Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Úlohy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 25 (1896), No. 3, 233--240

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121994

III. *Třetí část úloh* týká se osvětlení stěn. I tyto úlohy jsou velice zajímavy a poutající. Uvádíme z nich jen některé.

Po kolik hodin byt, jehož okna obrácena jsou přímo k severu, má přímé osvětlení sluneční dne 21. června a) u nás, b) v Cařihradě, c) v Hammerfestu?

Z okna bytu autor pozoroval, jak slunce dne 26. května ve 3 hod. odp. zachází za stěnu okna. Jaký směr má stěna toho domu? Na pražských Příkopech nebylo 16. srpna o 10. hod. ranní ani stínečku. V jakém směru jdou Příkopy?

IV. Konečně lze přístroje upotřebiti jako slunečních hodin horizontálních i vertikálních na kterékoliv šířce zeměpisné. K tomu účelu připojena jest ku přístroji tyčinka, jejíž stín při určité poloze stroje stanoví pravý čas sluneční.

Zařízení to jest důležito a výhodno hlavně pro toho, kdo by si chtěl sestrojiti jmenované sluneční hodiny, neznaje jejich pravidel konstruktivních.

Dovolujeme si na základě referátu tohoto velmi vřele doporučiti přístroj a dokládáme, že bude vydán též v jazyku francouzském a německém.

G. Gruss.

Úlohy.

Úloha 1.

Je-li n libovolné číslo celé, jest výraz

$$n\,(n^4 + 35n^2 + 24)$$

dělitelný 60ti. Proč?

Řešení. (Zaslal p *Josef Půček,* stud. VIII. tř. g. v Olomouci).

Z 5ti po sobě následujících celých čísel jsou nejméně 2 dělitelna 2ma, nejméně jedno dělitelno 3mi, aspoň jedno dělitelno 4mi a jedno dělitelno 5ti. Proto jest součin

$$\begin{aligned} A &= n\,(n+1)\,(n+2)\,(n+3)\,(n+4) \\ &= n\,(n^4 + 10n^3 + 35n^2 + 50n + 24) \end{aligned}$$

a rovněž i součin

$$B = n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$$
$$= n(n^4 - 10n^3 + 35n^2 - 50n + 24)$$

dělitelný $2 . 3 . 4 . 5 = 120$ti. Ježto pak

$$\frac{A+B}{2} = n(n^4 + 35n^2 + 24),$$

jest výraz poslední dělitelný 60ti.

Jiné řešení. (Zaslal p. *Bohumil Voženílek,* stud. VII. tř. r. na Malé Straně v Praze).

Položme

$$n(n^4 + 35n^2 + 24) = 60p;$$

že výraz daný při $n = 1, 2, 3, \ldots$ jest 60ti dělitelný, snadně se můžeme přesvědčiti. Dokažme, že platí-li dělitelnost při hodnotě n, nutně pak platnou jest i při $n+1$; indukcí touto stvrzena bude správnost věty pro všechna čísla celá. Klademe-li v hořejší rovnici $n+1$ místo n, bude

$$5n(n^3 + 2n^2 + 23n + 22) + 60(p+1) = p_1;$$

p_1 jest tedy dělitelno 60ti, je-li součin

$$n(n^3 + 2n^2 + 23n + 22) = 12q,$$

t. j. 12ti dělitelný. K tomu užijeme opět úsudku z n na $n+1$. Obdržíme tak

$$4n(n^2 + 3n + 14) + 12(q+4) = q_1;$$

tu pak záleží již jen na součinu

$$n(n^2 + 3n + 14) = 3r,$$

je-li totiž dělitelný 3mi. Položíme-li v něm $n+1$ místo n, vyjde

$$3(n^2 + 3n + r + 6) = r_1,$$

kterýž výraz zřejmě jest 3mi dělitelným. Ze správnosti rovnice předposlední plyne pak správnost rovnic předcházejících i posléze rovnice první. Tím věta dokázána.

Úloha 2.

