Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

František Hoza

Některé vlastnosti pravidelných těles vypuklých

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 6 (1877), No. 5, 245--257

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/121681`

Jestli straně b úhel protilehlý jest pravý, pak

$$c = v_a, \text{ tedy } m = 0 \text{ a } \beta = 1,$$

takže

$$\begin{aligned} a &= 1, & v_a &= \frac{2\alpha}{1-\alpha^2} \\ b &= \frac{1+\alpha^2}{1-\alpha^2}, & v_b &= \frac{2\alpha}{1+\alpha^2} \\ c &= \frac{2\alpha}{1-\alpha^2}, & v_c &= 1. \end{aligned} \tag{30}$$

Z těchto vzorců plyne $a^2 + c^2 = b^2$ čili

$$1 + \left(\frac{2\alpha}{1-\alpha^2}\right)^2 = \left(\frac{1+\alpha^2}{1-\alpha^2}\right)^2$$

aneb

$$(1-\alpha^2) + (2\alpha^2) = (1+\alpha^2)^2$$

známé to pravidlo Platonovo.

Některé vlastnosti pravidelných těles vypuklých*).

Pro žáky středních škol

sestavil

prof. **F. Hoza.**

1. Odchylka dvou soumezných stěn.

Nechať značí m množství hran, které jdou jedním vrcholem pravidelného tělesa a n množství hran, jež obmezují jednu jeho stěnu.

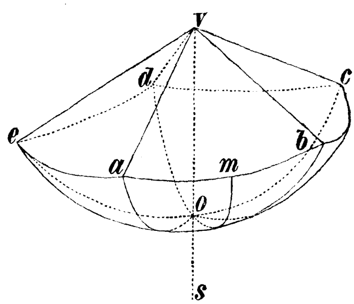
Opišme z vrcholu v (Obr. 1.) toho pravidelného tělesa plochu kulovou, jejíž poloměr se rovná jednotce.

Hrany, které vrcholem v procházejí, protínají tu plochu v bodech $a, b, c, d, \ldots$ a stěny, jímž ony hrany náležejí, sekou ji v kruhových obloucích ab, bc, $cd, \ldots$, které tvoří na ploše kulové pravidelný sférický m-úhelník, jehož střed o povstal

*) Viz Archiv für Mathematik und Physik von Grunert — Hoppe, 59. d. 1. seš., na 50. str. „Propriétés nouvelles des polyèdres réguliers convexes, par G. Dostor.

průsekem plochy kulové s přímkou sv, která střed s pravidelného tělesa spojuje s vrcholem v.

Obr. 1.



Sférické úhly při středu o budou

$$\sphericalangle aob = boc = cod = \ldots = \frac{2\pi}{m}.$$

Jelikož každá stěna pravidelného tělesa omezena pravidelným n-úhelníkem, odpovídají oblouky ab, bc, cd,.... úhlům v pravidelných n-úhelnících, jež se ve vrcholu v stýkají, pročež dlužno, aby

$$\overset{\frown}{ab} = \overset{\frown}{bc} = \overset{\frown}{cd} = \ldots\ldots = \frac{n-2}{n}\pi = \pi - \frac{2\pi}{n}.$$

Sestrojíme-li výšku $\overset{\frown}{om}$ sférického trojúhelníka aob, obdržíme

$$\overset{\frown}{am} = \overset{\frown}{mb} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n} \quad \text{a}$$

$$\sphericalangle aom = mob = \frac{\pi}{m}.$$

Sférické úhly m-úhelníka $abcd\ldots$ udávají odchylky dvou a dvou soumezných stěn pravid. tělesa.

Nazveme-li odchylku dvou soumezných stěn písmenem α, bude patrně

$$\sphericalangle aom = \frac{\alpha}{2}.$$

Poněvadž sférický trojúhelník aom je pravoúhelný maje $\overset{\frown}{oa}$ za přeponu, platí o něm rovnice

$$\cos(aom) = \cos(am) \,.\, \sin(oam)$$

čili

$$\cos\frac{\pi}{m} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right) \sin\frac{\alpha}{2},$$

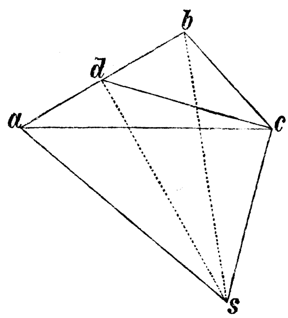
ze které plyne

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \cos\frac{\pi}{m} : \sin\frac{\pi}{n}. \tag{1}$$

2. O plochách kulových pravidelnému tělesu opsaných a vepsaných.

V obr. 2. znázorněna libovolná hrana ab pravidelného tělesa, jeho střed s a střed c jedné z oněch stěn, které hranou ab procházejí.

