathrm{d}x, \dot{x} + \mathrm{d}\dot{x})$ abhängen soll, so muß er ungeändert bleiben, wenn die $\dot{x}^i$ durch $\varrho(x, \dot{x})\, \dot{x}^i$ ersetzt werden, wo $\varrho(x, \dot{x}) > 0$ und in den $\dot{x}^i$ positiv homogen von nullter Ordnung ist. Indem man zuerst $\varrho =$ konst., und hierauf ϱ allgemein wählt, ergibt sich als Folge von (C. II. 1), daß

1.) die $\Gamma_{kh}{}^i(x, \dot{x})$ von nullter, die $\mathrm{C}_{kh}{}^i(x, \dot{x})$ von (-1)-ter Ordnung positiv homogen in den $\dot{x}^i$ sind;

2.) die Relationen

$$\mathrm{C}_{kh}{}^i(x, \dot{x})\, \dot{x}^h = 0 \tag{16}$$

bestehen.

Nun wird wieder verlangt, daß der durch die Parallelübertragung erzeugte Zusammenhang euklidisch sein soll:

(C. II. 2) Die Länge eines beliebigen Vektors (in einem willkürlichen Linienelement) wird durch Parallelübertragung nicht geändert.

Diese Forderung ergibt hier die Bedingungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^h} &= \Gamma_{ikh} + \Gamma_{kih} \qquad (\Gamma_{ikh} = g_{kj}\,\Gamma_{ih}{}^j) \\ \frac{\partial g_{ik}}{\partial \dot{x}^h} &= C_{ikh} + C_{kih} \qquad (C_{ikh} = g_{kj}\,C_{ih}{}^j). \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Eine Mannigfaltigkeit von Linienelementen, die den Forderungen (C. I. 1, II. 1, 2) genügt, heißt e u k l i d i s c h z u s a m m e n h ä n g e n d.

5. Wir stellen jetzt zusätzliche Forderungen auf, die bewirken, daß die Funktionen $g_{ik}(x, \dot{x})$, $C_{kh}{}^i(x, \dot{x})$, $\Gamma_{kh}{}^i(x, \dot{x})$ durch die Grundfunktion $L(x, \dot{x})$ des Finslerschen Raumes eindeutig bestimmt sind. Sie setzen außer (C. I. 1, II. 1, 2) auch (W. I.) voraus.

Zunächst soll der M a ß t e n s o r $g_{ik}(x, \dot{x})$ aus der M e t r i k (W. I.) des als Punktmannigfaltigkeit betrachteten Finslerschen Raumes gewonnen werden. Es sei $(x, \dot{x})$ ein beliebiges Linienelement im Finslerschen Raum. Ferner sei in dem Minkowskischen Raum, der dem Zentrum (x) des Linienelementes zugeordnet ist, $(x + l)$ jener Punkt der Indikatrix des Punktes (x), der in der Richtung des Linienelementes $(x, \dot{x})$ liegt. Dann gibt es in diesem Raum eine einzige Hyperfläche zweiter Ordnung, die den Punkt (x) zum Mittelpunkt hat und die Indikatrix dieses Punktes im Punkte $(x + l)$ in zweiter Ordnung berührt. Sie heißt die o s k u l i e r e n d e I n d i k a t r i x d e s L i n i e n e l e m e n t s $(x, \dot{x})$.[22] Wegen (W. I.) ist sie konvex.

Es wird nun gefordert:

(C. I. 2) D i e L ä n g e e i n e s b e l i e b i g e n V e k t o r s (X) i m w i l l k ü r l i c h e n L i n i e n e l e m e n t $(x, \dot{x})$ i n B e z u g a u f d i e s e s L i n i e n e l e m e n t i s t d u r c h d i e o s k u l i e r e n d e I n d i k a t r i x d e s L i n i e n e l e m e n t s $(x, \dot{x})$ a l s I n d i k a t r i x d e f i n i e r t.

Diese Festsetzung bedeutet folgende Wahl des Maßtensors[23]):

$$g_{ik}(x, \dot{x}) = \tfrac{1}{2}\,\frac{\partial^2(L^2)}{\partial \dot{x}^i\,\partial \dot{x}^k} \qquad [L = L(x, \dot{x})]. \tag{18}$$

Aus ihr folgt insbesondere:

1.) Der Vektor (l) im Linienelement $(x, \dot{x})$, der die Richtung des Linienelementes und in Bezug auf das Linienelement die Länge Eins hat, besitzt die Komponenten

$$l^i = \frac{\dot{x}^i}{L(x, \dot{x})}. \tag{19}$$

Er heiße der E i n h e i t s v e k t o r d e s L i n i e n e l e m e n t s $(x, \dot{x})$.