Kolikaciferná jest hodnota čísla 777^{777}? Kterou číslicí počíná a kterou končí tato hodnota?

Řešení. (Zaslal p. *Václav Havlíček,* stud. VI. tř. r. v Písku).

Je-li
$$x = 777^{777},$$
bude
$$\log x = 777 \,.\, 2{\cdot}89042 \ldots = 2245{\cdot}85634 \ldots$$
s chybou
$$0{\cdot}000005 \times 777 = 0{\cdot}00389.$$
Jest tedy
$$2245{\cdot}85245 < \log x < 2245{\cdot}86023$$
a proto
$$7119 \ldots < x < 7248 \ldots$$

Hledaná hodnota jest tudíž číslem majícím 2246 míst a první číslice jest 7. Abychom ustanovili poslední číslici, všimněme si mocnin čísla 7. Je-li mocnitel
$$4n + 1, \quad 4n + 2, \quad 4n + 3, \quad 4n + 4,$$
končí mocnina číslicí 7, 9, 3, 1.

Poslední číslice x jest táž jako při 7^{777} a jelikož $777 = 4 \,.\, 199 + 1$, jest číslice ta rovněž 7.

Úloha 3.

Ručičky na hodinách svíraly mezi 3. a 4. hodinou úhel téměř přímý a měly při tom takovou polohu, že kdyby hodinová a minutová vyměnily navzájem své místo, ukazovaly by jiný správný čas. V kterou dobu to bylo?

Řešení. (Zaslal p. *Vítězslav Vic,* stud. VIII. tř. g. v Chrudimi).

Ručička hodinová vykoná v téže době dráhu 12krát menší než minutová. V původní poloze ukazovaly ručičky 3 hod. x minut, ve druhé 9 hod. y minut, vede tedy úloha k rovnicím
$$x + 3 \,.\, 60 = 12y$$
$$y + 9 \,.\, 60 = 12x,$$
jejichž řešením plyne
$$x = 46{\cdot}57 \ldots, \quad y = 18{\cdot}84 \ldots$$

Původně tedy ručičky ukazovaly

3 hod. 46 min. 34 sek.;

kdyby svá místa navzájem vyměnily, ukazovaly by

9 hod. 18 min. 50 sek.

Úloha 4.

Kolik prvků dá o 441 kombinací s opakováním více než bez opakování a) ve 3tí třídě, b) v 5té třídě?

Řešení. (Zaslal p. *Josef Žďárský,* stud. VIII. tř. g. v Ml. Boleslavi).

a) Úloha vyžaduje, aby se řešila rovnice

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{6} - \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = 441,$$

která po snadné úpravě přechází ve

$$n^2 - 441 = 0.$$

Jest tedy počet prvků $n = 21$.

b) V tomto případě jde o řešení rovnice

$$\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{120} - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{120} = 441$$

čili

$$n^4 + 5n^2 - 2646 = 0,$$

z níž vychází kladná celistvá hodnota, udávající počet prvků

$$n = 7.$$

Úloha 5.

Řešiti soustavu rovnic

$$1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2} + \frac{8}{x^3} + \ldots = \frac{2y+1}{y-1}$$

$$1 - \frac{3}{y} + \frac{9}{y^2} + \frac{27}{y^3} + \ldots = \frac{x+1}{3x-2}.$$

Řešení. (Zaslal p. *Viktor Kidles,* stud. VI. tř. r. na Malé Straně v Praze.)

Za podmínky konvergence nekonečných řad daných lze dané rovnice psáti v podobě

$$\frac{x}{x-2} = \frac{2y+1}{y-1}, \quad \frac{x+1}{3x-2} = \frac{y}{y+3},$$

čili

$$xy + 2x - 4y = 2$$
$$2xy - 3x - 3y = 3.$$

Vyloučíce y, obdržíme kvadratickou rovnici

$$7x^2 - 19x - 6 = 0,$$

z níž nalezneme

$$x_1 = 3, \quad x_2 = -\frac{2}{7};$$

k tomu přísluší

$$y_1 = 4, \quad y_2 = -\frac{3}{5}.$$

Jelikož dané řady jsou sbíhavé jen při $x > 2$, $y > 3$, mají platnost pouze vypočítané hodnoty x_1, y_1.

