Daným bodem veďme tedy takovouto rovinu a k ní tečný ellipsoid.

5. Podrobíme-li parametry u, v, w dvěma podmínkám, obdržíme řadu ploch, které mají obálku, jež se každé z nich dotýká podél jisté křivky karakteristikou zvané. Abychom sestrojili plochu, jíž přísluší maximum aneb minimum funkce $V(u, v, w)$ jejich parametrů, sestrojme obálku soustavy $V = \text{const.}$, která se obálky dané řady dotýká podél jedné karakteristiky.

Pravděpodobnost a posteriori.

Napsal

Augustin Pánek.

(Dokončení.)

Pravděpodobnost, že v 5. pokuse vyňata bude kulička bílá, když již 3krát byla bílá a jednou černá vyňata, jest dle (4)

$$K = \frac{256}{584} \cdot \frac{4}{5} + \frac{216}{584} \cdot \frac{3}{5} + \frac{96}{584} \cdot \frac{2}{5} + \frac{16}{584} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1880}{2920} = \frac{47}{73}.$$

Týmž činem obdržíme pravděpodobnost K', že v pátém pokuse vytáhneme kuličku černou, aneb kratčeji dle známého vzorce

$$K' = 1 - K.$$

Příklad 2. V osudí jsou kuličky bílé neb černé počtem r; vytáhneme-li kuličku bílou, jaká jest pravděpodobnost, že v témž osudí jest n bílých kuliček.*)

Především jest $n \leq r$, a hledíme-li k danému počtu kuliček, máme r možných supposic, že totiž vytáhneme z osudí kuličku bílou.

Dle 1. supposice jest v osudí 1 bílá, $r - 1$ černá kulička,
„ 2. „ jsou „ 2 bílé, $r - 2$ černé kuličky,
. . . .
„ n. „ jest „ n bílých, $r - n$ černých kuliček,
. . . .
„ r. „ „ „ r bílých, 0 černá kulička.

---

*) Viz: *Poisson-Schnuse*, str. 60.

Tyto supposice, které jsou stejně možny, vylučují se vzájemně, proto můžeme přijati r hypothes pro zjev, že totiž z osudí vytáhneme kuličku bílou. Dejme tomu, že by bylo v osudí mezi r kuličkami n bílých, pak jest absolutní pravděpodobnost, že vytáhneme kuličku bílou $\frac{n}{r}$, a tedy dle poučky Bayes-ovy pravděpodobnost, že v osudí jest skutečně n bílých kuliček,

$$H_r = \frac{\frac{n}{r}}{\frac{1}{r} + \frac{2}{r} + \ldots + \frac{n}{r} + \ldots + \frac{r}{r}} = \frac{2n}{r(r+1)}.$$

Tato pravděpodobnost rovná se $\frac{1}{2}$, jest-li $r = n = 3$. Všeobecně bude pravděpodobnost, že v osudí jsou pouze kuličky bílé, když již jedna bílá byla vyňata, a tedy $n = r$,

$$H_r = \frac{2}{r+1}.$$

Příklad 3. Je-li v osudí r kuliček bílých a černých a byla-li první vytažená kulička bílá, jaká jest pravděpodobnost, že druhá vyňatá kulička bude opět bílá.

V příkladě tomto třeba míti dva případy na zřeteli, jest-li totiž kuličku vytaženou zpět do osudí vložíme čili nic.

a) Pozorovaný zjev A jakož i následující zjev B jest vytažení kuličky bílé.

Je-li v osudí n kuliček bílých, jsou pravděpodobnosti P_r a ω_r zjevů A a B stejné a rovny $\frac{n}{r}$.