Obr. 2.



Tato hrana rozpůlena bodem d.

Vzájemným pak spojením vytknutých bodů vzniknou důležité přímky.

A sice jest $sa = sb = R$ poloměrem plochy kulové, která všemi vrcholy tělesa prochází a jemu tedy opsána jest.

Dále máme přímku $oc = r$, která udává poloměr plochy kulové, jež se všech stěn tělesa dotýká a to každé v jejím středu, pročež do tělesa vepsanou slove.

Konečně lze $od = \varrho$ bráti za poloměr plochy kulové, která se všech hran tělesa dotýká v bodech půlících.

Patrně udává R vzdálenost středu s od všech vrcholů, r vzdálenost téhož středu od všech stěn a ϱ vzdálenost jeho od všech hran.

V pravoúhelném trojúhelníku *scd*, jehož přeponou jest *sd*,

$$\sphericalangle sdc = \frac{\alpha}{2}$$

a

$$\overline{sc} = \overline{sd} \sin (sdc),$$

tudíž

$$r = \varrho \sin \frac{\alpha}{2}. \tag{2}$$

Ze vzorců (1) a (2) snadno obdržíme následující

$$r \sin \frac{\pi}{n} = \varrho \cos \frac{\pi}{m}. \tag{3}$$

Trojúhelník *sad* jest rovněž pravoúhelným maje *sa* za svou přeponu. Tudíž platí o něm rovnice

$$\overline{sa}^2 = \overline{sd}^2 + \overline{ad}^2.$$

Avšak z pravidelného trojúhelníka *acd*, jehož přeponou *ac*, jde

$$\sphericalangle acd = \frac{\pi}{n},$$

$$\sphericalangle cad = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}$$

a

$$\overline{ad} = \overline{ac} \sin (acd),$$

tudíž musí

$$\overline{sa}^2 = \overline{sd}^2 + \overline{ac}^2 \sin^2 (acd)$$

čili

$$R^2 = \varrho^2 + \overline{ac}^2 \sin^2 \frac{\pi}{n}.$$

Trojúhelník *sac* je rovněž pravoúhelný a sice při vrcholu *c*, pročež bude

$$\overline{ac}^2 = \overline{sa}^2 - \overline{sc}^2$$
$$= R^2 - r^2$$

což dosadivše do výrazu předešlého obdržíme

$$R^2 = \varrho^2 + (R^2 - r^2) \sin^2 \frac{\pi}{n}$$

a užijeme-li vzorce (3), shledáme po náležitém zjednodušení, že

$$R \cos \frac{\pi}{n} = \varrho \sin \frac{\pi}{m}. \tag{4}$$

Ze vzorců (3) a (4) plyne dělením souhlasných stran

$$\frac{R}{r} = tg\frac{\pi}{m}\, tg\frac{\pi}{n} \tag{5}$$

a násobením

$$R\, r \sin\frac{2\pi}{n} = \varphi^2 \sin\frac{2\pi}{m}. \tag{6}$$

Zmocníme a sečteme-li souhlasné strany rovnic (3) a (4), dostaneme

$$\sin^2\frac{\pi}{n} = \frac{R^2 - \varphi^2}{R^2 - r^2}. \tag{7}$$

Nahradíme-li ve vzorci (3) $\sin\frac{\pi}{n}$ hodnotou plynoucí ze (7), bude

$$\cos^2\frac{\pi}{m} = \frac{x^2}{\varphi^2}\,\frac{R^2 - \varphi^2}{R^2 - r^2}. \tag{8}$$

Pomocí vzorce (1) obdržíme pak snadno

$$tg^2\frac{\alpha}{2} = \frac{r^2}{\varrho^2 - r^2}. \tag{9}$$

Posledních tří vzorců lze užíti k eliminaci funkcí goniometrických, jež v ostatních výrazích se naskytují.

Je-li m u jednoho pravidelného tělesa rovno n u druhého, pravíme, že jsou obě tělesa spolu *sdružena.*

Šestistěn sdružen s osmistěnem a dvanáctistěn s dvacetistěnem.