Správné řešení úloh zaslali pp.:

Ignác Deyl, stud. VII. tř. r. v Pardubicích, úl. 4.
Oldřich Duda, stud. V. tř. g. v Uh. Hradišti, úl. 1.
Josef Frieb, stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 1. až 5.
Josef Grohman v Ivanovicích na Moravě, úl. 2., 5.
Václav Havlíček, stud. VI. tř. r. v Písku, úl. 2., 3.
Richard Holl, stud. VII. tř. g. v Žitné ulici v Praze, úl. 1., 2., 3., 5.
Jan Horák, stud. VIII. tř. g. v Uh. Hradišti, úl. 2., 5.
Vladimír Ibl, stud. VII. tř. r. v Ječné ulici v Praze, úl. 4., 5.
Rudolf Jambor, stud. VII. tř. g. ve Val. Meziříčí, úl. 2., 3.
Jan Kapras, stud. VI. tř. g. v Brně, úl. 2., 3.
Viktor Kidles, stud. VI. tř. r. na Malé Straně v Praze, úl. 1., 5.
František Klein, stud. VII. tř. g. v Roudnici, úl. 2.
Bohumil Kloboučék, stud. V. tř. r. v Pardubicích, úl. 3.
Josef Kugler, stud. VII. tř. r. v Ječné ulici v Praze, úl. 4., 5.
František Lorenc, stud. VII. tř. g. v Roudnici, úl. 2.
Bohuslav Masák, stud. VII. tř. r. v Ječné ulici v Praze, úl. 2. až 5.
Vilibald Mildschuh, stud. VII. tř. g. v Kroměříži, úl. 1. až 5.
Rudolf Milota, stud. VI. tř. g. v Písku, úl. 1., 3., 4., 5.

Otakar Neudörfl, stud. VIII. tř. g. v Pelhřimově, úl. 2., 5.
Otto Ottis, stud. VI. tř. g. v Plzni, úl. 1. až 5.
Petr Pecl, stud. VII. tř. g. v Klatovech, úl. 1. až 5.
Josef Půček, stud. VIII. tř. g. v Olomouci, úl. 1. až 5.
Josef Rieger, stud. VI. tř. r. v Jičíně, úl. 2., 3., 4.
Antonín Ringl, stud. VIII. tř. g. ve Vys. Mýtě, úl. 4.
Rudolf Rolíček, stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 1. až 5.
Augustin Straka, stud. VI. tř. g. v Brně, úl. 2., 3.
J. Suchý, stud. VII. tř. g. v Roudnici, úl. 2.
Karel Šindelář, stud. VII. tř. r. v Pardubicích, úl. 2.
Antonín Štěpánek, stud. VII. tř. r. v Písku, úl. 2., 3.
František Štrajt, stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 1. až 5.
Rudolf Tereba, stud. VII. tř. g. ve Val. Meziříčí, úl. 2., 3.
Oskar Tomandl, stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 1. až 5.
Josef Vafek, stud. VIII. tř. g. v Třebíči, úl. 2., 3., 4.
Vítězslav Vic, stud. VIII. tř. g. v Chrudimi, úl. 2., 3., 4.
František Vodseďálek, stud. VII. tř. r. v Hradci Králové, úl. 1. až 4.
Bohumil Voženílek, stud. VII. tř. r. na Malé Straně v Praze, úl. 1. až 5.
Antonín Vyhlídal, stud. VIII. tř. g. v Přerově, úl. 1., 2., 4., 5.
František Záviška, stud. VI. tř. g. v Brně, úl. 1., 2., 3.
Otakar Zich, stud. VII. tř. g. v Křemencové ulici v Praze, úl. 2.
Josef Žďárský, stud. VIII. tř. g. v Ml. Boleslavi, úl. 3., 4., 5.