Vzorcem, kterým vypočítáme pravděpodobnost budoucích zjevů, pozorovavše dříve zjevy minulé aneb nynější, jest (4′), a proto žádaná pravděpodobnost

$$K = \frac{P_1\omega_1 + P_2\omega_2 + \ldots + P_r\omega_r}{P_1 + P_2 + \ldots + P_r} = \frac{\left(\frac{1}{r}\right)^2 + \left(\frac{2}{r}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{r}{r}\right)^2}{\frac{1}{r} + \frac{2}{r} + \ldots + \frac{r}{r}}.$$

Poněvadž čitatel tohoto zlomku rovná se $\frac{r(r+1)(2r+1)}{6 \cdot r^2}$ a jmenovatel $\frac{1}{2}(r+1)$, jest konečně

$$K = \frac{2r+1}{3r}.$$

b) Nevkládáme-li vytažených kuliček zpět do osudí, jsou absolutní pravděpodobnosti zjevů A a B

$$P_r = \frac{n}{r}, \qquad \omega_r = \frac{n-1}{r-1}$$

a tedy dle (4′)

$$K = \frac{\dfrac{1.2+2.3+\ldots+(r-1)r}{(r-1)r}}{\dfrac{1+2+\ldots+r}{r}}$$

$$= \frac{\dfrac{1}{(r-1)r}\cdot\frac{1}{3}(r-1)r(r+1)}{\frac{1}{2}(r+1)} = \tfrac{2}{3}.$$

Jest tudíž pravděpodobnost v tomto druhém případě nezávislá na počtu kuliček v osudí. Hodnota v případě prvém patrně blíží se též ku $\frac{2}{3}$, vzrůstá-li počet r všech kuliček.

Příklad 4. Je-li v osudí r kuliček bílých a černých a shledáme-li, že při $r-1$ tahu samé bílé se nám namanuly, jaká jest pravděpodobnost, že kulička v osudí zbývající jest též bílá.

Zde jsou možny dvě supposice: buď jest v osudí všech r kuliček bílých, aneb jest mezi nimi *jedna* černá. Dle 1. supposice jest pozorovaného zjevu pravděpodobnost $P_1 = 1$ nebo-li jistotě. Dle 2. supposice jest pravděpodobnost, že totiž vytáhneme z osudí $r-1$ kuličku bílou, táž jako pravděpodobnost, že zůstane v osudí kulička černá; že však zbývající kulička v osudí může býti jedna z oněch r, proto pravděpodobnost, že táž jest černá, $P_2 = \dfrac{1}{r}$.

Bude tedy značiti dle poučky Bayes-ovy

$$H_1 = \frac{P_1}{P_1+P_2} = \frac{1}{1+\dfrac{1}{r}} = \frac{r}{r+1} \text{ *)}$$

*) O tomto vzorci zmiňuje se prof. *Masaryk* ve svém spise: „Počet pravděpodobnosti a Humova skepse“ (V Praze, 1883, str. 30), kdež praví doslovně: „Jak *Mendelssohn* k formuli (sic!) $\frac{n}{n+1}$ došel, ne-

pravděpodobnost prvé hypothesy, že totiž v osudí zbývající kulička, jako všecky již vytažené, jest též bílá.

Jest-li $r = 1$, bude $H_1 = \frac{1}{2}$, což jest a priori zřejmo.

4. V naukách přírodních nelze na základě hypothes pravděpodobnost jednotlivých zjevů vypočísti, poněvadž nezřídka mnoho různých příčin má vliv na jich uskutečnění.

Jestliže jest x pravděpodobnost jednoduchého zjevu A dle jisté hypothesy, bude $\overline{1-x}$ pravděpodobnost zjevu B dle téže hypothesy. Nastane-li v $n = p + q$ pokusech p-kráte zjev A, q-kráte zjev B, jest pravděpodobnost tohoto složitého zjevu

$$P = (n)_p \, x^p (1-x)^q. \tag{5}$$

Abychom určili hodnotu x, za kterou bude P maximum, položme $\frac{dP}{dx} = 0$, z čehož jde

$$\frac{x}{1-x} = \frac{p}{q}, \tag{6}$$

to jest: *pravdě nejpodobnější jest hypothesa ta, která dá pravděpodobnosti x a $\overline{1-x}$, jež jsou v témž poměru jako počet pozorování p a q, kterážto hypothesa tím více skutečnosti se blíží,*

---

vím; *Laplacova* formule pro pravděpodobnosť, že jev n-krát pozorovaný při novém pokusu se opět vyskytne je $\frac{n+1}{n+2}$."

