Štefan Schwarz

O jednej úlohe z teorie kužel'osečiek. [II.]

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 64 (1935), No. 7, R101--R106

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121650

ROZHLEDY

O jednej úlohe z teorie kužeľosečiek.

Štefan Schwarz, posluchač přírod. fakulty v Praze.

(Dokončení.)

II. Vyšetrime kedy bude uhol tečien nulou (alebo 180°) pre jednoduché kužeľosečky.

Z (6) plyne, že to nastane pre body hoviace rovnici $f(x_0, y_0) = 0$, t. j. pre body na kužeľosečke. Tu však vidíme, že z rovnice (6) neni možno dostať zrejmý prípad rovnobežných tečien. To zodpovedá tomu, že tu je hľadaný bod nevlastným, a my užívame len obyčajných súradnic, pomocou ktorých tieto body nejde charakterisovať. Pre homogenné súradnice (x, y, z) znie vzorec (6) — ako vyplýva po podrobnej úvahe

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\mp 2\sqrt{-A \cdot f(x_0, y_0, z_0) \cdot z_0^2}}{(x_0^2 + y_0^2) A_{33} - 2x_0z_0A_{13} - 2y_0z_0A_{23} + (A_{11} + A_{22}) z_0^2}. \qquad (6')$$

Možno teda výsledok rozšíriť: uhol bude rovný nule i pre $z = 0$, t. j. pre všetky body nevlastnej priamky, ale za podstatného predpokladu, že $A_{33} \neq 0$, t. j. nejedná sa o parabolu.

U paraboly majú hľadanú vlastnosť len body na nej ležiace.

III. Uvažujme stred kužeľosečky. Jeho súradnice odvodíme z rovnice (2). Definujeme-li stred kužeľosečky, akožto stred symetrie, potom rovnica (2) pre d musí byť rydze kvadratickou, . j. musí identicky (pre každé α) platiť $\cos \alpha \cdot f_1(x_0, y_0) + \sin \alpha \cdot f_2(x_0, y_0) \equiv 0$; t. j. pre stred platí $f_1(x_0, y_0) = 0$, $f_2(x_0, y_0) = 0$. Riešením máme

$$x_0 = \frac{A_{13}}{A_{33}}, \quad y_0 = \frac{A_{23}}{A_{33}}.$$

(Pre parabolu je to ovšem bod nevlastný; a nemožno použiť tohoto odvodenia.)

Vieme, že tečny vedené zo stredu sú asymptoty. Máme teda ľahký prostriedok ako zistiť uhol asymptot φ. Dosadíme do (6) súradnice stredu:

$$f(x_0, y_0) = x_0 \cdot f_1(x_0, y_0) + y_0 f_2(x_0, y_0) + a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33} =$$
$$= \frac{1}{A_{33}} (a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}) = \frac{A}{A_{33}},$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \mp \frac{2\sqrt{-A_{33}}}{a_{11} + a_{22}}. \tag{6''}$$

a) Elipsa; tu je $A_{33} > 0$; uhol imaginárny — neni reálnych asymptot.

b) Hyperbola: $A_{33} < 0$; existújí dve reálné asymptoty. Pre $a_{11} + a_{22} = 0$ budú asymptoty kolmé; máme známu podmienku pre rovnostrannú hyperbolu.

c) Parabola: vzorec (6″) bol odvodený za predpokľadu $A_{33} \neq 0$, ale platí i pre $A_{33} = 0$. Asymptotou je dvakrát počítaná nevlastná priamka.

IV. Určiť geometrické miesto bodov, z ktorých vidieť kužeľosečku (1) pod pravým uhlom!

Vzhľadom na (5) a (6) plynie, že tie body musia vyhovovať podmienke

$$f_1^2(x, y) + f_2^2(x, y) - (a_{11} + a_{22}) f(x, y) = 0. \tag{7}$$

alebo

$$(x^2 + y^2) A_{33} - 2xA_{13} - 2yA_{23} + A_{11} + A_{22} = 0. \tag{7'}$$

Rozoznávajme tri prípady.

