Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Ludvík Kraus

Základové náuky o funkcích racionálných

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 14 (1885), No. 2, 49--66

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/121429`

Základové náuky o funkcích racionálných.

Napsal

Ludvík Kraus.

Oddělení III.

§. 20.

O funkcích racionálných jedné proměnné.

V základech arithmetiky jsme zavedli soustavu čísel komplexních a stanovili přesně zákony úkonů pro tato čísla platící. Zda-li ale není tato soustava příliš obmezena, t. j. zda-li delším postupem v této soustavě nedojdeme k nutnosti, soustavu rozšířiti, to jest okolnost, ku které jsme posud nepřihlíželi. Úkol, nalézti takovou veličinu, jejíž druhá mocnina jest záporně reálnou, vedl nás k veličinám komplexním; nyní můžeme podobný, všeobecnější úkol stanoviti a sice tímto spůsobem.

Volíme si jistý, určitý počet veličin komplexních

$$a, b, c, \ldots,$$

jejichž hodnoty jsou přesně stanoveny, a mimo to veličinu komplexní, již nazveme x a již neurčitou ponecháme. Applikujeme-li na všechny tyto veličiny základní úkony addice, subtrakce a multiplikace v libovolném, ale určitém počtu, obdržíme výraz tvaru

$$a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m = f(x),$$

kde a_λ se skládá pouze z veličin $a, b, c, \ldots$, má tedy určitou hodnotu. Výraz, jejž označili jsme známkou $f(x)$, nazveme *celistvou, racionální funkcí proměnné* x a sice funkci m-ho stupně, jestli a_0 je od nully různé. Vezmeme-li mimo x ještě jiné neurčité veličiny y, z, nazveme pak obdržený výraz celistvou, racionální funkcí veličin $x, y, z, \ldots$ Applikujeme-li i úkon divise na ony veličiny $a, b, c, \ldots, x$, snadno nahlédneme, že pak dojdeme k výrazu tvaru

$$\frac{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_n}{c_0 x^p + c_1 x^{p-1} + \ldots + c_p},$$

jejž jmenujeme *lomenou, racionálnou funkcí proměnné* x.

Nyní si učiňme otázku: Existuje jistá, určitá veličina naší soustavy, t. j. veličina komplexní x_0 té vlastnosti, že platí

$$f(x_0) = 0.$$

Odpověď k této otázce podáme v příštím §. Nyní musíme základní vlastnosti celistvých, racionálných funkcí proměnné x odvoditi.

Platí tu především věty:

Věta a). Zmizí-li celistvá racionálná funkce $f(x)$ proměnné x stupně nanejvýš m-ho pro $m+1$ různých hodnot veličiny x, zmizí identicky, t. j. platí rovnosti

$$a_0 = a_1 = \ldots = a_m = 0.$$

Důkaz. Je-li

$$f(x_0) = 0,$$

bude tu

$$f(x) - f(x_0)$$

míti tvar

$$a_0(x^m - x_0^m) + a_1(x^{m-1} - x_0^{m-1}) + \ldots + a_{m-1}(x - x_0),$$

t. j.

$$(x - x_0) f_1(x) = f(x),$$

kde $f_1(x)$ je celistvá, racionálná funkce proměnné x stupně nižšího než m-ho. Je-li nyní

$$f(x_1) = 0$$

a x_1 od x_0 různé, tedy $(x_1 - x_0)$ od nully různé, plyne z rovnice

$$f(x_1) = (x_1 - x_0) f_1(x_1) = 0,$$

$$f_1(x_1) = 0,$$

a tedy

$$f_1(x) = (x - x_1) f_2(x),$$

kde $f_2(x)$ je stupně nižšího než $(m-1)$. Obdržíme tedy

$$f(x) = (x - x_0)(x - x_1) f_2(x),$$

a podobně, jsou-li

$$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{r-1},$$

mezi sebou různé a platí-li

$$f(x_\lambda) = 0,$$

pro každé λ, jehož hodnota je vzata z řady

$$0, 1, 2, \ldots, r-1,$$

bude tu toutéž cestou platiti, volíme-li jen r patřičně velké,

$$f(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{r-1})f_r,$$

kdež f_r značí konstantu. Zmizí-li tedy funkce $f(x)$ i pro x_r, kde x_r je od dřívějších hodnot x_λ různé, plyne z rovnice

$$f(x_r) = (x_r - x_0)(x_r - x_1)\ldots(x_r - x_{r-1})f_r$$

patrně rovnost

$$f_r = 0,$$

čímž věta je dokázána; neboť bude tu r buď stejné neb nižší než m. Z věty *a)* plyne bezprostředně

Věta b): Mají-li dvě celištvé, racionálné funkce proměnné x

$$f(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_m,$$

a

$$g(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m,$$

z nichž každá je nanejvýš stupně m-ho, pro $(m+1)$ různých hodnot veličiny x tytéž hodnoty, jsou identicky stejné, t. j. platí rovnosti

$$a_0 = b_0,\ a_1 = b_1,\ \ldots,\ a_m = b_m.$$

Důkaz plyne z té okolnosti, že funkce

$$f(x) - g(x)$$

zmizí pro $(m+1)$ různých hodnot veličiny x, tedy dle věty *a)* zmizí identicky.