Prof. Masaryk musí připustiti, že ve spise „Moses Mendelssohns philosophische Schriften", Troppau, 1784 pojednáno o pravděpodobnosti pod záhlavím „Uiber die Wahrscheinlichkeit", v 2. díle od str. 227—267 tak průzračně, jako by byl *Euler* sám pisatelem. Zde uvedena nejprve pravděpodobnost $\frac{1}{n+1}$ a tudíž jest patrně známa i pravděpodobnost $\frac{n}{n+1}$. Pravděpodobnost $\frac{1}{n+1}$ možno vysvětliti takto: Jestliže jest v osudí n kuliček bílých a černých ale není známo, kolik každé barvy, pak lze přijati $n+1$ rozličnou a rovně možnou supposici. Tyto supposice jsou: v osudí jest n kuliček bílých, neb $n-1$ bílá a 1 černá, aneb $n-2$ bílé a 2 černé atd. aneb posléze samé černé. Poněvadž tyto supposice možny jsou, je pravděpodobnost každé $\frac{1}{n+1}$.

Ve příčině hodnoty $\frac{n+1}{n+2}$ viz odstavec 6. vzorec (14).

čím větší jest počet pozorování $n = p + q$. Z úměry (6) vyplývá hodnota pravdě nejpodobnější

$$x = \frac{p}{p+q}.$$

Jsou-li v osudí kuličky bílé a černé, a vytáhneme-li na př. ve 100 pokusech 80 bílých a 20 černých, přijímajíce, že po každém pokuse kuličku zpět do osudí vložíme: můžeme s pravděpodobností dosti značnou souditi, že v osudí jest počet kuliček bílých k černým v poměru 4 : 1 a tedy $x = \frac{4}{5}$.

Jak svrchu řečeno, působí k uskutečnění zjevů přírodních velký počet příčin většinou neznámých, a proto jest nesčíslný počet hypothes možných a každá z nich vyhovuje pravděpodobnosti jiné.

Pravděpodobnost, že zjev nastane, jest obsažena v mezích 0 a 1 (nemožnost a jistota), takže v rozsahu takto omezeném jest nepřetržitá řada hodnot, které vyhovují různým možným hypothesám.

Jsou-li A a B dva opačné zjevy, které se vylučují, z nichž A nastane p-krát, B pak q-krát, takže, má-li zjev A jednoduchou pravděpodobnost $\omega = x$, bude míti zjev B pravděpodobnost $v = 1 - x$, vyjadřuje vzorec (5) pravděpodobnost tohoto složitého zjevu pozorovaného $n = p + q$-krát za jakoukoliv hodnotu x.

Dejme tomu, že má veličina x mezi 0 a 1 hodnoty x_1, x_2, $x_3, \ldots$ znamenající pravděpodobnosti, které vyhovují různým hypothesám, že zjev A jednou nastane: jsou $1 - x_1$, $1 - x_2$, $1 - x_3, \ldots$ pravděpodobnosti, že zjev B jednou se přihodí. Podle toho jsou příslušné pravděpodobnosti P dle vzorce (5) posloupně

$$P_1 = (n)_p x_1^p (1 - x_1)^q, \quad P_2 = (n)_p x_2^p (1 - x_2)^q,$$
$$P_3 = (n)_p x_3^p (1 - x_3)^q, \ldots$$

a tudíž dle poučky Bayes-ovy

$$H = \frac{P}{\Sigma P} = \frac{x^p (1 - x)^q}{\Sigma x^p (1 - x)^q},$$

což jest *měřítkem* pravděpodobnosti hypothesy H.

Ale poněvadž x nekonečně malé intervally mezi 0 a 1 probíhá, přechází jmenovatel tohoto zlomku v integral, znásobíme-li dříve čítatele i jmenovatele dx; bude tedy

$$H = \frac{x^p (1-x)^q \, dx}{\int_0^1 x^p (1-x)^q \, dx} \tag{7}$$

výrazem pravděpodobnosti jisté určité hypothesy H, která stanoví, že zjevu A pozorovaného p-krát jest jednoduchá pravděpodobnost $\omega = x$. Čítatel vzorce (7) jest nekonečně malý a jmenovatel určitá konečná hodnota, tudíž jest H nekonečně malé, jinými slovy: čítatel znamená pravděpodobnost vytčeného spojení zjevů mezi x a $x + dx$, jmenovatel pak udává součet pravděpodobností všech hypothes připuštěných, a hodnota jeho