1. Kužeľosečka (1) budiž elipsa. Potom (7) dáva rovnicu hľadaného geom. miesta. Je to zrejme **kružnica** o stredu v strede danej elipsy. Pre jej polomer platí

$$\varrho^2 = \frac{A_{13}^2 + A_{23}^2 - (A_{11} + A_{22}) A_{33}}{A_{33}^2}.$$

Čitateľ možno písať v tvare

$$-\begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{23} & A_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} A_{11} & A_{13} \\ A_{13} & A_{33} \end{vmatrix},$$

a to podľa známej vety o subdeterminantoch reciprokého determinantu (viď Bydžovský: Determinanty, str. 110) je rovno výrazu

$$-a_{11}A - a_{22}A = -(a_{11} + a_{22}) A.$$

Je teda

$$\varrho = \sqrt{-\frac{A(a_{11} + a_{22})}{A_{33}^2}}.$$

Pre reálnu elipsu (a jednáme len o takých) je $a_{11}A$, $a_{22}A < 0$, a preto ϱ vždy reálné, t. j. daná úloha má vždy reálné riešenie. Ľahko najdeme, že polomer možno písať vo tvaru $\sqrt{a^2 + b^2}$, kde $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ sú poloosi elipsy.

2. U hyperboly môžu nastať tri prípady.

a) $-A\,(a_{11} + a_{22}) > 0$, (7′) značí reálnu kružnicu.

b) $-A\,(a_{11} + a_{22}) < 0$, (7′) značí kružnicu imaginárnu.

c) $-A\,(a_{11} + a_{22}) = 0$, t. j. $(a_{11} + a_{22}) = 0$ (máme rovnostrannú hyperbolu), (7′) značí kružnicu nulovú, totiž stred hyperboly. Plynie to ostatne i zo (7), odkiaľ vidíme, že hľadané geom. miesto sa skladá z dvoch imag. priamok, ktorých reálnym priesečíkom je práve stred hyperboly.

Zistíme, že tu možno písať $\varrho = \sqrt{a^2 - b^2}$, pre všetky tri prípady.

3. Pre parabolu je $A_{33} = 0$, takže (7′) značí priamku

$$2A_{13}x + 2A_{23}y - A_{11} - A_{22} = 0.$$

Z elementárnej matematiky vieme, že je to *priamka riadiaca*. V homogenných súradniciach pristúpi ešte nevlastná priamka.

V. Výsledky (5), (6), (6′) sú dvojznačné. Možno teraz poznatkov v (IV.) získaných užiť k tomu, aby sme uhly jednoznačne definovali — aspoň pre reálné tečny — vo shode s *názorovým* pojmom „uhol pod akým vidieť kužeľosečku“.

Prevedeme úvahu zovrubne pre elipsu. Je-li bod vonku z kružnice (7′) je uhol ostrý; ľavá strana rovnice (7′), do ktorej sú dosadené súradnice bodu, je kladná ($A_{33} > 0$). Je-li bod vnútri kružnice, je uhol tupý a ľavá strana rovnice (7′) záporná. Je teda znamienko tangenty uhlu v (6) také, aké má menovateľ. Nutno teda brať znamienko odmocniny $+$.

Podobne možno rozhodnúť pre hyperbolu, ovšem tu nutno vyšetriť niekoľko prípadov.

Pre parabolu stačí uvážiť obe strany riadiacej priamky. Zistíme, že znamienko odmocniny má byť $+$.

VI. Určiť geometrické miesto bodov, z ktorých možno viesť ku kužeľosečke tečny svierajúce daný uhol α!

K tomu stačí upraviť výraz (6). Vyšetríme všetky tri druhy kužeľosečiek v normálnom tvaru, a to každú zvlášť.

A) *Elipsa* $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$,

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{4\,(b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2)}{[x^2 + y^2 - (a^2 + b^2)]^2}.$$

Úpravou máme rovnicu geom. miesta

$$\begin{aligned} &(x^2 + y^2)^2 \operatorname{tg}^2 \alpha - 2x^2\,[(a^2 + b^2) \operatorname{tg}^2 \alpha + 2b^2] - \\ &- 2y^2\,[(a^2 + b^2) \operatorname{tg}^2 \alpha + 2a^2] + (a^2 + b^2)^2 \operatorname{tg}^2 \alpha + 4a^2b^2 = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Je to krivka 4. stupňa.