Úloha 61.

Řešiti rovnici

$$47(x^2 - x + 5)^2 - 19(x^2 + x + 5)^2 = x^2.$$

Prof. *A. Strnad.*

Úloha 62.

Řešiti rovnici

$$\log \sqrt{3x-5} + \log \sqrt{7x-3} = 1 + \log \sqrt{0\cdot 11}.$$

Týž.

Úloha 63.

Zvětšíme-li celé číslo x o celé číslo y, zmenší se převratná hodnota čísla prvního o $\frac{1}{12}$ čísla druhého. Která jsou čísla x a y?

Týž.

Úloha 64.

Lze-li rovnoramennému lichoběžníku o půdicích a, b vepsati kružnici, jsou dotyčné body vrcholy dvojstředového deltoidu. Vyšetřiti obsah tohoto čtyrúhelníka a poloměr kružnice jemu vepsané.

Prof. *A. Strnad.*

Úloha 65.

Nad každou stranou rovnostranného trojúhelníka jakožto půdicí sestrojen rovnoramenný trojúhelník, jehož rameno jest a. Tím vznikne rovnostranný šestiúhelník, jehož obsah má se k obsahu rovnostranného trojúhelníka jako m : n. Vypočítati stranu tohoto trojúhelníka. *Týž.*

Úloha 66.

Trojúhelník rozděliti na tři stejné díly příčkami kolmými ku půdici. *Týž.*

Úloha 67.

Pravidelný n-úhelník o kruh opsaný promítnut do roviny, s kterou rovina jeho svírá úhel φ. Průmět rovná se obsahem pravidelnému n-úhelníku vepsanému do téhož kruhu. Jest vyšetřiti velikost úhlu φ pro $n = 3, 4, 5, \ldots \infty$. Prof. *F. Hromádko.*

Úloha 68.

Dokažte, že obsah pravoúhlého rovnoběžnostěnu rovná se součinu z jeho úhlopříčky a řezu čtyrúhelného k ní kolmého.

Prof. *A. Strnad.*

Úloha 69.

Rovina rovnoběžná s protějšími hranami a, b čtyrstěnu, protíná jej v rovnoběžníku. Jsou-li x, y strany tohoto řezu, dokažte, že jest

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Týž.

Úloha 70.

Nad stranami pravoúhlého trojúhelníka sestrojeny čtverce, které otáčejíce se kolem přepony vytvoří tři tělesa. V kterém poměru jest součet těles vytvořených čtverci nad odvěsnami a, b k tělesu vzniklému čtvercem nad přeponou? Prof. *A. Strnad.*

Úloha 71.

Dokažte, že obsah pravidelného dvacetistěnu rovná se $\frac{2}{3}$ součinu z obsahu pravidelného pětiúhelníka, určeného koncovými body hran z jednoho vrcholu vycházejících a z průměru koule opsané.

Týž.

Úloha 72.

Ustanoviti úhly trojúhelníka, ve kterém příčka půlící úhel γ má se ku příčce půlící vnější úhel γ' jako $(\sqrt{3}-\sqrt{2}):(\sqrt{3}+\sqrt{2})$.

Týž.

Úloha 73.

Ustanoviti bod, jehož zčtercované vzdálenosti od bodů

$$a(-3, 5),\ b(7, 2),\ c(2, 8)$$

mají součet minimálný. *Týž.*

Úloha 74.

Do kosočtverce vepsána ellipsa maximalného obsahu. Máme-li její tečny za poláry ellipsy kosočtverci opsané, které jest geometrické místo polu? *Aug. Haas.*

Úloha 75.

V trojúhelníku ABC jest půdice AB pevna a vrchol C proměnlivý. Vyšetřiti geom. místo tohoto vrcholu, je-li poloměr kružnice při půdici zevně vepsané roven n-násobnému poloměru kružnice v trojúhelník vepsané. *Týž.*