$$\int_0^1 x^p (1-x)^q dx = \frac{\Gamma(p+1)\,\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+2)}$$
$$= \frac{1.2\ldots p.1.2\ldots q}{1.2\ldots p(p+1)\ldots(p+q+1)}$$
$$= \frac{1.2\ldots q}{(p+1)(p+2)\ldots(p+q+1)},\text{*)} \tag{a}$$

známý to integral *Eulerův.*

Jsou-li zjevy A a B takové, že zjevu A přísluší absolutní pravděpodobnost x, která, ač jest neznáma, přece během zkoumání našeho za *nezměněnou* pokládána býti může, lze tvrditi, že pravdě nejpodobnější hodnoty

$$x = \frac{p}{p+q} \quad \text{a} \quad 1 - x = \frac{q}{p+q}$$

budou skutečně buď o něco málo většími neb menšími pravé hodnoty. Nazveme-li dotčený rozdíl $\triangle$, který můžeme voliti tak malý, jak vůbec jenom chceme, bude pravděpodobnost, že pravá hodnota x obsažena jest v mezích

$$\frac{p}{p+q} - \triangle = \alpha \quad \text{a} \quad \frac{p}{p+q} + \triangle = \beta \text{ blížiti se jednotce.}$$

Můžeme si tedy učiniti otázku: Jaká je pravděpodobnost rozličných hypothes, jestliže pravděpodobnost x, že jednoduchý zjev A nastane, jest v mezích $x = \alpha$ až $x = \beta$. Přihlédneme-li k tomu, že jmenovatel vzorce (7) jest konstanta, bude pravděpodobnost Π, že pravá hodnota jest v těchto mezích,

---

*) Podíl tento vyvodil způsobem elementárním duchaplný *Condorcet*, známý svými socialními a politickými spisy, ve svém „Elémens du Calcul des Probabilités," pag. 70., kterýžto vývoj ponechal též *Lacroix* ve svém „Traité élémentaire du Calcul des Probabilités."

$$\Pi = \frac{\int_{\alpha}^{\beta} x^p (1-x)^q \, dx}{\int_0^1 x^p (1-x)^q \, dx}, \tag{8}$$

při čemž $\alpha < x < \beta$.

Dříve jsme shledali, že ve 100 pokusech byla vyňata 80krát kulička bílá a 20krát černá; jaká hypothesa jest nyní nejvíce pravděpodobná, která plyne z poměru 4 : 1 kuliček bílých ku černým?

Byť i $x = \frac{4}{5}$, $1 - x = \frac{1}{5}$ udávalo, že tato hypothesa jest pravdě nejpodobnější, přece jest absolutní hodnota pravděpodobnosti této hypothesy malá; dle vzorce (8) obdržíme nyní

$$\Pi = \frac{\int_{\frac{4}{5}-\triangle}^{\frac{4}{5}+\triangle} x^{80} (1-x)^{20} \, dx}{\int_0^1 x^{80} (1-x)^{20} \, dx},$$

značí-li $\triangle$ malou hodnotu, na př. $\triangle = 0{\cdot}001$. —

Na základě pozorování teploty v Praze během 108 let shledáno, že byl-li měsíc červenec chladný neb teplý, byl souhlasné povahy i srpen ve 72 letech a povahy rozdílné v 36 letech.*) Majíce zřetel k pozorováním těmto supponujeme, že během téže doby budou se míti povahy těchto měsíců souhlasné k rozdílným jako 2 : 1.

Poněvadž pravděpodobnost $x = \frac{2}{3}$, jest pravděpodobnost této hypothesy dle vzorce (8)

$$\text{H} = \frac{\int_{\frac{2}{3}-\triangle}^{\frac{2}{3}+\triangle} x^{72} (1-x)^{36} \, dx}{\int_0^1 x^{72} (1-x)^{36} \, dx}.\text{**)}$$

*) Dáta tato uvádí prof. *Augustin* v Časopise musea král. Českého, 1882 ve článku: O klimatických poměrech v Praze.