Ze vzorce (5) patrno, že platí věty:

a) U dvou pravidelných těles spolu sdružených jest poměr $R:r$ týž.

b) Lze-li těmto tělesům společnou plochu kulovou opsati, lze jim též společně plochu kulovou vepsati.

3. *Z délky a jedné hrany vypočísti poloměry R, r, ϱ.*

Z pravoúhelných trojúhelníků scd a acd (obr. 2.) vychází na jevo, že

$$\overline{sc} = \overline{cd}\, tg\, (sdc)$$

a

$$\overline{cd} = \overline{ad} \cot (acd),$$

pročež

$$\overline{ad} = \frac{a}{2},$$

lze poslední rovnici jinak psáti

$$r = \frac{a}{2} \, tg \, \frac{\alpha}{2} \, cot \, \frac{\pi}{n} \, . \tag{10}$$

Násobením souhlasných stran rovnic (5) a (10) vznikne

$$R = \frac{a}{2} \, tg \, \frac{\alpha}{2} \, tg \, \frac{\pi}{m} \, . \tag{11}$$

Vložíme-li do vzorce (10) na místo r jeho hodnotu ze vzorce (2), dostaneme

$$\varrho = \frac{a}{2} \frac{cot \, \frac{\pi}{n}}{cos \, \frac{\alpha}{2}} \, . \tag{12}$$

Podobně plyne z rovnic (4) a (11)

$$R = \varrho \frac{sin \, \frac{\pi}{m}}{cos \, \frac{\pi}{n}} = \frac{a}{2} \, tg \, \frac{\alpha}{2} \, tg \, \frac{\pi}{m}$$

a

$$\varrho = \frac{a}{2} \, tg \, \frac{\alpha}{2} \frac{cos \, \frac{\pi}{n}}{cos \, \frac{\pi}{m}} \, . \tag{13}$$

4. *Obsah pravidelného tělesa.*

Budiž N množství vsech stěn pravidelného tělesa, p plošný obsah jedné stěny a V krychlový obsah celého tělesa. Pak

$$p = n \, . \, \overline{ad} \, . \, \overline{cd}$$

čili

$$p = n \frac{a^2}{4} \, cot \, \frac{\pi}{n}$$

a

$$V = \frac{1}{3} \, N p r \, ,$$

tedy

$$V = \frac{1}{12} \, N n \, a^2 r \, cot \, \frac{\pi}{n} \, . \tag{14}$$

Jiné výrazy obsahu V utvoříme z tohoto za pomocí vzorců dříve odvozených. Tak na př. jde ze vzorce (12)

$$a \cot \frac{\pi}{n} = 2\varrho \cos \frac{\alpha}{2},$$

což dosadíme do (14) a obdržíme

$$V = \frac{1}{6} Nn a r \varrho \cos \frac{\alpha}{2}. \tag{15}$$

Jelikož z rovnic (10) a (12) vychází na jevo, že

$$r\varrho = \frac{a^2}{4} \cot^2 \frac{\pi}{n} \frac{tg \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}},$$

přijme vzorec (15) dosazením této hodnoty tvar

$$V = \frac{1}{24} Nn a^3 \cot^2 \frac{\pi}{n} tg\, \alpha, \tag{16}$$

z něhož patrno, že *obsahy dvou pravidelných těles, která mají stejně mnoho stěn, stojí k sobě v poměru krychlovém jejich hran.*

Podobným pochodem lze ještě vyvoditi následující vzorce:

$$\left.\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} Nn r^3 tg \frac{\pi}{n} \cot^2 \frac{\alpha}{2} \\ &= \frac{1}{3} Nn R^3 \cot^3 \frac{\pi}{m} \cot^2 \frac{\pi}{n} \cot^2 \frac{\alpha}{2} \\ &= \frac{1}{6} Nn \varrho^3 tg \frac{\pi}{n} \sin\alpha \cos \frac{\alpha}{2} \\ &= \frac{1}{3} Nn r \sqrt{(R^2 - \varrho^2)(\varrho^2 - r^2)}, \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

z nichž poznáváme, že *obsahy pravidelných těles, která mají stejně mnoho stěn, stojí k sobě v poměru krychlovém poloměrů* R, r, ϱ.