Jsou-li

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m$$

určité, mezi sebou různé hodnoty, tu má funkce m-ho stupně

$$\frac{(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_m)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\ldots(x_0 - x_m)} = h_0(x)$$

(celistvá, racionálná) proměnné x tu vlastnost, že je nullou, dosadíme-li za x jednu z hodnot $x_1, x_2, \ldots, x_m$; a že nabývá hodnoty 1, když x nabude hodnoty x_0. Dle věty *b)* existuje jen jedna funkce těchto vlastností; je tedy $h_0(x)$ jedinou funkcí m-ho stupně, pro niž platí rovnosti

$$h_0(x_0) = 1,\quad h_0(x_\lambda) = 0,\quad (\lambda = 1, 2, \ldots, m).$$

Docela obdobným spůsobem zjednáme si jednu a jen jednu funkci celistvou racionálnou $h_\mu(x)$, jež vyhovuje rovnicím:

$$h_\mu(x_\mu) = 1,\quad h_\mu(x_\lambda = 0,\quad (\lambda = 1, \ldots, \mu - 1, \mu + 1, \ldots, m).$$

Patrně tu bude funkce

$$H(x) = U_0 h_0(x) + U_1 h_1(x) + U_2 h_2(x) + \ldots + U_m h_m(x),$$

nanejvýš m-ho stupně, míti tu vlastnost, nabýti určitých, jinak libovolně daných hodnot U_0, U_1, ..., U_m, dosadíme-li pro x postupně hodnoty x_0, x_1, ..., x_m; tedy všeobecně platí

$$H(x_\lambda) = U_\lambda, \quad (\lambda = 0, 1, \ldots, m).$$

Že taková funkce m-ho stupně jest jedinou, plyne z věty *b)*.

Věta c). Vždy lze nalézti jednu a jen jednu celistvou racionálnou funkci, nanejvýš m-ho stupně proměnné x, jež má tu vlastnost, že nabude pro (m + 1) různých hodnot veličiny x po každé určité, napřed dané, jinak libovolné hodnoty.

Výraz, který žádanou funkci udává, nazývá se Lagrange-ova formule. Vycházejíce z této věty dojdeme k novému pojmu následujícím spůsobem. Je-li

$$\varphi(x) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_m),$$

kde veličiny x_λ jsou zase mezi sebou různé, a volíme-li libovolně celistvou, racionálnou funkci proměnné x, vyššího než m-ho stupně, $\psi(x)$, pak nechť $\psi(x_\lambda) = v_\lambda$.

Zároveň ale dle věty *c)* můžeme si zjednat funkci nanejvýš m-ho stupně $\lambda(x)$ té vlastnosti, že platí

$$\lambda(x_\lambda) = v_\lambda = \psi(x_\lambda).$$

Máme tedy dvě různé funkce $\psi(x)$ a $\lambda(x)$, jež vzhledem k dané funkci $\varphi(x)$ jsou ekvivalentní. Jaký početní vztah mezi těmito dvěma funkcemi existuje, nalezneme snadno. Protože ale následující úvahy platí všeobecněji, volíme na místo funkce $\varphi(x)$ libovolně $f(x)$, kladouce

$$f(x) = x^{m+1} + a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m,$$

kde a_λ jsou libovolně dané veličiny, a o $f(x)$ nepředpokládáme, (k čemu bychom ani oprávněni posud nebyli), že se dá rozložiti na lineárné faktory tím spůsobem, jako $\varphi(x)$. Píšeme-li nyní $g(x)$ místo $\psi(x)$, tedy klademe-li

$$g(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_n,$$

kde b_0 je od nully různé a $n > m$, pak patrně je funkce

$$g(x) - b_0 x^{n-m-1} f(x)$$

stupně menšího než n. Podobně lze i stupeň této funkce, je-li větší než m, snížiti, připočteme-li zase funkci $f(x)$ násobenou jistou mocninou veličiny x a jistou konstantou. Tímto spůsobem lze tedy funkci $g(x)$ uvésti na tvar:

$$g(x) = f(x)h(x) + \bar{g}(x),$$

kde $h(x)$, $\bar{g}(x)$ jsou zase celistvé, racionálné funkce proměnné x, a $\bar{g}(x)$ nanejvýš stupně m-ho; tedy bude

$$\bar{g}(x) = a_{00}x^m + a_{10}x^{m-1} + a_{20}x^{m-2} + \ldots + a_{m0},$$

kde $a_{\lambda 0}$ je patrně *celistvá, racionálná funkce hodnot* $a_0, a_1, .. b_0, b_1 ..$ *Nazveme* $\bar{g}(x)$ *redukovanou formou funkce* $g(x)$ *vzhledem k funkci* $f(x)$. V prvním případě, kde jsme měli $\varphi(x)$ místo $f(x)$, vidíme okamžitě, že $\lambda(x)$ je redukovanou formou funkce $\psi(x)$.

Zmizí-li $\bar{g}(x)$ identicky t. j. je-li každá z veličin $a_{\lambda 0}$ nullou, řekneme, *že* $g(x)$ *obsahuje* $f(x)$ *jakožto dělitele anebo že* $g(x)$ *je funkcí* $f(x)$ *dělitelna.* Rozumí se samo sebou, že pak i $h(x)$ je dělitelem funkce $g(x)$.