**) Nebude od místa, podáme-li všeobecně zajímavá pozorování tato:

Po velkých mrazích v *lednu* následuje ve 100 případech 59 dlouhých a 41 krátká zima. Byla-li však v lednu povětrnost mírná, následovalo ve 100 případech 66 dlouhých zim a 34 krátké zimy.

Tvar vzorce (8)

$$\Pi = \frac{\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, dx}{\int_{0}^{1} f(x)\, dx}$$

možno dále zevšeobecniti.*)

Po studeném *únoru* bývá ve 100 případech následující březen v 50 chladný a v 50 mírný. Po mírném únoru následuje však ve 100 případech 59kráte chladný a 41 mírný březen.

Byl-li *březen* 100kráte teplý, byl následující duben 81kráte mírným a 19kráte chladným. Po 100 mírných březnech následuje 56 teplých a 44 mokrých a chladných květnů. Po 100 mírných březnech následuje léto 57kráte mokré a 43kráte suché.

Po 100 mokrých *dubnech* následuje 57 suchých a 43 mokrých červnů, 67 mokrých a 33 suchých červenců, konečně 57 mokrých a 43 suchých let. Po 100 suchých dubnech následuje 67 mokrých a 33 suchých červnů, 63 mokrých a 37 suchých červenců a 67 mokrých a 33 suchých let.

Mezi 100 *květny* jest 58 mokrých a 42 suchých. Po 100 mokrých květnech následuje 51 suchých a 49 mokrých červnů. Po 100 suchých květnech následuje 78 mokrých a 22 suché červny.

Ze 100 *červnů* jest 56 mokrých a 44 suchých. Po 100 mokrých červnech následuje 59 mokrých a 41 suchých letních dob. Po 100 suchých červnech následuje 67 mokrých a 33 suchých dob letních.

Jest-li *červenec* a *srpen* horký, následuje ve 100 případech 61 studených a 39 mírných zim. Jsou-li oba tyto měsíce chladné a mokré, následuje po nich 39 studených a 61 mírných zim.

Ve 100 případech má podzim 64kráte stejnou povětrnost s první polovicí *září*. Jest-li konec září chladný, následuje v 61 případech chladná zima.

Po 100 sychravých *říjnech* následuje 60 teplých a 40 studených březnů, naproti tomu následuje po 100 teplých říjnech 51 mírných a 49 chladných březnů. Po 100 suchých říjnech následuje 58 suchých a 42 mokrých březnů, naproti tomu po 100 mokrých říjnech 44 suchých a 56 mokrých březnů. —

Pozoruhodné jest vůbec pozorování, že během 100 let nejvíce krupobití bylo v červnu.

Tak dle dat vzájemně pojišťovací banky „Slavie“ po čas trvání jejího shledáváme, že nejvíce pojištěnců oznámilo škody krupobitím způsobené v červnu; poslední však 3 léta největší náklad škod vyžadovaly Čechy v červenci, takže lonského roku byla vyplacena za jediný den 9. července škoda 66.192·92 zl.

*) Srov.: *Poisson* Recherches sur la Probabilités des Jugements..., 1837.

Je-li totiž pravděpodobnost η zjevu A, který sestává ze dvou zjevů jednoduchých, vzájemně souvislých, jichž pravděpodobnosti jsou x, y, takže $\eta = f(x, y)$: bude pravděpodobnost hypothesy, že zjev A nastane,

$$\Pi = \frac{\eta dx dy}{\int_0^1 \int_0^1 \eta dx dy}.$$

Tuto úvahu možno rozšířiti na událost A, která má pravděpodobnost

$$\eta = f(x, y, z, \ldots, u),$$

kdež x, $y, \ldots$, u znamenají jednoduché pravděpodobnosti zjevů, které jistým způsobem souvisí a jsou příčinou události A. Jsou-li meze veličin x, $y, \ldots$, u postupně a, b; α, β; $\ldots$; μ, ν, obdržíme zevšeobecnělý vzorec (8) ve formě

$$\Pi = \frac{\int_a^b dx \int_\alpha^\beta dy \ldots \int_\mu^\nu \eta du}{\int_0^1 \int_0^1 \ldots \int_0^1 \eta dx dy \ldots du}. \tag{9}$$