5. *Kolik jest pravidelných těles vypuklých?*

Znamená-li v množství všech vrcholů a h množství všech hran pravidelného tělesa, dlužno, jak Euler dokázal, aby

$$N + v = h + 2. \tag{18}$$

Tato rovnice platí vůbec o všech mnohostěnech, u nichž žádná stěna nekryje žádnou jinou hranu ani žádný jiný vrchol kromě těch, které ji omezují. Tělesa té podmínce vyhovující slovou Eulerovými.

Kromě toho lze snadno dokázati, že u tělesa pravidelného

$$h = \frac{Nn}{2} \tag{19}$$

a

$$v = \frac{2h}{m} = \frac{Nn}{m}. \tag{20}$$

Dosazením hodnot h, v plynoucích z posledních dvou výrazů do rovnice Eulerovy dostaneme

$$N = \frac{4m}{2(m+n) - mn}.\ ^{*)} \tag{21}$$

Z tohoto vzorce lze vyvoditi, kolik jest pravidelných těles vypuklých a které hodnoty u nich N, m, n mají.

a) Nejmenší hodnota m jest $m = 3$, poněvadž k utvoření vrcholu nejméně tři stěn jest zapotřebí.

Napotom bude

$$N = \frac{12}{6-n}.$$

Též n nemůže býti menší, než 3, poněvadž k omezení stěny třeba nejméně tří hran. Avšak n nemůže býti větší, než 5, jinak by vyšlo $N \lesseqgtr 0$, což nemožné.

Tedy stává pouze tré pravidelných těles omezených samými trojhrany a sice

$$n = 3\,,\ 4\,,\ \ 5$$
$$N = 4\,,\ 6\,,\ 12\,.$$

Jmena jejich jsou *čtyrstěn, šestistěn* a *a dvanáctistěn.*

b) Nechať $m = 4$. Pak bude míti vzorec (21) tvar

$$N = \frac{8}{4-n}.$$

Patrně může zde vyhověti pouze $n = 3$, načež $N = 8$. Máme tedy jediné těleso omezené čtyrhrany a to slove *osmistěn.*

c) Budiž dále $m = 5$. Potom dlužno, aby

$$N = \frac{20}{10-3n}.$$

I zde vyhoví jedině $n = 3$, $N = 20$.

Toto těleso samými pětihrany omezené slove *dvacetistěn.*

---

*) Viz Časopis mathem. a fysiky roč. VI. str. 142. Fürst „Poznámka“.

d) Kdyby bylo $m > 5$, obdrželi bychom
$$2(m+n) - mn < 10 - 3n.$$
Jelikož n není menší než 3, musel by tento jmenovatel býti menší než 1 a tudíž nelze žádné pravidelné těleso sestrojiti, u něhož by m bylo větší než 5.

Máme tedy celkem pouze 5 pravidelných těles vypuklých a sice pravidelný čtyrstěn, šestistěn, osmistěn, dvanáctistěn a dvacetistěn.

6. *Zvláštní vzorec pro čtyrstěn.*

Dosadíme-li hodnoty
$$m = 3, \; n = 3, \; N = 4$$
$$sin \frac{\pi}{m} = sin \frac{\pi}{n} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
a
$$cos \frac{\pi}{m} = cos \frac{\pi}{n} = \frac{1}{2}$$
do vzorců (1), (2) a (4), dostaneme
$$sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \; cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \; sin\,\alpha = 2\sqrt{2}$$
a
$$\alpha = 70^0\,31'\,43{\cdot}6''.$$
Napotom
$$\varrho = r\sqrt{3}, \; R = \varrho\sqrt{3},$$
$$\varrho^2 = Rr \quad \text{a} \quad R = 3r.$$
Ze vzorců (10), (11) a (12) obdržíme
$$r = \frac{a\sqrt{6}}{12}, \; R = \frac{a\sqrt{6}}{4} \;\text{ a }\; \varrho = \frac{a\sqrt{2}}{4}.$$
Konečně plyne ze vzorců (16) a (17)
$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12} = 8\,r^3\sqrt{3} = \frac{8\,R^3\sqrt{3}}{27} = \frac{8\,\varrho^3}{3}.$$
7. *Šestistěn.*

Na pravidelném šestistěnu jest
$$m = 3, \; n = 4, \; N = 6$$
a tudíž
$$sin \frac{\pi}{m} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad tg \frac{\pi}{n} = 1$$

$$\cos\frac{\pi}{m}=\frac{1}{2},\ \sin\frac{\pi}{n}=\cos\frac{\pi}{n}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Vložíme-li hodnoty uvedené do vzorců obecných, obdržíme