2.) Jeder Vektor im Linienelement $(x, \dot{x})$, der im Sinne des Variationsproblems $\int L\left(x, \frac{dx}{dt}\right) dt \to \text{Extr.}$ zu diesem Linienelement transversal ist, steht bei der Maßbestimmung (C. I. 1, 2) auf dem Linienelement senkrecht und umgekehrt.

6. Die Komponenten der Parallelübertragung $C_{kh}{}^{i}$ und $\Gamma_{kh}{}^{i}$ werden durch je eine Symmetrieforderung aus der Grundfunktion $L(x, \dot{x})$ abgeleitet.

Vermöge der Parallelübertragung (C. II. 1) ist für jeden Vektor (X), dessen Komponenten Funktionen des Linienelements sind, ein kovariantes Differential definiert:

$$DX^{i} = dX^{i} + \Gamma_{kh}{}^{i}(x, \dot{x})\, X^{k}\, dx^{h} + C_{kh}{}^{i}(x, \dot{x})\, X^{k}\, d\dot{x}^{h}. \qquad (20)$$

Wir spezialisieren nun zunächst die $C_{kh}{}^{i}$ durch folgende Forderung:

(C. II. 3) Es seien (X) und (Y) zwei beliebige Vektoren im willkürlichen Linienelement $(x, \dot{x})$, deren kontravariante Komponenten beim Übergang zum beliebigen unendlich benachbarten Linienelement $(x, \dot{x} + d\dot{x})$ mit demselben Zentrum ungeändert bleiben. Dann soll für diesen Übergang das Symmetriegesetz

$$g_{ik} X^{i}\, DY^{k} = g_{ik} Y^{i}\, DX^{k}$$

gelten.

Die geforderte Gleichung ergibt wegen der Nebenbedingungen $dx^{j} = dX^{j} = dY^{j} = 0$ unmittelbar die Symmetrie

$$C_{ikh} = C_{kih}, \qquad (21)$$

so daß man aus (17^{2})

$$C_{ikh} = \tfrac{1}{2}\frac{\partial g_{ik}}{\partial \dot{x}^{h}} = \tfrac{1}{4}\frac{\partial^{3}(L^{2})}{\partial \dot{x}^{i}\, \partial \dot{x}^{k}\, \partial \dot{x}^{h}} \qquad (22)$$

erhält. Die C_{ikh} sind daher in allen, die $C_{kh}{}^{i}$ in den unteren Zeigern symmetrisch.

Aus den Gleichungen (15) der Parallelübertragung und der Homogeneitätseigenschaft der $g_{ik}(x, \dot{x})$ folgt jetzt, daß ein willkürlicher Vektor (X) im beliebigen Linienelement $(x, \dot{x})$, der die Richtung des Linienelementes hat, bei Parallelübertragung nach irgend einem unendlich benachbarten Linienelement $(x, \dot{x} + d\dot{x})$ mit dem gleichen Zentrum ungeändert bleibt. Seine Parallelübertragung nach einem beliebigen unendlich benachbarten Linienelement $(x + dx,\ \dot{x} + d\dot{x})$ ist, wenn zur Abkürzung

$$\dot{x}^{k}\, \Gamma_{kh}{}^{i}(x, \dot{x}) = G_{h}{}^{i}(x, \dot{x})\ {}^{24)} \qquad (23)$$

gesetzt wird, durch (8) dargestellt. Sie hängt nur von den dx^{j}, aber nicht von den $d\dot{x}^{j}$ ab. Diese Vektorübertragung möge als Parallelübertragung des Linienelements $(x, \dot{x})$ von seinem Zentrum (x) nach dem beliebigen unendlich benachbarten Punkt $(x + dx)$ bezeichnet werden.