Tímto jsme získali pojem docela obdobný pojmu dělitele u celistvých čísel. Z pojmu dělitele plyne, že je stupně stejného neb nižšího než n, když n je stupeň funkce, dělitele obsahující. Z toho plyne věta, dřívější opáčná:

Věta d). Je-li $f(x)$ *dělitelem funkce* $g(x)$, *zmizí redukovaná forma poslední funkce vzhledem k* $f(x)$ *identicky.*

Nyní nechť platí o funkcích $g(x)$, $f(x)$, jak jsme je dříve napsali, supposice, že $f(x)$ není dělitelem $g(x)$. Pak nejsou všechny hodnoty $a_{\lambda 0}$ nullami. Zjednejme si nyní i z funkcí

$$xg(x),\ x^2g(x),\ \ldots,\ x^mg(x)$$

redukované formy, jež nazveme

$$\bar{g}_1(x),\ \bar{g}_2(x),\ \ldots,\ \bar{g}_m(x)$$

a jež mějtež hodnoty

$$\bar{g}_\lambda(x) = a_{0\lambda}x^m + a_{1\lambda}x^{m-1} + a_{2\lambda}x^{m-2} + \ldots + a_{m\lambda},$$

pak tu bude všeobecně $a_{\lambda\mu}$ určitá hodnota, jež je celistvá, racionálná funkce hodnot $a_0, a_1, \ldots, b_0, b_1, \ldots$ Představme si nyní řadu nabytých rovnic

$$
\begin{aligned}
g(x) &= f(x)\,h(x) + a_{00}x^m + a_{10}\,x^{m-1} + \ldots + a_{m0},\\
x\,.\,g(x) &= f(x)h_1(x) + a_{01}x^m + a_{11}\,x^{m-1} + \ldots + a_{m1},\\
x^2\,.\,g(x) &= f(x)h_2(x) + a_{02}x^m + a_{12}\,x^{m-1} + \ldots + a_{m2},\\
&\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\
&\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\
&\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\
x^m g(x) &= f(x)h_m(x) + a_{0m}x^m + a_{1m}x^{m-1} + \ldots + a_{mm}.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Zde je ihned vidět, že lze všechny mocniny veličiny x v redukovaných formách, tedy mocniny x^m, x^{m-1}, ..., x, z těchto rovnic eliminovati; za tím účelem označíme determinant $(m+1)$-ho stupně

$$
\begin{vmatrix}
a_{00}, & a_{10}, & \ldots, & a_{m0}\\
a_{01}, & a_{11}, & \ldots, & a_{m1}\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
a_{0m}, & a_{1m}, & \ldots, & a_{mm}
\end{vmatrix}
$$

známkou Δ. Nejsme patrně oprávněni, bez důkazu předpokládati, že hodnota Δ nezmizí, i když libovolné hodnoty veličin

$$a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_m,\ b_0,\ b_1,\ \ldots,\ b_n$$

předpokládáme. Supponujme ale na okamžik, že takové specielní hodnoty napsaných veličin by existovaly, tak že Δ by bylo různé od nully. Nazveme-li pak α_{ik} adjunktu elementu a_{ik} v determinantu Δ a násobíme-li první z hořejších rovnic hodnotou α_{m0}, druhou α_{m1} atd. a sečteme, obdržíme:

$$g(x)\,(\alpha_{m0} + \alpha_{m1}x + \ldots + \alpha_{mm}x^m) = f(x)q(x) + \Delta,$$

kde

$$q(x) = \alpha_{m0}h(x) + \alpha_{m1}h_1(x) + \ldots + \alpha_{mm}h_m(x).$$

Protože Δ není nullou, tedy i všechny α_{mk} nemohou zároveň zmizeti; můžeme hodnotou Δ děliti a obdržíme rovnost

$$g(x)\,r(x) - f(x)t(x) = 1,$$

kde z celistvých, racionálných funkcí $r(x)$, $t(x)$ žádná není identicky nullou. Z této rovnice plyne, že funkce $f(x)$, $g(x)$ nemohou míti společného dělitele. Neboť kdyby $\mathfrak{g}(x)$ stupně vyššího než nulltého v x dělilo $g(x)$ i $f(x)$, dala by se levá strana poslední rovnice uvést na tvar

$$\mathfrak{g}(x)\,\mathrm{G}(x),$$

tedy by jednotka měla dělitele $\mathfrak{g}(x)$, a to není možné. Máme tedy větu:

Věta e). Nezmizí-li determinant Δ, nemohou funkce $f(x)$, $g(x)$ míti společného dělitele.

Zde, jak patrno, od dělitelů, jež jsou pouhými konstantami, abstrahujeme; věc oprávněná, které se příště vždy přidržíme. Supponujme nyní, že Δ zmizí a sice předpokládejme hned všeobecně, že i všechny subdeterminanty m-ho, $(m-1)$ho, ... až $(k+1)$-ho stupně vesměs zmizí, že ale aspoň jeden subdeterminant k-ho stupně existuje, jenž je od nully různým. K této supposici jsme oprávněni, neboť v nejkrajnějším případě může býti číslo k jednotkou, jelikož, jak jsme již na začátku řekli, všechny z veličin a_{00}, a_{10}, ..., a_{m0} zároveň zmizeti nemohou a to z té příčiny, protože případ, kde $g(x)$ obsahuje $f(x)$ jakožto dělitele, jsme vyloučili.

