Řehořovský těšil se na svůj návrat do Prahy již po leta, ano možno říci, již při svém odchodu do Brna, a za každou cenu chtěl jej v prázdninách roku 1911 uskutečniti i tenkrát, kdyby jej byla choroba k tomu nenutila; není pochyby o tom, že by byl pak ochotně zase do výboru Jednoty vstoupil a jí i poslední svou činnost nezištně zasvětil a že by dovedl opět ideální cíle Jednoty podporovati a znovu vzpružiti a vznítiti, přes to aneb právě proto, že doba a poměry v posledních letech přivodily v Jednotě hlavně sesílení činnosti obchodní, tak že ideální cíle ty byly bohužel poněkud odloženy pro budoucnost.

Toho všeho nebylo Řehořovskému přáno; padesátileté trvání Jednoty, jež připadá právě na rok 1912, jehož oslava by vzbudila v něm alespoň radostný ohlas, když i by sám se jí v chorobě své osobně súčastniti nemohl, se také již nedočkal. A tak to, co v tomto směru mohl a přál si vykonati, zůstává jako odkaz pro jeho nástupce a následovníky.

V srpnu r. 1912.

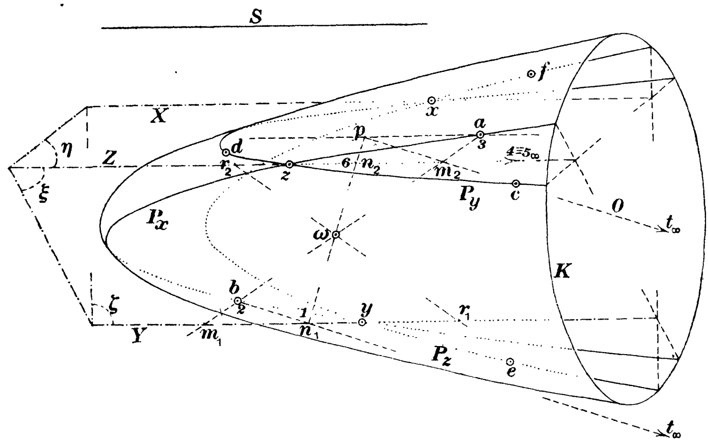
Některé konstrukce ploch druhého stupně.

Podává prof. **Vinc. Jarolimek.**

I.

Paraboloid daný šesti body a směrem osy.

Body a, b, c, d, e, f (obr. 1.) buďtež dány tak, aby žádné čtyři neležely v jedné rovině, v čemž zahrnuta jest zároveň podmínka, aby žádné tři body neležely na téže přímce; směr osy dán buď přímkou S. Tento směr určuje dotyčný bod paraboloidu π na rovině úběžné; tečná rovina s bodem dotyčným stanoví tři podmínky, tak že daných celkem devět podmínek určuje plochu druhého stupně s dostatek. Proložme přímkou $\overline{ab}$ rovinu $\xi \parallel S$, přímkou $\overline{cd}$ rovinu $\eta \parallel S$, přímkou $\overline{ef}$ rovinu $\zeta \parallel S$, a stanovme průsečnice $\overline{\eta\zeta} \equiv X$, $\overline{\xi\zeta} \equiv Y$, $\overline{\xi\eta} \equiv Z$. Tyto tři roviny protnou paraboloid v parabolách P_x, P_y, P_z, jichž osy jsou vesměs $\parallel S$; P_x procházeti bude body a, b, P_y body c, d, P_z body e, f. Paraboly P_x, P_y protnou se na přímce Z v určitém bodě z (dotýkajíce se mimo to v úběžném bodě přímky Z), paraboly P_x, P_z na přímce Y v bodě y, paraboly P_y, P_z na přímce X v bodě x. Těchto tří parabol, jimiž by zajisté úloha byla v podstatě rozřešena, přímo narýsovati nelze, ježto body x, y, z jsou neznámy; na každé parabole známe toliko dva



Obr. 1.

body a směr osy. Nicméně jsou paraboly tyto určeny s dostatek další podmínkou, že každé dvě protínati se musí na určité z přímek X, Y, Z. Konstrukce těchto průsečíků x, y, z plyne z této úvahy:

V rovině ξ jest dán body a, b a směrem osy S *svazek parabol*, jehož základní body jsou a, b, $u_\infty \equiv v_\infty$ na S v nekonečnu; parabola P_x je ve svazku tom obsažena. Svazek vytíná z přímek Y, Z, ježto základním bodem u_∞ procházejí, dvě řady projektivné; body homologické jsou ony, ve kterých kterákoli parabola svazku přímky Y, Z seče. Označme tyto řady $Y_1 \barwedge Z_2$. Obdobně stanoví řada Y_1 prostřednictvím svazku parabol v rovině ζ, jež procházejíce body e, f mají osy $\parallel S$, na přímce X řadu $X_1 \barwedge Y_1$, a řada Z_2 prostřednictvím svazku parabol v rovině η, jež probíhajíce body c, d mají osy $\parallel S$, na přímce X řadu $X_2 \barwedge Z_2$. Soumístné řady $X_1 \barwedge X_2$ jsou tudíž také projektivné, a splývají-li dva homologické body jejich (bod samodružný), stane se to patrně v bodě x, v němž paraboly P_y a P_z

se protínají. Projektivné řady X_1, X_2 určíme třemi družinami. Za tím účelem netřeba parabol řečených svazků skutečně rýsovat, nýbrž strojíme jednotlivé družiny takto: Svazek parabol (abu_∞) v rovině ξ obsahuje jednu křivku zvrhlou ve dvě přímky, totiž $\overline{ab}$ a přímku úběžnou; průsečíky $(\overline{ab}, Y) \equiv m_1$, $(\overline{ab}, Z) \equiv m_2$ dají tedy jednu družinu řad $Y_1 \barwedge Z_2$. Dále vytkněme kdekoli na přímce Y bod n_1 a stanovme k němu homologický bod n_2 v řadě Z_2 jakožto průsečík přímky Z s parabolou, která určena jest body a, b, n_1 a směrem osy S, čili body $u_\infty \equiv v_\infty$ *). Bod n_2 sestrojíme větou Paskalovou. Označme $n_1 \equiv 1$, $b \equiv 2$, $a \equiv 3$, $u_\infty \equiv v_\infty \equiv 4 \equiv 5$, a stanovme bod $n_2 \equiv 6$ na přímce $\overline{56} \equiv Z$. Spojnice $\overline{12}$, $\overline{45}$ protnou se v bodě t_∞, spojnice $\overline{23}$, $\overline{56}$ v bodě m_2; spojnice $\overline{m_2 t_\infty} \parallel \overline{12}$ dá přímku Paskalovu O, na níž se protnou přímky $\overline{34}$, $\overline{61}$: přímka $\overline{34} \parallel S$ seče O v bodě p a spojnice $\overline{1p}$ přímku Z v bodě $6 \equiv n_2$. Sestrojme ještě třetí družinu r_1, r_2 pomocí středu podobnosti $(\overline{ab}, \overline{n_1 n_2}) \equiv \omega$. Řady $Y_1 \barwedge Z_2$ jsou určeny družinami $m_1 m_2$, $n_1 n_2$, $r_1 r_2$. Nyní sestrojme týmž způsobem v rovině ζ k bodům m_1, n_1, r_1 homologické μ_1, ν_1, ϱ_1 v řadě X_1 pomocí svazku parabol $(e, f, u_\infty, v_\infty)$, a v rovině η k bodům m_2, n_2, r_2 homologické μ_2, ν_2, ϱ_2 v řadě X_2 pomocí svazku parabol $(c, d, u_\infty, v_\infty)$. Soumístné řady projektivné $X(\mu_1, \nu_1, \varrho_1 \ldots) \barwedge X(\mu_2, \nu_2, \varrho_2 \ldots)$ mají dva body samodružné x, x', reálné nebo imaginárné, tak že daná úloha je dvojznačná. Je-li bod x jakožto průsečík parabol P_y, P_z sestrojen, jest další konstrukce paraboloidu π již snadna. Parabola P_y sestrojí se v rovině η z bodů c, d, x a směru osy S, parabola P_z v rovině ζ z bodů e, f, x a směru osy S, parabola P_x v rovině ξ z bodův a, b, $z \equiv (P_y Z)$ a směru osy S. Libovolná rovina pak $\varepsilon \perp S$ protne paraboly ty v šesti bodech, jimiž proloží se kuželosečka K, ve které ε paraboloid seče; středem jejím jde osa paraboloidu $\parallel S$ atd. Dle toho, je-li K ellipsa nebo hyperbola, jest také paraboloid π elliptický nebo hyperbolický. Druhý samodružný bod x' dá druhý výsledek π'; jsou-li však body x, x' pomyslné, jsou také oba paraboloidy imaginárné.