Insbesondere gilt für die Parallelübertragung des Einheitsvektors (l) des Linienelementes

$$\omega^i(\mathrm{d}) \equiv \mathrm{d}l^i + \frac{1}{\mathrm{L}(x, \dot{x})} \mathrm{G}_h{}^i(x, \dot{x})\, \mathrm{d}x^h = 0. \tag{24}$$

Wenn man an Stelle der $\mathrm{d}\dot{x}^j$ die $\omega^j(\mathrm{d})$ in die Gleichungen (15) der Parallelübertragung (C. II. 1) einführt, so nehmen diese die Gestalt

$$\mathrm{d}X^i = -\Gamma^*{}_{kh}{}^i(x, \dot{x})\, X^k\, \mathrm{d}x^h - \mathrm{A}_{kh}{}^i(x, \dot{x})\, X^k\, \omega^h(\mathrm{d}) \tag{25}$$

an, mit

$$\left.\begin{aligned} \Gamma^*{}_{kh}{}^i &= \Gamma_{kh}{}^i - \mathrm{C}_{kp}{}^i\, \mathrm{G}_h{}^p, \\ \mathrm{A}_{kh}{}^i &= \mathrm{L}\mathrm{C}_{kh}{}^i. \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Die $\Gamma^*{}_{kh}{}^i$, $\mathrm{A}_{kh}{}^i$ sind in den $\dot{x}^j$ positiv homogen von nullter Ordnung, die $\mathrm{A}_{kh}{}^i$ außerdem die Komponenten eines Tensors. Ferner gilt nach (17[1]) und (26[1])

$$\Gamma^*{}_{ikh} + \Gamma^*{}_{kih} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^h} - 2\mathrm{C}_{ikp}\mathrm{G}_h{}^p. \quad (\Gamma^*{}_{ikh} = \mathrm{g}_{jk}\, \Gamma^*{}_{ih}{}^j). \tag{27}$$

Nun stellen wir eine letzte Symmetrieforderung:

(C. II. 4) Bei der Parallelübertragung von einem beliebigen Linienelement nach irgend einem dazu parallelen gibt es infinitesimale Parallelogramme.

D. h.: Sind (δx) und $(\mathrm{d}x)$ irgend zwei infinitesimale Vektoren im Linienelement $(x, \dot{x})$, so soll vermöge (24) und (25) stets $\delta \mathrm{d}x^i - \mathrm{d}\delta x^i = 0$ gelten.[25]) Diese Forderung ist gleichbedeutend mit der Symmetrie

$$\Gamma^*{}_{kh}{}^i = \Gamma^*{}_{hk}{}^i. \tag{28}$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt

$$\begin{aligned} \Gamma^*{}_{ikh} &= \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathrm{g}_{ik}}{\partial x^h} + \frac{\partial \mathrm{g}_{kh}}{\partial x^i} - \frac{\partial \mathrm{g}_{hi}}{\partial x^k}\right) - \mathrm{C}_{ikp}\, \mathrm{G}_h{}^p - \mathrm{C}_{khp}\, \mathrm{G}_i{}^p + \mathrm{C}_{hip}\, \mathrm{G}_k{}^p; \\ \Gamma^*{}_{ih}{}^j &= \mathrm{g}^{jk}\Gamma^*{}_{ikh} \end{aligned} \tag{29}$$

und wegen (26[1])

$$\begin{aligned} \Gamma_{ikh} &= \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathrm{g}_{ik}}{\partial x^h} + \frac{\partial \mathrm{g}_{kh}}{\partial x^i} - \frac{\partial \mathrm{g}_{hi}}{\partial x^k}\right) - \mathrm{C}_{khp}\, \mathrm{G}_i{}^p + \mathrm{C}_{hip}\, \mathrm{G}_k{}^p; \\ \Gamma_{ih}{}^j &= \mathrm{g}^{jk}\, \Gamma_{ikh}. \end{aligned} \tag{30}$$

Für die noch unbekannten Funktionen $\mathrm{G}_i{}^p$ leitet man aus (30) durch eine Rechnung, die keine Schwierigkeiten bietet, die Bedingungen

$$\mathrm{g}_{ij}\left(\frac{\partial \mathrm{G}_k{}^j}{\partial \dot{x}^h}\, \dot{x}^k - \mathrm{G}_h{}^j\right) = 0 \tag{31}$$

ab. Sie erfüllen also die Forderung (W. II. 3). Aus (C. II. 2) folgt, daß sie auch die Forderung (W. II. 2) erfüllen. Die Parallelübertragung der Linienelemente $(x, \dot{x})$ ist somit eine Parallelübertragung der in Nr. 3 betrachteten Art. Aus (12) und (13) ergibt sich jetzt

$$G_j{}^i = \frac{\partial G^i}{\partial \dot{x}^j}; \quad G^i = \tfrac{1}{4} g^{ih} \left(\frac{\partial^2 (L^2)}{\partial \dot{x}^h \, \partial x^k} \dot{x}^k - \frac{\partial (L^2)}{\partial x^h} \right); \quad [L = L(x, \dot{x})]. \tag{32}$$