Volíme-li nyní v systemu (1) $(k+1)$ rovnic a násobíme-li každou jistým subdeterminantem k-ho stupně a sečteme-li, tu lze tímto spůsobem, jak známo, docíliti, že každá mocnina veličiny x v redukované formě obsahuje jakožto faktor subdeterminant $(k+1)$-ho stupně; obdržíme tedy jakožto výsledek, protože každý subdeterminant $(k+1)$-ho stupně je dle supposice nullou,

$$g(x)\,\mathfrak{g}(x) = f(x)\,s(x), \tag{2}$$

kde $\mathfrak{g}(x)$ i $s(x)$ jsou celistvé, racionálné funkce proměnné x. Dle supposice nejsou všecky subdeterminanty k-ho stupně nullami, mohli jsme tedy oněch $k+1$ rovnic zvoliti tak, že $\mathfrak{g}(x)$ *identicky nezmizí*; pak tedy i $s(x)$ *nemůže identicky zmizeti.*

Stupeň funkce $\mathfrak{g}(x)$ je nanejvýš m, tedy menší nežli stupeň funkce $f(x)$. Můžeme tedy klásti

$$f(x) = \mathfrak{g}(x)\,\mathfrak{g}_1(x) + \overline{\mathfrak{g}}(x),$$

kde $\overline{\mathfrak{g}}(x)$ je redukovanou formou funkce $f(x)$ vzhledem k funkci $\mathfrak{g}(x)$. Podobným spůsobem si zjednejme redukovanou formu funkce $g(x)$ vzhledem k funkci $s(x)$, což zde je možné, protože $g(x)$ je vyššího stupně, nežli $s(x)$, jak z hořejší rovnice (2) ihned plyne. Budiž

$$g(x) = s(x)\,\mathfrak{g}_2(x) + \overline{s}(x).$$

Dosazením obou nabytých výrazů do rovnice (2) obdržíme

$$\mathfrak{g}(x)\,s(x)\,[\mathfrak{g}_2(x) - \mathfrak{g}_1(x)] = s(x)\overline{\mathfrak{g}}(x) - \mathfrak{g}(x)\overline{s}(x).$$

Z významu funkcí $\bar{\mathfrak{g}}(x)$ a $\bar{s}(x)$ plyne, že stupeň funkce na pravé straně této rovnice je menší, nežli stupeň funkce

$$\mathfrak{g}(x) \,.\, s(x),$$

a z toho snadno dedukujeme, že faktor tohoto výrazu, tedy funkce

$$\mathfrak{g}_2(x) - \mathfrak{g}_1(x),$$

je identicky nullou. Máme tedy rovnici

$$\mathfrak{g}_1(x) = \mathfrak{g}_2(x),$$

$$s(x)\bar{\mathfrak{g}}(x) - \mathfrak{g}(x)\bar{s}(x) = 0,$$

a dosadíme-li do poslední rovnice za $\mathfrak{g}(x)$ výraz

$$\frac{f(x)\,s(x)}{g(x)},$$

jak z rovnice (2) plyne, obdržíme snadno

$$g(x)\,\bar{\mathfrak{g}}(x) - f(x)\,\bar{s}(x) = 0. \tag{3}$$

Zde nutno rozeznávati dva případy: 1. Buďto je funkce $\bar{\mathfrak{g}}(x)$, a tedy i funkce $\bar{s}(x)$ identicky nullou; pak platí

$$f(x) = \mathfrak{g}(x)\,\mathfrak{g}_1(x),$$

$$g(x) = s(x)\,\mathfrak{g}_1(x),$$

t. j. *funkce dané* $f(x)$ *a* $g(x)$ *mají společného dělitele.*

Aneb za druhé funkce $\bar{\mathfrak{g}}(x)$ identicky nezmizí. Obdržíme tedy z rovnice (2) jinou (3), kde faktory funkcí $f(x)$, $g(x)$ ve stupni klesly. V tomto případě patrno, že obdobným spůsobem bychom si mohli zjednati z rovnice (3) rovnici další, v níž zase by faktory funkcí $f(x)$, $g(x)$ ve stupni klesly. Toto snižování stupňů dotčených faktorů se může díti jen do jistých mezí. Neboť kdyby faktor funkce $g(x)$ se stal konečně konstantou, jež by nebyla nullou, tu bychom mohli souditi, že $f(x)$ je dělitelem funkce $g(x)$, případ to, jejž jsme již z počátku vyloučili. Jsme tedy k následující úvaze oprávněni: *Postupem, jakým jsme z rovnice (2) došli k rovnici (3), dojdeme dalším applikováním konečně k rovnici*

$$g(x)\,\varphi(x) - f(x)\,\gamma(x) = 0$$

té vlastnosti, že $\varphi(x)$ *identicky nezmizí, je menšího než m-ho stupně a vyššího než nullténo stupně,* a zároveň není možné obdržeti rovnici jinou tohoto tvaru, v které by faktor funkce $g(x)$ byl nižšího stupně, nežli je stupeň funkce $\varphi(x)$. Pak plyne okamžitě

$$f(x) = \varphi(x)\, d(x),$$
$$g(x) = \gamma(x) d(x). \tag{4}$$

Důkaz je tentýž, jaký jsme u rovnice (2) podali, předpokládajíce tenkrát, že redukovaná forma $\bar{\mathfrak{g}}\,(x)$ identicky zmizí. Podobně i zde *musíme* předpokládati, že redukovaná forma funkce $f(x)$ vzhledem k $\varphi(x)$ identicky zmizí; jinak by bylo možné, odvoditi jinou rovnici, mající na místě $\varphi(x)$ funkci nižšího stupně, a to by bylo proti supposici. Z toho a z rovnic (4) plyne dále, že funkce $\varphi(x)$, $\gamma(x)$ nemají společného dělitele; neboť kdyby platilo

$$\varphi(x) = \varphi_1(x)\, d_1(x)\,,$$
$$\gamma(x) = \gamma_1(x)\, d_1(x)\,,$$

platila by i rovnice

$$g(x)\, \varphi_1(x) - f(x)\, \gamma_1(x) = 0$$

proti supposici.