Je-li $z = \varphi(x)$ pravděpodobnost veličiny x před pozorováním a $y = f(x)$ pravděpodobnost pozorovaného zjevu A z hypothesy x plynoucího, jest pravděpodobnost, že neznámá x leží v mezích a, b,

$$\Pi = \frac{\int_a^b y z\, dx}{\int_0^1 y z\, dx} = \frac{\int_a^b f(x) \varphi(x) dx}{\int_0^1 f(x) \varphi(x) dx}. \tag{10}$$

5. Vykonáme-li $n = p + q$ pokusů neb pozorování, jest pravděpodobnost hypothesy, že p-krát nastane zjev A a q-krát zjev B, vyznačena vzorcem (7). Jaká jest nyní ale pravděpodobnost hypothesy, že v dalších $n' = p' + q'$ pokusech nastane p'krát zjev A a q'krát zjev B?

Pravděpodobnost, že zjev A nastane p'-krát a zjev B pak q'-krát, jest

$$(n')_{p'} x^{p'} (1 - x)^{q'};$$

dle principu složité pravděpodobnosti bude, hledíme-li ku vzorci (7),

$$H(n')_{p'} x^{p'}(1-x)^{q'} = (p'+q')_{p'} x^{p'}(1-x)^{q'} \cdot \frac{x^p(1-x)^q dx}{\int_0^1 x^p(1-x)^q dx},$$

výrazem žádané pravděpodobnosti zjevu dle určité hypothesy.

Podle všech hypothes jest tedy pravděpodobnost

$$P = (p'+q')_{p'} \frac{\int_0^1 x^{p+p'}(1-x)^{q+q'} dx}{\int_0^1 x^p(1-x)^q dx}. \tag{11}$$

Užijeme-li vzorce (a), nabude (11) tvaru

$$P = (p'+q')_{p'} \frac{(p+1)\dots(p+p')(q+1)\dots(q+q')}{(p+q+2)\dots(p+q+p'+q'+1)}. \tag{11'}$$

Tímto způsobem možno určiti stupeň spolehlivosti zjevů *budoucích.*

Kdyby hodnoty p, q čísla velká byla, možno ku zjednodušení výrazu v (11') užiti vzorce zbližného.

Jak známo, vyjadřuje approximativní *vzorec Stirlingův* fakultu velikého čísla n jakožto funkci n, takže

$$1^{n|1} = n! = \Gamma(n+1) = n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \sqrt{2\pi},$$

kterýž vzorec, vzrůstá-li n, pravé hodnotě se stále více blíží.

Podle tohoto vzorce možno položiti

$$(p+1)\dots(p+p') = \frac{1.2\dots(p+p')}{1.2\dots p} = \frac{(p+p')^{p+p'+\frac{1}{2}}}{p^{p+\frac{1}{2}}} \cdot e^{-p'},$$

$$(q+1)\dots(q+q') = \frac{(q+q')^{q+q'+\frac{1}{2}}}{q^{q+\frac{1}{2}}} \cdot e^{-q'},$$

$$(p+q+1)\dots(p+q+p'+q') = \frac{(p+q+p'+q')^{p+q+p'+q'+\frac{1}{2}}}{(p+q)^{p+q+\frac{1}{2}}} \cdot e^{-(p'+q')},$$

a konečně položme

$$\frac{p+q+1}{p+q+p'+q'+1} = \frac{p+q}{p+q+p'+q'},$$

čímž vzorec (11') nabude posléze tvaru

$$P = (p'+q')_{p'} \frac{(p+p')^{p+p'+\frac{1}{2}}(q+q')^{q+q'+\frac{1}{2}}(p+q)^{p+q+\frac{3}{2}}}{p^{p+\frac{1}{2}} q^{q+\frac{1}{2}} (p+q+p'+q')^{p+q+p'+q'+\frac{3}{2}}}. \tag{11''}$$

Tímto vzorcem řeší se na př. úloha: Pozorovalo se, že u velkém počtu případů $p+q$ narodilo se p chlapcův a q děvčat; s jakou provděpodobností P lze očekávati, že při následujících porodech bude p' chlapců a q' děvčat.