Damit ist die Parallelübertragung (C. II. 1) vollständig aus der Grundfunktion $L(x, \dot{x})$ bestimmt.

7. Der weitere Aufbau der Cartanschen Theorie erfolgt in der gewöhnlichen Weise.

Zunächst hat ein Finslerscher Raum, der kein Riemannscher ist, stets eine Torsion, deren Tensor $A_{kh}{}^i$ ist. Denn aus (25) folgt wegen (C. II. 4)

$$\delta d x^i - d \delta x^i = - A_{kh}{}^i \, [d x^k \, \omega^h(\delta) - \delta x^k \, \omega^h(d)]. \tag{33}$$

Für $n = 2$ läßt sich der Torsionstensor auf den in Nr. 1 erwähnten Hauptskalar zurückführen.

Durch Herumführung eines Vektors um ein infinitesimales „Viereck" von Linienelementen

$$(x, \dot{x}), \quad (x + d_1 x, \ \dot{x} + d_1 \dot{x}), \quad (x + d_2 x, \ \dot{x} + d_2 \dot{x}), \quad (x + d_1 x + d_2 x + d_1 d_2 x, \ \dot{x} + d_1 \dot{x} + d_2 \dot{x} + d_1 d_2 \dot{x}),$$

$$d_1 d_2 x^i - d_2 d_1 x^i = 0^{26)} \qquad d_1 d_2 \dot{x}^i - d_2 d_1 \dot{x}^i = 0,$$

ergibt sich ferner, daß der Finslersche Raum drei Krümmungstensoren hat:

$$\left.\begin{aligned}
S_{ijkh} &= A_{jk}{}^m A_{ihm} - A_{jh}{}^m A_{ikm}, \\
P_{ijkh} &= A_{ikh|i} - A_{ikh|j} + A_{ik}{}^m A_{jmh|q} \, l^q - A_{jk}{}^m A_{imh|q} \, l^q, \\
R_{ijkh} &= \frac{\partial \Gamma^*_{ijk}}{\partial x^h} - \frac{\partial \Gamma^*_{ijk}}{\partial \dot{x}^m} \frac{\partial G^m}{\partial \dot{x}^h} - \left(\frac{\partial \Gamma^*_{ijh}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^*_{ijh}}{\partial \dot{x}^m} \frac{\partial G^m}{\partial \dot{x}^k} \right) + \\
&\quad + \Gamma^*_{imh} \Gamma^*_{jk}{}^m - \Gamma^*_{jmh} \Gamma^*_{ik}{}^m + \\
&+ C_{ijm} \left\{ \frac{\partial^2 G^m}{\partial \dot{x}^k \, \partial x^h} - \frac{\partial^2 G^m}{\partial \dot{x}^h \, \partial x^k} - \frac{\partial^2 G^m}{\partial \dot{x}^k \, \partial \dot{x}^r} \frac{\partial G^r}{\partial \dot{x}^h} + \frac{\partial^2 G^m}{\partial \dot{x}^h \, \partial \dot{x}^r} \frac{\partial G^r}{\partial \dot{x}^k} \right\}.
\end{aligned}\right\} \tag{34}$$

In (34) ist

$$A_{ikh|j} = \frac{\partial A_{ikh}}{\partial x^j} - \frac{\partial A_{ikh}}{\partial \dot{x}^p} \frac{\partial G^p}{\partial \dot{x}^j} - A_{pkh} \Gamma^*_{ij}{}^p - A_{iph} \Gamma^*_{kj}{}^p - A_{ikp} \Gamma^*_{hj}{}^p.$$

Für $n = 2$ ist der erste dieser Krümmungstensoren Null, der zweite läßt sich auf die extremale Ableitung[27]) des Hauptskalars, der dritte auf das Krümmungsmaß (Nr. 1) zurückführen.