Řekneme v tomto případě, že $d(x)$ je největším společným dělitelem funkcí $f(x)$, $g(x)$.

Máme tedy výsledek:

Věta f). Zmizí-li determinant $\varDelta$, mají funkce $f(x)$, $g(x)$ společného dělitele.

Dejme tomu, že stupeň funkce $d(x)$ je $m - l$, kde l je jedno z čísel

$$0,\ 1,\ \ldots,\ m - 1.$$

První rovnici v systemu (1) můžeme psáti ve tvaru

$$d(x)\,[\gamma(x) - \varphi(x)\, h(x)] = a_{00}x^m + a_{10}x^{m-1} + \ldots + a_{m0},$$

z kterého ihned plyne, že redukovaná forma na pravé straně rovnice obsahuje $d(x)$ jakožto dělitele. Můžeme psáti

$$a_{00}x^m + a_{10}x^{m-1} + \ldots + a_{m0} = d(x)\,(c_{00}x^l + c_{10}x^{l-1} + \ldots + c_{l0}),$$

a tedy i

$$\gamma(x) = \varphi(x)\, h(x) + c_{00}x^l + c_{10}x^{l-1} + \ldots + c_{l0},$$

a podobně

$$
\begin{aligned}
x\gamma(x) &= \varphi(x)\,h_1(x) + c_{01}x^l + c_{11}x^{l-1} + \ldots + c_{l1},\\
x^2\gamma(x) &= \varphi(x)\,h_2(x) + c_{02}x^l + c_{12}x^{l-1} + \ldots + c_{l2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x^l\gamma(x) &= \varphi(x)\,h_l(x) + c_{0l}x^l + c_{1l}x^{l-1} + \ldots + c_{ll},
\end{aligned}
$$

kde jsme pouze prvních $(l+1)$ rovnic ze systemu (1), udaným spůsobem je změnivše, napsali.

Napsaný system rovnic je docela obdobný systemu (1).

Můžeme tedy i zde souditi: Zmizí-li determinant $(l+1)$-ho stupně

$$
\begin{vmatrix}
c_{00}, & c_{10}, & \ldots, & c_{l0}\\
c_{01}, & c_{11}, & \ldots, & c_{l1}\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
c_{0l}, & c_{1l}, & \ldots, & c_{ll}
\end{vmatrix} = \delta,
$$

mají (Věta *f*) funkce $\gamma(x)$, $\varphi(x)$ společného dělitele.

Dříve jsme ale právě ukázali, že tyto funkce nemají společného dělitele; tedy nemůže býti δ nullou. Applikujeme-li onu dedukci, jíž jsme užili k důkazu věty *e)*, obdržíme ihned rovnici

$$\gamma(x)\,\gamma'(x) - \varphi(x)\,\varphi'(x) = 1,$$

kde $\gamma'(x)$ je celistvou, racionálnou funkcí nanejvýš l-ho stupně. Násobíme-li nyní tuto rovnici funkcí $d(x)$, obdržíme

$$g(x)\,\gamma'(x) - f(x)\varphi'(x) = d(x).$$

Položme nyní

$$d(x) = d_0\,x^{m-l} + d_1\,x^{m-l-1} + \ldots + d_{m-l},$$

kde d_0 je od nully různé. Pak tu platí

$$
\begin{aligned}
a_{00} &= d_0\,.\,c_{00}\\
a_{10} &= d_0\,.\,c_{10} + d_1 c_{00}\\
a_{20} &= d_0\,.\,c_{20} + d_1 c_{10} + d_3 c_{00}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_{l0} &= d_0\,c_{l0} + d_1 c_{l-1,\,0} + \ldots,
\end{aligned}
$$

kde v posledním řádku každý člen má tvar

$$d_k\, c_{l-k,\,0}\,.$$

Poslední člen v tomto řádku bude ten, u něhož buď první faktor d_k dostoupí nejkrajnější hodnoty d_{m-l} aneb druhý faktor $c_{l-k,\,0}$ nabude obdobně hodnoty nejkrajnější t. j. c_{00}.

Tímtéž spůsobem mohli bychom i hodnoty veličin a_λ stanoviti vzhledem k hodnotám c_{k1}; bude tu obdobně

$$\begin{aligned} a_{01} &= d_0 c_{01} \\ a_{11} &= d_0 c_{11} + d_1 c_{01} \\ &\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots \\ a_{l1} &= d_0 c_{l1} + d_1 c_{l-1,\,1} + \ldots \end{aligned}$$

a tak i pro ostatní veličiny a_{λ_2}, a_{λ_3}, ... až a_{λ_l}.