---

*) Řady $Y_1 \barwedge Z_2$ jsou *perspektivné*, majíce bod samodružný $u_\infty \equiv v_\infty$, a mimo to *podobné*, protože $Y \parallel Z$ (střed podobnosti ω).

II.

Hyperboloid daný čtyřmi body a reálnou křivkou v nekonečnu.

Dané body a, b, c, d ať neleží v jedné rovině (sic jinak by řešení bylo obecně nemožné); křivka úběžná K_∞ buď dána reálnou kuželovou plochou druhého stupně $\varkappa$ o středu s, s níž tedy asymptotická kuželová plocha žádaného hyperboloidu φ bude homothetická i shodná. Rovina položená třemi z daných bodů, na př. $(abc) \equiv \sigma$ protne hyperboloid φ v určité kuželosečce L, která bude homothetická s pronikem M roviny σ a kužele $\varkappa$. Protne-li rovina $\tau \| \sigma$ položená bodem s plochu kuželovou $\varkappa$ ve dvou reálných přímkách A, B, sestrojíme hyperbolu L z daných bodův a, b, c a *směrů* asymptot A, B způsobem z geometrie polohy známým. Opakujeme-li tuto konstrukci ještě s rovinami (abd), (acd), a obdržíme-li zase hyperboly, bude další konstrukce plochy druhého stupně φ ze tří povrchových kuželoseček, z nichž každé dvě se protínají ve dvou bodech (v našem případě reálných), již snadna*).

Poněkud složitější nastane případ, seče-li některá z těchto rovin křivku K_∞ v bodech pomyslných. Protíná-li na př. rovina $s\tau \| \sigma$ plochu kuželovou $\varkappa$ v přímkách imaginárných, jsou proniky M, L roviny σ s plochami $\varkappa$ a φ homothetické *ellipsy*. Ellipsu M jakožto pronik roviny $(abc) \equiv \sigma$ s daným kuželem $\varkappa$ narýsujeme, načež úlohu: *v rovině σ sestrojiti ellipsu L, která procházejíc danými body a, b, c, je homothetická s jinou danou ellipsou M* (obr. 2.) v téže rovině ležící, řešíme takto:

Ellipsy L, M indukují na úběžné přímce U_∞ své roviny σ touž involuci harmonických pólů; stačí tedy vytknouti dvě družiny této involuce elliptické I (dvěma dvojinami sdružených průměrů ellipsy M), imaginárnými pak samodružnými body involuce I a body a, b, c proložiti ellipsu L**). Avšak příslušnou konstrukci lze vyvoditi i methodou elementárnou:

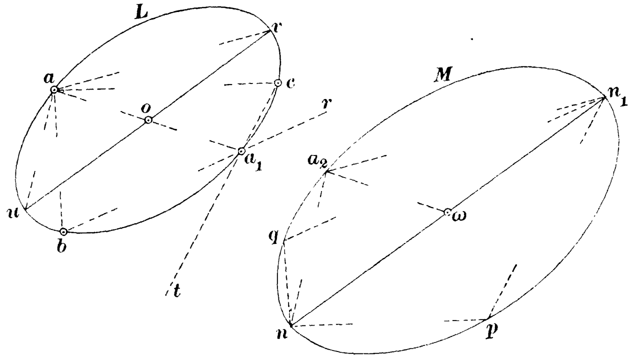
Homologické sdružené průměry ellips L, M jsou navzájem rovnoběžny. Vytkněme v M kterýkoli průměr $\overline{nn_1}$, veďme $\overline{nq} \| \overline{ba}$, spojme $\overline{qn_1}$, $\overline{br} \| \overline{qn_1}$; sdružené tětivy $\overline{qn}$, $\overline{qn_1}$ mají směry dvou sdružených průměrů křivky M, mají tedy $\overline{ba}$, $\overline{br}$

---

*) Jarolímek, Geometrie polohy II., pag. 63., odst. 154.