B) *Hyperbola* $b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0$,

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{4\,(a^2y^2 + a^2b^2 - b^2x^2)}{(x^2 + y^2 - a^2 + b^2)^2}.$$

Rovnica geom. miesta

$$\begin{aligned} &\operatorname{tg}^2 \alpha \,.\, (x^2 + y^2)^2 - 2x^2 \, [(a^2 - b^2) \operatorname{tg}^2 \alpha - 2b^2] - \\ &- 2y^2 \, [\operatorname{tg}^2 \alpha \,.\, (a^2 - b^2) + 2a^2] + (a^2 - b^2)^2 \operatorname{tg}^2 \alpha - 4a^2b^2 = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Opäť krivka 4. stupňa.

Zistime však, čo nastane, keď $a = b$, t. j. jedná sa o rovnostrannú hyperbolu.

Dosaďme do (9); máme

$$(x^2 + y^2)^2 \operatorname{tg}^2 \alpha + 4a^2 (x^2 - y^2) - 4a^4 = 0,$$

$$(x^2 + y^2)^2 + 2 \left(\frac{a\sqrt{2}}{\operatorname{tg} \alpha} \right)^2 (x^2 - y^2) - \left(\frac{2a^2}{\operatorname{tg} \alpha} \right)^2 = 0.$$

To sú známe Cassiniho krivky, majúce ohniská na osi y vo vzdialenosti $\pm \frac{a\sqrt{2}}{\operatorname{tg} \alpha}$. Súčin vzdialeností ľubovolného bodu od ohnisiek je $2a^2 \,.\, \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha}$.

C) *Parabola* $y^2 - 2px = 0$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{4 \, (y^2 - 2px)}{(2x + p)^2}.$$

Rovnica geom. miesta je

$$4x^2 \operatorname{tg}^2 \alpha + 4px \, (2 + \operatorname{tg}^2 \alpha) - 4y^2 + p^2 \operatorname{tg}^2 \alpha = 0, \tag{10}$$

alebo inak písané

$$\left[x + p \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} \right) \right]^2 - \frac{y^2}{\operatorname{tg}^2 \alpha} = p^2 \,.\, \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^4 \alpha}.$$

Geometrickým miestom je teda hyperbola, ktorej stred má súradnice $\left[- p \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} \right), 0 \right]$. Jej poloosi sú

$$p \,.\, \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha}, \; p \,.\, \frac{1}{\sin \alpha}.$$

Asymptota má smernicu $\operatorname{tg} \alpha$. Z toho vidno — ako i z (10) — že pri stálom α, ale premenlivom p, dostaneme súhrn podobných hyperbol; vzdialenosť ich stredov od vrcholu paraboly je priamo úmerná parametru.

Poznámky. Úvahy tu prevedené zasahujú do rôznych úloh o kužeľosečkách. Upozorníme len na niektoré.

1. Rovnica (6) ukazuje ako možno analyticky rozhodnúť, či je daný bod vonkajším alebo vnútorným bodom kužeľosečky (t. j. možno-li z neho viesť reálné tečny, alebo nie).

Jestli je $-A \,.\, f(x_0, y_0) > 0$ (< 0) je (x_0, y_0) vonkajším (vnútorným) bodom kužeľosečky. Vzťah (6″) ukazuje, že pre hyperbolu je stred bodom vonkajším, pre elipsu vnútorným.

2. Lahko určíme na pr. dĺžky tečien vedených z bodu (x_0, y_0) ku kužeľosečke. Vypočítame-li α z rovnice (3) a dosadíme do rovnice, ktorú dostaneme z (2), totiž

$$d^2 = \frac{f(x_0, y_0)}{a_{11} \cos^2 \alpha + 2a_{12} \sin \alpha \cos \alpha + a_{22} \sin^2 \alpha},$$

máme hľadanú veličinu.

Tu možno riešiť úlohy takéhoto druhu: určiť geom. miesto bodov, z ktorých vedené tečny majú stály súčet, alebo súčin a pod.

3. Užijeme rovnice (2) ešte k jednej zaujímavej úlohe. Ukážeme, že existuje i pre obecné kužeľosečky analogia mocnosti bodu ku kružnici.

Veďme bodom (x_0, y_0) priamky rôznych smerov. Tie pretnú kužeľosečku vo dvoch bodoch. Na každú priamku nanesme od bodu (x_0, y_0) strednú geom. úmernú zo vzdialeností týchto bodov od daného a hľadajme geom. miesto takto vzniklých bodov. [Pre kružnicu je geom. miestom opäť kružnica, lebo súčin je konstantný.]