Z těchto relac plyne ale důležitá konsekvence. Násobme v determinantu δ elementy posledního sloupce hodnotou d_0 a připojme pak k tomuto sloupci předposlední sloupec násobený hodnotou d_1, předpředposlední sloupec násobený hodnotou d_2, atd., jdouce tak daleko, jak možná, t. j. tak daleko, že buď jsme takto všechny sloupce až k prvnímu vyčerpali, anebo v řadě násobků d_0, d_2, ... až ku d_{m-l} došli. Patrně tu budou elementy posledního sloupce veličiny a_{lk}, tedy

$$\delta d_0 = \begin{vmatrix} c_{00}, & c_{10}, & \ldots, & c_{l-1,\,0}, & a_{l0} \\ c_{01}, & c_{11}, & \ldots, & c_{l-1,\,1}, & a_{l1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{0l}, & c_{1l}, & \ldots, & c_{l-1,\,l}, & a_{ll} \end{vmatrix}.$$

Tento determinant obdobně možná změniti. Násobme elementy předposledního sloupce hodnotou d_0 a připočtěme pak k tomuto předcházející sloupec, násobený d_1 atd., tu obdržíme

$$\delta d_0^2 = \begin{vmatrix} c_{00}, & c_{10}, & \ldots, & a_{l-1,\,0}, & a_{l0} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{0l}, & c_{1l}, & \ldots, & a_{l-1,\,1}, & a_{ll} \end{vmatrix}.$$

Takto pokračujíce dojdeme konečně k rovnosti

$$\delta d_0^{l+1} = \begin{vmatrix} a_{00}, & a_{10}, & \ldots, & a_{l0} \\ a_{01}, & a_{11}, & \ldots, & a_{l1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{0l}, & a_{1l}, & \ldots, & a_{ll} \end{vmatrix}.$$

Protože ani δ ani d_0 není nullou, nemůže tento subdeterminant $(l+1)^{\text{ho}}$ stupně determinantu Δ zmizeti. Srovnáme-li tento výsledek se supposicí, shledáme, že musí platiti

$$1 + l \leqq k.$$

Jestliže nyní dokážeme, že každý subdeterminant Δ stupně vyššího než $(1+l)^{\text{ho}}$ zmizí, můžeme ihned dále souditi, že $1+l$ musí býti stejné s k, tedy že platí

$$1 + l = k.$$

Za tím účelem položme všeobecně, pro každé $\lambda \leqq m$, rovnost

$$d(x)\left[c_{0\lambda} x^l + c_{1\lambda} x_{l-1} + \ldots + c_{l\lambda}\right] = a_{0\lambda} x^m + a_{1\lambda} x^{m-1} + \ldots + a_{m\lambda},$$

patrně platící i když λ je větší než l. Volme nyní libovolný subdeterminant ε stupně $(l+2)^{\text{ho}}$ v determinantu Δ. Podobně, jako jsme dříve rozložili veličiny $a_{00}, a_{01}, \ldots, a_{10}, a_{11}, \ldots$ atd., můžeme i nyní tak učiniti všeobecně. Budou tedy elementy prvního řádku determinantu ε míti následující tvar; první element je

$$e_{00} c_{0\lambda} + e_{01} c_{1\lambda} + e_{02} c_{2\lambda} + \ldots + e_{0l} c_{l\lambda},$$

druhý element bude míti tvar

$$e_{10} c_{0\lambda} + e_{11} c_{1\lambda} + \ldots + e_{1l} c_{l\lambda}$$

a podobně následující, tak že poslední bude

$$e_{l+1,0} c_{0\lambda} + e_{l+1,1} c_{1\lambda} + \ldots + e_{l+1,l} c_{l\lambda}.$$

Veličiny $e_{\lambda k}$ jsou buď přímo nully, buď hodnoty d_ν. λ je jisté číslo, menší neb stejné s m. Tímtéž spůsobem se skládají ale i elementy druhého řádku atd. s jediným pouze rozdílem, že index λ obdrží vždy jiné a jiné hodnoty. Tvar determinantu ε známe touto úvahou tedy úplně; a tento postačí, abychom mohli souditi, že ε je nullou. Třeba pouze zjednati si $(l+2)$ hodnot

$$m_0, m_1, m_2, \ldots, m_{l+1},$$

jež vesměs nezmizí a mají zároveň tu vlastnost, že platí $(l+1)$ rovnic:

$$\begin{array}{l} m_0 e_{00} + m_1 e_{10} + m_2 e_{20} + \ldots + m_{l+1} e_{l+1,\,0} = 0, \\ m_0 e_{01} + m_1 e_{11} + m_2 e_{21} + \ldots + m_{l+1} e_{l+1,\,1} = 0, \\ m_0 e_{02} + m_1 e_{12} + m_2 e_{22} + \ldots + m_{l+1} e_{l+1,\,2} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ m_0 e_{0l} + m_1 e_{1l} + m_2 e_{2l} + \ldots + m_{l+1} e_{l+1,\,l} = 0. \end{array}$$

Jak známo, je vždy možné, ať veličiny $e_{\lambda\mu}$ mají jakékoliv určité hodnoty, nalézti system hodnot

$$m_0, m_1, \ldots, m_{l+1}$$

udaných vlastností, z nichž tedy alespoň jedna, řekneme m_ν, není nullou. Násobíme-li nyní $(\nu+1)^{\text{ní}}$ sloupec determinantu ε hodnotou m_ν a přičteme-li k tomuto pak první sloupec násobený m_0, druhý sloupec násobený m_1 atd., až poslední sloupec násobený m_{l+1}, bude tu změněný takto determinant míti v $(\nu+1)^{\text{ním}}$ sloupci samé nully; tedy zmizí εm_ν a protože m_ν není nullou, platí

$$\varepsilon = 0.$$

Co jsme zde dokázali pro determinant $(\lambda+2)^{\text{ho}}$ stupně, platí tím více pro determinant vyššího stupně.