Endlich existieren noch Identitäten, die eine Verallgemeinerung der Bianchischen Identität darstellen und teils endliche Relationen zwischen den Tensoren der Krümmung und Torsion geben, teils solche, in die auch die kovarianten Ableitungen dieser Tensoren eingehen.

8. In unser Bild der Theorie von Cartan ist noch ein letzter Zug einzutragen: die Winkelmetrik. Wie der Winkel zweier Vektoren in demselben Linienelement in der Maßbestimmung (C. I. 1, 2) zu messen ist, ist ohne Weiteres klar. Als Winkel zweier unendlich benachbarter Linienelemente $(x, \dot{x})$ und $(x, \dot{x} + d\dot{x})$ mit demselben Zentrum wird die Länge des Vektors definiert, der das kovariante Differential des Einheitsvektors des Linienelements darstellt. Das Quadrat dieses Winkels ist

$$d\varphi^2 \equiv g_{ik}\, dl^i\, dl^k = \frac{1}{L} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i\, \partial \dot{x}^k}\, d\dot{x}^i\, d\dot{x}^k. \tag{35}$$

Unter dem Winkel zweier unendlich benachbarten Linienelemente $(x, \dot{x})$ und $(x + dx, \dot{x} + d\dot{x})$ mit verschiedenen Zentren ist definitionsgemäß der Winkel zu verstehen, den das nach dem Punkte $(x + dx)$ parallel übertragene Linienelement $(x, \dot{x})$ mit dem Linienelement $(x + dx, \dot{x} + d\dot{x})$ bildet (abgesehen von unendlich kleinen Größen höherer als erster Ordnung). Man erhält für sein Quadrat

$$\begin{aligned} d\varphi^2 &= g_{ik}\, \omega^i(d)\, \omega^k(d) = \\ &= \frac{1}{L} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i\, \partial \dot{x}^k} \left(d\dot{x}^i + \frac{\partial G^i}{\partial \dot{x}^p} dx^p\right) \left(d\dot{x}^k + \frac{\partial G^k}{\partial \dot{x}^q} dx^q\right). \end{aligned} \tag{36}$$ [28])

Das Verschwinden des Krümmungstensors S_{ijkh} bedeutet, daß die Winkelmetrik (35) wie im euklidischen Raum die Krümmung Eins hat. Für $n = 2$ ist das stets der Fall.

* * *

Es würde mich freuen, wenn Ihnen meine Skizze der Cartanschen Theorie den Eindruck vermittelt hat, daß sich die Finslersche Geometrie heute relativ einfach begründen läßt. Damit ist aber das Interesse, das diese Geometrie bietet, keineswegs erschöpft. Insbesondere gibt sie noch Gelegenheit genug zu Einzeluntersuchungen. Z. B. ist die naheliegende Frage, welche Eigenschaften geometrischer Gebilde in Riemannschen Räumen auch noch in Finslerschen Räumen erhalten bleiben, welche durch allgemeinere zu ersetzen sind und welche ganz verloren gehen, bisher nur recht unvollständig beantwortet. Auch eine axiomatische Fundierung der Cartanschen Theorie in ähnlicher Art, wie sie Winternitz[2]) für seine eigene Theorie gegeben hat, wäre gewiß ein dankbares Problem. Endlich wäre noch die Aufgabe einer analogen Begründung der Theorie anderer „verallgemeinerter" Räume zu nennen.[29])

Anmerkungen.

(Die Nummern bei den Autorennamen beziehen sich auf das Literaturverzeichnis.)

1) Cartan 5, 7.

2) Winternitz 1.

3) Koschmieder 6.

4) Riemann 1; vgl. auch Lipschitz 1, 2.

5) Bliss 1, 2; Landsberg 1, 2, 3; Underhill 1. Neuere Arbeiten über den zweidimensionalen Fall: Berwald 4, 5; Cartan 2.

6) Landsberg 3 (für Linienelemente im gleichen Punkt); Cartan 2 (Verallgemeinerung auf Linienelemente in verschiedenen Punkten); 4, 5, 7 (Verallgemeinerung für n Dimensionen). Vgl. auch Delens 2 und Anm. 23) Andere Winkelbegriffe: a) Bliss 1; b) Finsler 1; c) Berwald 2, 3, Synge 1, Taylor 2. Über alle diese Winkelbegriffe vgl. Golab 1.