Píšme kužeľosečku v tvaru (1) a rovnice priamok ako predtým. Pre d dostaneme rovnicu (2). Pre súradnice bodu hľadaného geom. miesta platí

$$x = x_0 + \cos \alpha \sqrt{\frac{f(x_0, y_0)}{a_{11} \cos^2 \alpha + 2a_{12} \sin \alpha \cos \alpha + a_{22} \sin^2 \alpha}},$$

$$y = y_0 + \sin \alpha \sqrt{\frac{f(x_0, y_0)}{a_{11} \cos^2 \alpha + 2a_{12} \sin \alpha \cos \alpha + a_{22} \sin^2 \alpha}}.$$

Úpravou — vylúčením α — dostaneme rovnicu geom. miesta

$$a_{11} (x - x_0)^2 + 2a_{12} (x - x_0)(y - y_0) + a_{22} (y - y_0)^2 - f(x_0, y_0) = 0. \tag{11}$$

Je to kužeľosečka o stredu (x_0, y_0), podobná danej; pretína danú v dotyčných bodoch tečien z (x_0, y_0) k (1) vedených.

Pre $a_{11} = a_{22} = 1$, $a_{12} = 0$ máme známu kružnicu, ortogonálnu k danej.

Diskriminant rovnice (11) je — jak ľahko určíme —

$$A_1 = -f(x_0, y_0) \,.\, A_{33}.$$

Vidno, že neleží-li bod na kužeľosečke rozpadne sa (11) len, keď je daná kužeľosečka parabolou. Vtedy sa rozpadne na dve priamky navzájom i s osou paraboly rovnobežné.

Tak, keď je parabola v obvyklom tvaru $y^2 - 2px = 0$, je geom. miestom dvojica rovnobežiek s osou x, o rovniciach

$$y = y_0 \pm \sqrt{f(x_0, y_0)}.$$

Priesečíky týchto dvoch priamok s parabolou sú dotyčné body tečien z (x_0, y_0) k parabole vedených.

Náhražky benzinu.

Jan Kažan.

(Dokončení.)

Aby byly patrny výhody směsí, všimněme si funkce kapalné pohonné látky v motoru. Pohonná látka, jemně rozprášená a smíšená se vzduchem, ssaje se z karburátoru do válce, kde je pístem stlačena na několik atmosfér. Stlačená směs se zapálí a plyny, vzniklé spálením, expandují a konají tak mechanickou práci. Když je píst expansí přiveden ke konci válce, plyny se z válce vyfouknou. Čím je látka těkavější, tím jest výhodnější, neboť se snadno vypařuje. Teplo, vznikající při stlačování směsi ve válci, vypařování zvyšuje. Není-li látka dosti těkavá, kondensuje se na stěnách válce a při spalování tyto zkondensované částice se většinou nespalují a unikají pístními kroužky do mazacích olejů, které se tím zřeďují. Malá těkavost působí tedy nedokonalé využití paliva a zřeďování olejů. Těkavost se dříve posuzovala podle specifické hmoty. Čím menší spec. hmota, tím větší těkavost. To však není přesné a proto se dnes posuzuje těkavost podle t. zv. „středního bodu varu". Tuto teplotu dostaneme, když sečteme teploty, při nichž přechází při destilaci 5, 15, 25 atd. až 95 cm³ kapaliny a dělíme-li tento součet počtem frakcí. Čím nižší „střední bod varu", tím těkavější látka. U alkoholu jest 88°, u benzenu 95—100°, u benzinu, který se prodává u nás u pump, asi 115°. Jak je viděti, výhodnější je v tomto směru alkohol a benzen.

Každá směs pohonné látky se vzduchem se zapaluje při určité teplotě a tlaku sama od sebe. Nastane-li takový samozápal, dojde obyčejně k detonaci, která se projevuje klepáním motoru. (Klepání bývá často zaviněno vyběhanými ložisky, volným pístem ve válci nebo netěsnými pístními kroužky.) K detonaci dojde tím snadněji, čím je spalovací rychlost látky větší. Benzen a líh mají malou spalovací rychlost, a proto samozápal probíhá bez detonace. Další výhoda lihu a benzenu je v tom, že teplota samozápalnosti je u benzenu 520°, u lihu 510° a u benzinu 410°. Nejsnadněji se tedy sám zapálí benzin a proto nesnese takový tlak (kompresi) jako druhé dvě látky. Čím ale směs více stlačíme, tím bude její účinek