Konečný výsledek je tedy následující:

Věta g). Zmizí-li determinant Δ jakož i všechny subdeterminanty m^{ho}, $(m-1)^{\text{ho}}$ ... až $(k+1)^{\text{ho}}$ stupně, nezmizí-li však všechny subdeterminanty k^{ho} stupně, mají funkce $g(x)$, $f(x)$ společného dělitele $d(x)$ stupně $(m+1-k)^{\text{ho}}$ té vlastnosti, že platí $f(x) = d(x)\,\varphi(x)$, $g(x) = d(x)\,\gamma(x)$, a $\varphi(x)$, $\gamma(x)$ nemají více společného dělitele.

Dělitele $d(x)$ lze přímo ze systemu 1) následujícím spůsobem obdržeti, Víme, že determinant δ je od nully různým; platilo ale

$$\begin{vmatrix} a_{00}, & a_{10}, & \ldots, & a_{k-1,0} \\ a_{01}, & a_{11}, & \ldots, & a_{k-1,1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{0,k-1}, & a_{1,k-1}, & \ldots, & a_{k-1,k-1} \end{vmatrix} = \delta d_0^k.$$

Jmenujeme-li $\beta_{\lambda\mu}$ adjunktu elementu $\alpha_{\lambda\mu}$ v napsaném determinantu a násobíme-li první rovnici v systemu (1) hodnotou $\beta_{k-1,0}$, druhou pak hodnotou $\beta_{k-1,1}$ atd. až k-tou rovnici hodnotou $\beta_{k-1,k-1}$ a sečteme-li těchto k rovnic nových, obdržíme na pravé straně ze součtu redukovaných forem celistvou funkci, v níž veličiny

$$x^m, x^{m-1}, \ldots, x^{m+2-k}$$

jsou násobeny nullami; veličina x^{m+1-k} ale jest násobena hodnotou δd_0^k od nully různou.

Obdržíme tedy ze součtu redukovaných forem funkci celistvou racionálnou stupně $(m+1-k)$-ho, jež musí býti dělitelna funkcí $d(x)$, jelikož každá redukovaná forma obsahuje $d(x)$ jakožto dělitele.

Z toho plyne, že nabytá funkce je přímo

$$\delta d_0^{k-1} d(x).$$

Platí tu rovnost

$$\delta d_0^{k-1} d(x) = \delta d_0^k x^{m+1-k} + \delta d_0^{k-1} d_1 x^{m-k} + \ldots + \delta d_0^{k-1} d_{m+1-k},$$

označíme funkci na pravé straně jednodušeji

$$\alpha_0 x^{m+1-k} + \alpha_1 x^{m-k} + \ldots + \alpha_{m+1-k}.$$

Hodnoty α_λ jsou patrně subdeterminanty v determinantu Δ; a protože každá hodnota $a_{\lambda\mu}$ je celistvou racionálnou funkcí hodnot

$$a_0, a_1, \ldots, b_0, b_1, \ldots,$$

budou tedy i hodnoty

$$\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{m+1-k}$$

celistvými, racionálnými funkcemi veličin a_λ, b_μ.

Máme tedy větu

Věta h). Jest vždy možné uvésti největšího společného dělitele dvou funkcí

$$f(x) = x^{m+1} + a_0 x^m + \ldots + a_m,$$

a

$$g(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_n,$$

kde $b_0 \gtrless 0$ *a* $n > m$, *na tvar*

$$\alpha_0 x^{m+1-k} + \alpha_1 x^{m-k} + \ldots + \alpha_{m+1-k},$$

kde hodnoty α_λ *jsou celistvými, racionalnými funkcemi veličin*

$$a_0, a_1, \ldots, a_m, b_0, b_1, \ldots, b_n.$$

Pro dělitele $d(x)$ platily rovnosti:

$$f(x) = d(x)\,\varphi(x),$$
$$g(x) = d(x)\,\gamma(x),$$

kde funkce $\varphi(x)$, $\gamma(x)$ společného dělitele neměly.

Z toho plyne, že jsme oprávněni u daných funkcí $f(x)$, $g(x)$, když hodnoty

$$a_0, a_1, \ldots, a_m, b_0, b_1, \ldots, b_n$$

necháme neurčitými, předpokládati, že Δ nezmizí a že se stane nullou, tedy jen pro jisté specialné hodnoty veličin a_λ, b_μ.

Příklad: Budiž

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 4,$$

a

$$g(x) = x^4 - x^2 - 4x + a.$$

Bude tu

$$g(x) = f(x)(x - 3) + \{4x^2 + 4x + a + 12\},$$
$$x \,.\, g(x) = f(x)(x^2 - 3x + 4) + \{-8x^2 + (a - 4)x - 16\},$$
$$x^2 \,.\, g(x) = f(x)(x^3 - 3x^3 + 4x - 8) + \{(a + 20)x^2 + 16x + 32\}.$$

Co se tkne početní stránky, zajisté důležité, chceme-li co nejrychleji poslední 3 rovnice obdržeti, budiž jednoduchý obrat zde vytknut, jakým z první oněch tří rovnic ihned obdržíme ostatní. Násobme první rovnici veličinou x, obdržíme

$$xg(x) = f(x)(x^2 - 3x) + x\{4x^2 + 4x + a + 12\}.$$

Tedy jest redukovaná forma v druhé rovnici, t. j. funkce

$$-8x^2 + (a - 4)x - 16,$$

redukovanou formou funkce

$$x\{4x^2 + 4x + a + 12\},$$

vzhledem k funkci $f(x)$. Třeba jen k poslední napsané funkci přidati $-4f(x)$, abychom obdrželi redukovanou formu v druhé rovnici, a podobně, přidáme-li ku

$$x\{-8x^2+(a-4)x-16\}$$

hodnotu $8f(x)$, obdržíme redukovanou formu v třetí rovnici.