7) Ein solcher Begriff bei Bliss 2; der heute zumeist verwendete bei Funk und Berwald 1; ein dritter bei Grüß 3.

8) Landsberg 3, Underhill 1. Vgl. auch O. Bolza, Vorlesungen über Variationsrechnung, Leipzig und Berlin 1909, S. 346; De Donder 1; Funk 1. Verallgemeinerung auf n Dimensionen bei Finsler 1; vgl. auch Berwald 1, 2. Ein anderer Krümmungsbegriff bei Bliss 2.

9) Underhill 1. Vgl. auch Bolza, a. a. O., S. 228; De Donder 1; Finsler 1; Berwald 4, 5; Cartan 2.

10) Underhill 1. Vgl. auch Berwald 4, 5; Cartan 2.

11) Landsberg 3. Über diese „Räume von Landsberg" vgl. auch Berwald 5; Cartan 2.

12) Finsler 1.

13) Kurventheorie in Finslerschen Räumen: Finsler 1; Taylor 2; Cartan 7. Vgl. auch Anm. 8).

14) Theorie p-dimensionaler Flächen in Finslerschen Räumen: Finsler 1; Taylor 3; Grüß 1, 2, 3; Cartan 7; Haimovici 1.

15) Es wurden folgende Parallelübertragungen aufgestellt: a) 1925 Berwald 2, 3, 4, 5, 6, 8 (im Anschluß an E. Noether 1, 2); b) 1925 Synge 1; Taylor 2; c) 1928 Douglas 1; d) 1930 Winternitz 1; e) 1930 Grüß 3 ($n = 2$); f) 1930 Cartan 2 ($n = 2$), 1933 Cartan 5, 7. — c), d) können der Parallelübertragung a); b), d) der Parallelübertragung f); c) einer 1932 von Kosambi 4, 5 für den nicht homogenen Fall eingeführten Parallelübertragung untergeordnet werden. d) ist eine besondere nicht lineare Vektorübertragung; über solche vgl. Friesecke 1; Bortolotti 1.

16) Verallgemeinerte affin zusammenhängende Räume: Berwald 2; Douglas 1; Knebelman 3; Winternitz 1. Vgl. auch Vanderslice 1 und Anm. 15), 20). Verallgemeinerte projektiv zusammenhängende Räume: Cartan 1 ($n = 2$); Douglas 1; Knebelman 3; vgl. auch Vanderslice 1. Zur konformen Theorie verallgemeinerter Räume: Knebelman 2, Hosokawa 2. — Verallgemeinerung der Schoutenschen Theorie der linearen Übertragungen: Hosokawa 1; vgl. auch Hosokawa 3, 4; Kawaguchi 1, 2. — Kollineationen und Bewegungsgruppen in verallgemeinerten Räumen: Knebelman 1, 3. — Konforme Abbildbarkeit eines Finslerschen Raumes auf einen euklidischen und zweier Finslerschen Räume aufeinander: Golab 3, 4; Delens 2.

17) H. Minkowski, Geometrie der Zahlen, Leipzig 1896, Kap. I. Neuere Arbeiten (zumeist in axiomatischer Richtung): Golab und Härlen 1; Busemann 1, 2; Golab 2.

18) Funk 2, 3; Berwald 9, 10. Vgl. auch Wirtinger 1; Whitehead 1.

19) Fujiwara 1, 2; De Donder 1; Koschmieder 1, 2, 4, 5; Cartan 3. Vgl. auch die an Haar 1 anschließende Arbeit Berwald 11.

[20]) De Donder 1; Koschmieder 3, 6; Craig 1; Kawaguchi 1, 2; Hombu 1.

[21]) Siehe [17]).

[22]) Finsler 1.

[23]) Diese Maßbestimmung wurde eingeführt von Berwald 1, 2; Synge 1; Taylor 2.

[24]) Die Funktionen $G_h^i(x, \dot{x})$ haben zunächst mit den in Nr. 3 ebenso genannten Funktionen nichts zu tun.

[25]) Dieses „sich Schliessen" der Figur ist in entsprechender Weise zu verstehen, wie in (R. II. 3).

[26]) d_1, d_2 sind nicht die Symbole einer Parallelübertragung, sondern bedeuten beliebige den Vertauschbarkeitsbedingungen des Textes genügende infinitesimale Zuwächse.