**) Jarolímek, Geometrie polohy II., pag. 11.

v křivce L touž vlastnost, t. j. $\overline{br}$ bude procházeti bodem a_1, který na L je diametrálným ku a. Dále učiňme $\overline{np} \parallel \overline{ac}$, spojme $\overline{pn_1}$ a veďme $\overline{ct} \parallel \overline{n_1p}$. Průsečík $(\overline{br}, \overline{ct})$ dá bod a_1, půlící bod



Obr. 2.

průměru $\overline{aa_1}$ bude středem o křivky L. Je-li $\overline{nn_1}$ jedna osa ellipsy M, učiňme $\overline{uov} \parallel \overline{nn_1}$, $\overline{\omega a_2} \parallel \overline{oa}$, $\overline{au} \parallel \overline{a_2n}$, $\overline{av} \parallel \overline{a_2n_1}$; $\overline{uv}$ jest jedna osa elllipsy L a obdobně omezíme i osu druhou.

III.

Ellipsoid daný čtyřmi body a imaginárnou křivkou úběžnou.

Dané body a, b, c, d ať neleží v jedné rovině; úběžná kuželosečka K_∞ může býti dána buď α) ellipsoidem ψ, t. j. úběžnou křivkou K_∞ jeho imaginárného asymptotického kužele; nebo β) direkční křivkou K_∞ polárné soustavy, kterou na rovině úběžné vytíná daný prostorový svazek polárný Σ, jehož žádná polára nezapadá do příslušné polárné roviny.

V případě α) lze úlohu také formulovati takto:

Danými čtyřmi body proložiti jest ellipsoid ε tak, aby byl homothetický s daným ellipsoidem ψ.

Řešení srovnává se s úlohou II. Rovina $(abc) \equiv \sigma$ protne ellipsoid ψ v určité ellipse M. Je-li tato reáluá, proložme body a, b, c ellipsu L homothetickou ku M; a je-li M imaginárná, nahraďme ji reálným pronikem M' ellipsoidu ψ s rovinou $\sigma' \parallel \sigma$, odloženou středem ellipsoidu ψ. Obdobně opatříme si v rovinách

(abd), (acd) další dvě ellipsy L', L''. Ze tří ellips, z nichž každé dvě se protínají ve dvou bodech, snadno již ellipsoid ε se sestrojí.

Případ β) lze převésti na předchozí. Svazek polárný Σ může býti dán na př. polárným trojhranem $s\,(NRT)$, jehož každá hrana, na př. N, je polárou protější stěny (RT) jakožto roviny polárné, a mimo to ještě jednou polárou sP a polárnou její rovinou $s\pi$. Aby direkční kužel (sK_∞) svazku Σ byl najisto imaginárný, zvolme poláru P vnitř trojhranu $s\,(NRT)$, rovinu pak π položme středem s tak, aby byla celá vně trojhranu. Potom zajisté rovina (PN) seče rovinu (RT) v přímce N' a rovinu π v přímce P' tak, že družiny (NN'), (PP') se rozdělují; rovina (PN) seče tedy svazek Σ v paprskové involuci *elliptické*. A rovněž tak jest i v rovinách (PR), (PT). Je samozřejmo, že tento kužel (sK_∞), jehož úběžnou křivkou K_∞ ellipsoid ε má procházeti, je homothetický (a tedy i shodný) s asymptotickým kuželem ellipsoidu ε.

Vytkněme dále na přímce P bod o a proložme jím rovinu $\sigma \parallel \pi$. Rovina σ seče trojhran $s\,(NRT)$ v $\triangle\, nrt$ a svazek Σ v rovinné soustavě polárné, jejíž střed jest o a direkční kuželosečka E^i, daná polárným $\triangle nrt$ a středem o, jest imaginárná, protože střed o připadá do vnitř téhož trojúhelníka. Nahraďme E^i reálnou ellipsou E^I souosou*), která E^i „ideálně zobrazuje“ (kollineárná transformace dle středu o, dle osy v nekonečnu a dle charakteristiky $k = \sqrt{-1}$), sestrojme v rovině π ellipsu F (o středu s) homothetickou a shodnou ku E^I, a proložme ellipsou F ellipsoid ψ, který se roviny σ dotýká v bodě o ($\overline{so} \equiv P$ je průměr ellipsoidu sdružený s diametrálnou rovinou π). Průměry a sdružené s nimi diametrálné roviny ellipsoidu ψ vytvořují polárný svazek identický se Σ; jest tudíž úběžná křivka ellipsoidu ψ identická s K_∞, t. j. ellipsoidy ε a ψ jsou homothetické. Další řešení se tedy shoduje s případem α).

---

*) Jarolímek, Geometrie polohy I., pag. 94., odst. 85.