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}},\ \alpha=90^0,$$

$$r=\frac{\varrho}{\sqrt{2}},\ R=\varrho\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}},$$

$$r^2:\varrho^2:R^2=1:2:3,$$

$$R=r\sqrt{3},\ 2Rr=\varrho^2\sqrt{3},$$

$$r=\frac{a}{2},\qquad R=\frac{a\sqrt{3}}{2},$$

$$\varrho=\frac{a\sqrt{2}}{2},\quad R^2=r^2+\varrho^2$$

a

$$V=a^3=8r^3=\frac{8}{9}R^3\sqrt{3}=2\varrho^3\sqrt{2}.$$

8. *Osmistěn.*

Podobným chodem dospějeme i zde ku zvláštním výrazům, dosadíme-li do vzorců obecných tyto hodnoty:

$$m=4,\ n=3,\ N=8,$$

$$tg\frac{\pi}{m}=1,\quad \sin\frac{\pi}{m}=\cos\frac{\pi}{m}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\sin\frac{\pi}{n}=\frac{\sqrt{3}}{2}\text{ a }\cos\frac{\pi}{n}=\frac{1}{2}.$$

Potom obdržíme po náležitém zjednodušení

$$R=\varrho\sqrt{2}=r\sqrt{3},\ Rr\sqrt{3}=2\varrho^2,$$

$$r=\frac{a\sqrt{6}}{6},\ R=\frac{a\sqrt{2}}{2},\ \varrho=\frac{a}{2},$$

$$\frac{1}{r^2}=\frac{1}{R^2}+\frac{1}{\varrho^2}$$

a

$$V=\frac{a^3\sqrt{2}}{3}=4r^3\sqrt{3}=\frac{4R^3}{3}=\frac{8\varrho^3\sqrt{2}}{3}.$$

9. *Dvanáctistěn.*

Na dvanáctistěnu jest

$$m=3,\ n=5,\ N=12$$

a tudíž

$$\sin\frac{\pi}{m}=\frac{\sqrt{3}}{2},\ \sin\frac{\pi}{n}=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

$$\cos\frac{\pi}{m}=\frac{1}{2},\ \cos\frac{\pi}{n}=\frac{\sqrt{5}+1}{4},$$

neb $\sin\frac{\pi}{5}$ udává $\frac{1}{2}$ délky jedné strany pravidelného pětiúhelníka vepsaného do kružnice v poloměru rovném jednotce.

Dosazením uvedených hodnot do obecných vzorců přijdeme k těmto výsledkům:

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}},\ \cot\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{5}-1}{2},\ \sin\alpha=\frac{2}{5}\sqrt{5},$$

$$\alpha=116^0\,33'\,44{\cdot}2'',$$

$$2\varrho=r\sqrt{10-2\sqrt{5}},\ 2R=\varrho\sqrt{3}\,(\sqrt{5}-1),$$

$$Rr\sqrt{10+2\sqrt{5}}=2\varrho^2\sqrt{3},$$

$$R(\sqrt{5}+1)=r\sqrt{3\,(10-2\sqrt{5})},$$

$$*r=\frac{a}{2}\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}},\ \varrho=\frac{a}{8}(\sqrt{5}+1)^2,$$

$$R=\frac{a}{4}\sqrt{3}\,(\sqrt{5}+1),\ R^2=12\varrho^2-15r^2,$$

$$*V=\frac{a^3}{32}\sqrt{5}\,(1+\sqrt{5})^4=10r^3\sqrt{130-58\sqrt{5}}$$

$$=\frac{R^3}{9}\sqrt{3(10+2\sqrt{5})}=\varrho^3\sqrt{5}\,(\sqrt{5}-1)^2.$$

10. *Dvacetistěn.*

Tomuto mnohostěnu odpovídají hodnoty

$$m=5,\ n=3,\ N=20$$

a tudíž

$$\sin\frac{\pi}{m}=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4},\ \sin\frac{\pi}{n}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{m}=\frac{\sqrt{5}+1}{4},\quad \cos\frac{\pi}{n}=\frac{1}{2}.$$

Dosazením do vzorců obecných obdržíme po náležitém zjednodušení tyto výsledky:

---

*) Hvězdičkou poznamenané vzorce jsou v článku Dostorově nesprávně.