[27]) Berwald 4, 5.

[28]) O. Varga in einer nicht publizierten Dissertation (Deutsche Universität, Prag). Ein Auszug erscheint voraussichtlich in der Zeitschrift Lotos, Prag.

[29]) Affin zusammenhängende Räume von Linienelementen bei Varga, a. a. O. Projektiv zusammenhängende zweidimensionale Räume von Linienelementen bei Cartan 1.

Literatur.

(Abkürzungen nach dem Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik.)

G. Ancochea: *1.* Revista Mat. hisp.-amer. (2) 8 (1933), 261—264. — L. Berwald: *1.* Lotos, Prag 67/68 (1919/20), 52—56; *2.* Jahresbericht D. M. V. 34 (1925), 213—220; *3.* M. Z. 25 (1926), 40—73; *4.* Lotos, Prag 74 (1926), 43—51; *5.* J. f. M. 156 (1927), 191—222; *6.* Rendiconti Accad. d. L., Roma (6) 5 (1927), 763—768; *7.* ebenda (6) 7 (1928), 301—306; *8.* Atti Congresso Bologna 1928, 4, 263—270; *9.* M. Z. 30 (1929), 449—469; *10.* Monatshefte f. Math. 36 (1929), 315—330; *11.* ebenda, 38 (1931), 89—108. — G. A. Bliss: *1.* Transactions A. M. S. 7 (1906), 184—196; *2.* Amer. J. 37 (1915), 1—18. — E. Bortolotti: *1.* Annals of Math. (2) 32 (1931), 361—377. — H. Busemann: *1.* Math. Ann. 106 (1932), 140—160; *2.* Nachrichten Göttingen 1933, 116—140. — É. Cartan: *1.* Bull. S. M. F. 52 (1924), 205—241; *2.* Mathematica 4 (1930), 114—136; *3.* Actualités scientifiques et industrielles 72, Hermann et Cie. Paris 1933, 47 S.; *4.* C. R. 196 (1933), 27—28; *5.* ebenda, 582—586; *6.* M. Z. 37 (1933), 619—622; *7.* Actualités scientifiques et industrielles 79, Hermann et Cie, Paris 1934, 42 S. — H. V. Craig: *1.* Trans. A. M. S. 33 (1931), 125—142; *2.* Bulletin A. M. S. 37 (1931), 731—734; 39 (1933), 919—922. — P. Delens: *1.* C. R. 196 (1933), 1356-1358; *2.* Actualités scientifiques et industrielles 80, Hermann et Cie, Paris 1934, 39 S. — P. Delens et J. Devisme: *1.* C. R. 196 (1933), 518—521. — Th. De Donder: *1.* C. R. 155 (1912), 577—580; 1003—1005. — J. Douglas: *1.* Annals of Math. (2) 29 (1928), 143—168; *2.* Math. Ann. 105 (1931), 707—733. — A. Duschek und W. Mayer: *1.* Lehrbuch der Differentialgeometrie, Leipzig und Berlin, II, 1930, 79—117; *2.* Monatshefte f. Math. 40 (1933), 294—308. — P. Finsler: *1.* Dissertation, Göttingen 1918, 120 S. — H. Friesecke: *1.* Math. Ann. 94 (1925), 101—118. — M. Fujiwara: *1.* Tôhoku Math. Journ. 1 (1912), 8—18; *2.* Tokyo Math. Ges. (2) 6 (1912), 123—127. — P. Funk: *1.* M. Z. 3 (1919), 87—92; *2.* Math. Ann. 101 (1929), 226—237; *3.* Monatshefte f. Math. 37 (1930), 153—158. — P. Funk und L. Berwald: *1.* Lotos, Prag 67/68 (1919/20), 45—49. — St. Golab: *1.* Verhandlungen Mathematikerkongreß Zürich 1932, 2, 178—179; *2.* Prace Akad. gorniczej, Krakau 6 (1932), 79 S.; *3.* C. R. 196 (1933), 25—27; *4.* ebenda, 986—988. — St. Golab und H. Härlen: *1.* Monatshefte f. Math. 38 (1931), 387—398. — G. Grüß: *1.* Math. Ann. 100 (1928), 1—31; *2.