Determinant $\varDelta$ zní

$$\varDelta=\begin{vmatrix} 4 & 4 & a+12 \\ -8 & a-4 & -16 \\ a+20, & 16, & 32 \end{vmatrix},$$

anebo, klademe-li

$$a=4b,$$

bude tu

$$\varDelta=-64.\begin{vmatrix} 1 & 1 & b+3 \\ 2 & 1-b & 4 \\ b+5, & 4, & 8 \end{vmatrix},$$

$$\varDelta=-64(b+1)^2(b+5).$$

Determinant $\varDelta$ zmizí tedy jen tenkráte, když b je buď -1 aneb -5, aneb když veličina a má buď hodnotu -4 aneb -20.

V prvním případě, když platí

$$a=-4,$$

zní dané funkce

$$f(x)=x^3+3x^2+4x+4,$$
$$g(x)=x^4-x^2-4x-4,$$

a determinant $\varDelta$ má tvar

$$\begin{vmatrix} 4 & 4 & 8 \\ -8 & -8 & -16 \\ 16 & 16 & 32 \end{vmatrix}.$$

Patrně zde zmizí nejenom $\varDelta$, nýbrž i každý subdeterminant druhého stupně; platí tedy v tom případě

$$k=1,\quad m=2,$$

a mají tedy shora napsané dvě funkce společného největšího dělitele stupně druhého. Podle toho, co jsme o spůsobu pravili, jakým lze funkci $d(x)$ přímo z redukovaných forem nabýti, plyne v našem specialném případě, že redukovaná forma funkce $g(x)$ vzhledem k $f(x)$ t. j. funkce

$$4x^2 + 4x + 8 = 4(x^2 + x + 2)$$

je největším společným dělitelem funkcí $f(x)$, $g(x)$. V druhém případě, když platí

$$a = -20,$$

snadno je viděti, že zmizí sice $\varDelta$, ne ale všecky subdeterminanty druhého stupně. Existuje pro funkce:

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 4,$$
$$g(x) = x^4 - x^2 - 4x - 20$$

největší společný dělitel prvního stupně. Protože tu redukovaná forma funkce

$$x^2 \,.\, g(x)$$

vzhledem k $f(x)$ v tomto případu je

$$16x + 32,$$

zní tedy největší společný dělitel shora napsaných dvou funkcí

$$x + 2.$$

Těmito dvěma případy jsou ale všechny možné případy vyčerpány, v nichž původně dané funkce pro speciálné hodnoty veličiny a mají společného dělitele. Platí

$$f(x) = x^2 + 3x^2 + 4x + 4 = (x + 2)(x^2 + x + 2).$$

Z uvedených vět o děliteli dvou funkcí plynou následující veledůležité konsekvence.

Věta I. Je-li součin

$$g(x)\,h(x)$$

dělitelným funkcí $f(x)$ a nemají-li funkce

$$g(x),\ f(x)$$

společného dělitele, pak je funkce $h(x)$ dělitelna funkcí $f(x)$.

Důkaz. Dle supposice nemají funkce

$$g(x), \quad f(x)$$

společného dělitele; platí tedy

$$g(x)\,g_1(x) - f(x)\,f_1(x) = 1,$$

kde $g_1(x)$, $f_1(x)$ jsou zase celistvé, racionalné funkce veličiny x. Platí tedy i dále

$$g(x)\,h(x)\,g_1(x) - f(x)\,h(x)\,f_1(x) = h(x),$$

kde funkce na levé straně této rovnice patrně obsahuje $f(x)$ jakožto dělitele; tedy musí i funkce na pravé straně t. j. $h(x)$ býti dělitelnou funkcí $f(x)$.

Věta II.

Nemají-li funkce

$$f(x), \quad g(x)$$

společného dělitele, má každá funkce $h(x)$, jež je dělitelna funkcemi $f(x)$ i $g(x)$, tvar

$$h(x) = f(x)\,g(x)\,r(x),$$

kde $r(x)$ je celistvá, racionalní funkce veličiny x.

Důkaz. Dle supposice platí

$$h(x) = g(x)\,m(x)$$

a dle věty I.

$$m(x) = f(x)\,r(x),$$

tedy

$$h(x) = f(x)\,g(x)\,r(x).$$

Věta III.

Mají-li funkce

$$f(x), \quad g(x)$$

největšího společného dělitele $k(x)$, tak že platí

$$f(x) = k(x)\,f_1(x),$$
$$g(x) = k(x)\,g_1(x),$$

kde $f_1(x)$, $g_1(x)$ společného dělitele nemají, bude míti každá funkce $h(x)$, jež je dělitelna funkcemi $f(x)$ i $g(x)$, tvar

$$h(x) = f_1(x)\,g_1(x)\,k(x)\,r(x),$$

kde $r(x)$ je celistvá, racionálná funkce veličiny α.

Důkaz. Dle supposice platí

$$h(x) = g(x)\,m(x) = g_1(x)\,k(x)\,m(x)$$

a dle věty I.

$$m(x) = f_1(x)\,r(x),$$

tedy

$$h(x) = f_1(x)\,g_1(x)\,k(x)\,r(x).$$