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}},\quad tg\frac{\alpha}{2}=\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2,$$

$$\sin\alpha=\frac{2}{3},\quad \alpha=138^0\,11'\,22{\cdot}75'',$$

$$2r\sqrt{3}=\varrho(\sqrt{5}+1),\ 2R=\varrho\sqrt{10-2\sqrt{5}},$$

$$R=r\sqrt{3(5-2\sqrt{5})},\qquad 2Rr\sqrt{3}=\varrho^2\sqrt{10+2\sqrt{5}},$$

$$r=\frac{a\sqrt{3}}{24}(\sqrt{5}+1)^2,\qquad R=\frac{a}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}},$$

$$\varrho=\frac{a}{4}(\sqrt{5}+1),\qquad R^2=4\varrho^2-3r^2,$$

$$V=\frac{5}{24}a^3(1+\sqrt{5})^2,\qquad {}^*V=\frac{5}{4}r^3\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)^4,$$

$$V=\frac{2}{3}R^3\sqrt{10+2\sqrt{5}},\qquad {}^*V=\frac{10}{3}\varrho^3(\sqrt{5}-1).$$

11. *Pravidelná tělesa do téže koule vepsaná.*

Vepišme všech pět pravidelných těles do téže koule o poloměru R a rozeznávejme hrany a, poloměry r, ϱ a obsahy V různých těles příslušnými indexy.

Pak bude

$$R=\frac{a_4\sqrt{6}}{4}=\frac{a_6\sqrt{3}}{2}=\frac{a_8\sqrt{2}}{2}$$
$$=\frac{a_{12}\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)}{4}=\frac{a_{20}\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4},$$

$$R=\varrho_4\sqrt{3}=\varrho_6\sqrt{\frac{3}{2}}=\varrho_8\sqrt{2}$$
$$=\varrho_{12}\sqrt{3}\,\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\frac{\varrho_{20}}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}},$$

$$R=3r_4=r_6\sqrt{3}=r_8\sqrt{3}$$
$$=r_{12}\frac{\sqrt{3(10-2\sqrt{5})}}{\sqrt{5}+1}=r_{20}\frac{\sqrt{3(10-2\sqrt{5})}}{\sqrt{5}+1}$$

a

$$R^3=\frac{26\,V_4}{8\sqrt{3}}=\frac{9\,V_6}{8\sqrt{3}}=\frac{3\,V_8}{4}$$
$$=\frac{9\,V_{12}}{\sqrt{3}(10+2\sqrt{5})}=\frac{3\,V_{20}}{2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}.$$

Z těchto rovnic plynou následující velezajímavé vztahy:

$$a_6{}^2 : a_3{}^2 : a_4{}^2 = 2 : 3 : 4 \, ,$$

$$\varrho_6{}^2 : \varrho_8{}^2 : \varrho_4{}^2 = 4 : 3 : 2 \, ,$$

$$a_6 : a_8 : a_4 = \varrho_4 : \varrho_8 : \varrho_6 \, ,$$

$$r_6 = r_8 \, , \; r_{12} = r_{20} \, ,$$

$$\frac{\varrho_6}{\varrho_8} = \frac{V_6}{V_8} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{\varrho_{12}}{\varrho_{20}} = \frac{V_{12}}{V_{20}} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2\sqrt{3}} \, .$$

Snadno bychom mohli rozmnožiti ještě vztahy tohoto rázu. Vůbec podávají vzorce základní dostatečný material k řešení mnohých úloh o těchto pravidelných tělesích.

Transformace souřadnic pravoúhelných.

Od

Dra. **K. Zahradníka** v Záhřebě.

Poloha nové soustavy souřadnic $X' \, Y'$ je určena, známe-li souřadnice nového počátku O' (a, b) a úhly, jež nové osy s původními osami uzavírají, totiž

$$(X'X) = \alpha \, , \qquad (X'Y) = \beta \, .$$

$$(Y'X) = \alpha'_1 , \qquad (Y'Y) = \beta_1 .$$

Původně daná soustava souřadnic budiž pravoúhelná, a úhel nové soustavy φ dán je rovnicí

$$\cos\varphi = \cos\alpha \cos\alpha_1 + \cos\beta \cos\beta_1 .$$

Označení úhlů můžeme si znázorniti následujícím schematem

	X	Y
X'	α	β
Y'	α_1	β_1

Souřadnice bodu M budou

$$OP = x, \quad MP = y$$

vzhledem na původní polohu os, a vzhledem na nové osy je

$$OP' = x', \; MP' = y'.$$