* Jahresbericht D. M. V. 38 (1929), 83—91; *3.* Math. Ann. 103 (1930), 162—184. — A. Haar: *1.* Math. Ann. 100 (1928), 481—502. — M. Haimovici: *1.* C. R. 198 (1934), 426—427; *2.* ebenda, 1105—1107. — H. Hombu: *1.* Tôhoku Math. Journ. 37 (1933), 190—198. — T. Hosokawa: *1.* Science Reports Tokyo (1) 19 (1930), 37—50; *2.* Japanese Journ. of Math. 9 (1932), 59—62; *3.* Proceedings Acad. Tokyo 8 (1932), 348—351; *4.* Journal Faculty of Sciences, Hokkaido Univ. (1) 2 (1934), 1—11. — M. M. Johnson: *1.* Amer. J. 53 (1931), 103—116. — A. Kawaguchi: *1.* Proceedings Acad. Tokyo 7 (1931), 211—214; 8 (1932), 340—343; 9 (1933), 347—350; *2.* Rendiconti Palermo 56 (1932), 245—276. — M. S. Knebelman: *1.* Proceedings USA. Academy 13 (1927), 607—611; *2.* ebenda 15 (1929), 376—379; *3.* Amer. J. 51 (1929), 527—564; *4.* Proceedings USA. Academy 16 (1930), 156—159. — D. D. Kosambi: *1.* Bulletin Acad. of Sciences UP. Allahabad 2 (1932), 17—28; *2.* Journal Indian M. S. 19 (1932), 215—219; *3.* Sitzungsberichte Akad. Berlin 1932, 342—345; *4.* Rendiconti Accad. d. L., Roma (6) 16 (1932), 410—415; *5.* M. Z. 37 (1933), 608—618. — L. Koschmieder: *1.* Math. Ann. 94 (1925), 252—261; *2.* M. Z. 24 (1925), 181—190; *3.* M. Z. 25 (1926), 74—86; *4.* Revista Mat. hisp.-amer. (2) 1 (1926), 129—146; *5.* Proceedings Amsterdam 31 (1927/8), 140—150, 469—484; *6.* Jahresbericht D. M. V. 40 (1931), 109—132. — G. Landsberg: *1.* Jahresbericht D. M. V. 16 (1907), 36—46; *2.* ebenda, 547—551; *3.* Math. Ann. 65 (1908), 313—349. — T. Levi-Civita: *1.* Revista Mat. hisp.-amer. 5 (1923), 165—176. — R. Lipschitz: *1.* J. f. M. 70 (1869), 71—102; *2.* J. f. M. 72 (1870), 1—56. — A. Maccone: *1.* Rendiconti Accad. d. L., Roma (5) 32I (1923), 327—331. — W. Mayer: *1.* Jahresbericht D. M. V. 38 (1929), 260—281. — E. Noether: *1.* Nachrichten Göttingen 1918, 37—44; *2.* Jahresbericht D. M. V. 32 (1923), 177—184. — E. Nohel: *1.* Sitzungsberichte Wien 123 (1914), 2085—2115. — M. Pinl: *1.* Proceedings Amsterdam 36 (1933), 550—557. — B. Riemann: *1.* Abhandlungen Göttingen 13 (1854); Gesammelte math. Werke, 2. Aufl. Leipzig 1892, 272—287. Neue Ausgabe von H. Weyl, Berlin 1919, 47 S. — Ch. H. A. Rowe: *1.* Proceedings Irish Acad. 40 (1932), 99—106. — S. Subramanian: *1.* Bulletin Acad. of Sciences UP. Allahabad 3 (1933), 61—64. — J. L. Synge: *1.* Transactions A. M. S. 27 (1925), 61—67. — J. H. Taylor: *1.* Bulletin A. M. S. 31 (1925), 257—262; *2.* Transactions A. M. S. 27 (1925), 246—264; *3.* Annals of Math. (2) 28 (1927), 620—628; *4.* Bulletin A. M. S. 35 (1929), 231—236. — A. L. Underhill: *1.* Transactions A. M. S. 9 (1908), 316—338. — J. L. Vanderslice: *1.* Amer. J. 56 (1934), 153—193. — J. H. C. Whitehead: *1.* Proceedings L. M. S. (2) 32 (1929), 93—114. — A. Winternitz: *1.* Sitzungsberichte Akad. Berlin 1930, 457—469. — W. Wirtinger: *1.* Monatshefte f. Math. 32 (1923), 1—14.