Poznámka. Položíme-li do vzorce (11') $p'=2$, $q'=0$, obdržíme

$$P=\frac{3(p+1)(p+2)(q+1)}{(p+q+2)(p+q+3)(p+q+4)};$$

jsou-li p, q čísla velká, blíží se tento výsledek, jak zřejmo, hodnotě

$$3\frac{p^2q}{(p+q)^3},$$

což znamená, že mají zjevy A a B tím spíše jednoduché pravděpodobnosti

$$x=\frac{p}{p+q} \quad \text{a} \quad 1-x=\frac{q}{p+q},$$

čím větší jest počet pozorování. Z toho patrno, že dostaneme ze vzorce (11') vůbec

$$P=(p'+q')_{p'}\frac{p^{p'}q^{q'}}{(p+q)^{p'+q'}},$$

známou to pravděpodobnost složitou a priori.

6. *Zvláštní případy.* α) Udál-li se zjev A jednou, jaká jest pravděpodobnost, že v dalších q' pozorováních nastane zjev opačný B?

Tu jest $p=1$, $q=0$, $p'=0$ a dle (11)

$$P=\frac{\int_0^1 x(1-x)^{q'}dx}{\int_0^1 xdx}=\frac{2}{(q'+1)(q'+2)}. \qquad (12)$$

β) Nastal-li v $n=p+q$ pozorováních p-krát zjev A a q-krát zjev B, jaká jest pravděpodobnost, že v $\overline{n+1}$ pokuse přihodí se zjev A?

Zde jest $p'=1$, $q'=0$, a tedy dle (11)

$$P=\frac{\int_0^1 x^{p+1}(1-x)^q dx}{\int_0^1 x^p(1-x)^q dx},$$

a užijeme-li vzorce (a), konečně

$$P = \frac{p+1}{p+q+2}. \tag{13}$$

Stejným způsobem sobě vedouce obdržíme pravděpodobnost, že v $\overline{n+1}$ pokuse nastane zjev B, když již nastal p-krát zjev A a q-krát zjev B v $p+q$ pozorováních. Kratčeji však dostaneme žádanou hodnotu dle známého vzorce

$$P' = 1 - P = \frac{q+1}{p+q+2}.$$

Vytáhneme-li z osudí na př. ve 22ti pokusech 14krát kuličku bílou, a tedy 8krát černou, při čemž po každém pokuse kuličku do osudí zpět vložíme, jaká bude pravděpodobnost, že v 23. pokuse vyňata bude kulička bílá.

Zde jest dle (13) žádané

$$P = \frac{14+1}{14+8+2} = \frac{5}{8};$$

pravděpodobnost, že vytáhneme kuličku černou, bude $P' = \frac{3}{8}$.

γ) Udál-li se zjev A v n pozorováních, jaká jest pravděpodobnost, že také při $n+1$ním pozorování nastane?

Tuť jest $p = n$, $q = 0$, a přímo ze vzorce (13) vyplývá

$$P = \frac{n+1}{n+2}.\text{*)} \tag{14}$$

Máme-li s *Laplace-m* za to, že historická doba činí 6000 let čili 2,191.500 dní, že tedy, pokud historické zprávy sahají, slunce též 2,191.500krát vyšlo, jaká jest pravděpodobnost, že také zítra vyjde**)?

Dle vzorce (14) obdržíme

$$P = \frac{2191501}{2191502},$$

což se jednotce velmi blíží. Můžeme tedy 1 proti 2,191.500 saditi, že příští den slunce opět vyjde, čemuž přikládáme úplnou

*) Příklad k tomuto vzorci se vztahující uvádí *Hain* ve svém „Handbuch der Statistik des österreichischen Kaiserstaates."

**) *Savič* uvádí jakožto historickou dobu 5000 let čili 1,826.213 dní, kdežto *Lacroix, Fries, Hagen* a j. shora uvedené číslo přijímají. Sluší podotknouti, že ve *Fries-ově* „Versuch einer Kritik der Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung" 1842, užito jest u výpočtu symboliky *Lacroix-ovy*.

víru, zvlášť uvedeme-li si na paměť zákony planetarného pohybu těles nebeských.

δ) Pozoroval-li se n-krát zjev A po sobě, jaká je pravděpodobnost, že také v dalších n' pozorováních týž zjev A nastane.

V případě tom položme do vzorce (11)

$$p = n,\ q = 0,\ p' = n',\ q' = 0,$$

načež bude

$$P = \frac{\int_0^1 x^{n+n'} dx}{\int_0^1 x^n dx} = \frac{n+1}{n+n'+1} = \frac{1}{1+\frac{n'}{n+1}}, \text{*)} \qquad (15)$$

kterážto pravděpodobnost konverguje k jednotce za vzrůstajícího n.

Položíme-li $n' = 1$, t. j. má-li zjev n-krát pozorovaný při novém pokuse opět nastati, nabudeme vzorce (14).

7. Jsou-li hodnoty pravděpodobnosti x obsaženy mezi $\frac{1}{2}$ (případ nejistý) a 1 (jistota) v intervallech nekonečně malých, sobě rovných i a priori stejně pravděpodobných, jest pravděpodobnost, že zjev A nastane spíše nežli B, dle vzorce (8)

$$P = \frac{\int_{\frac{1}{2}}^1 x^p(1-x)^q dx}{\int_6^1 x^p(1-x)^q dx}. \qquad (16)$$

Protivná pravděpodobnost, že spíše zjev B nastane než-li A, bude

$$P' = 1 - P = \frac{\int_0^{\frac{1}{2}} x^p(1-x)^q dx}{\int_0^1 x^p(1-x)^q dx}. \qquad (17)$$

Položíme-li do integralu v čítateli $\frac{y}{2}$ místo x a užijeme-li pak poučky binomické, obdržíme

---

*) Viz: *Laplace*, Théorie analytique des Probabilités, 1847, str. 434.

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^p (1-x)^q dx = \frac{1}{2^{p+q+1}} \int_0^1 y^p \{1+(1-y)\}^q dy$$

$$= \frac{1}{2^{p+q+1}} \Big[\int_0^1 y^p dy + q \int_0^1 y^p (1-y) dy + (q)_2 \int_0^1 y^p (1-y)^2 dy + \ldots$$

$$+ \int_0^1 y^p (1-y)^q dy \Big],$$

a pomocí vzorce (α) konečně

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^p (1-x)^q dx = \frac{1}{2^{p+q+1}} \Big\{ \frac{1}{p+1} + \frac{q}{(p+1)(p+2)}$$

$$+ \frac{q(q-1)}{(p+1)(p+2)(p+3)} + \ldots + \frac{q(q-1)\ldots 2.1}{(p+1)(p+2)\ldots(p+q+1)} \Big\}.$$

Bude tedy pravděpodobnost

$$P' = \frac{1}{2^{p+q+1}} \Big\{ 1 + \frac{p+q+1}{1} + \frac{(p+q+1)(p+q)}{1.2} + \ldots$$

$$+ \frac{(p+q+1)\ldots(p+2)}{1.2\ldots q} \Big\}$$

aneb
$$P' = \frac{1}{2^{p+q+1}} \sum_{k=0}^{k=q} (p+q+1)_k. \qquad (17')$$

Vzorcem (16) lze řešiti na př. úkol: Pozorovalo se, že u velkém počtu porodů $p+q$ počet chlapců p jest větší než-li počet děvčat q. Na základě těchto pozorování možno vypočísti pravděpodobnost P, že se chlapec spíše narodí nežli děvče. —

Zvláštní případ. Pozoruje-li se zjev A po sobě p-krát, je pravděpodobnost, že zjev A spíše nastane než-li zjev B,

$$P = \frac{\int_{\frac{1}{2}}^1 x^p dx}{\int_0^1 x^p dx} = 1 - \frac{1}{2^{p+1}}, \qquad (18)$$

kdež za vzrůstajícího p konverguje P tím více k jednotce.

Chceme-li si zjednati protivnou pravděpodobnost ze vzorce (17′), položme $q=0$, načež bude

$$P' = \frac{1}{2^{p+1}},$$

což i dle (18) zřejmo jest.