Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Antonín Libický

Základové geometrického počtu Grassmannova. [I.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 25 (1896), No. 3, 187--198

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122000`

Základové geometrického počtu Grassmannova.

Podává **A. Libický**, professor v Roudnici.

Přede dvěma lety bylo tomu padesát roků, co vyšel jeden z vynikajících spisů mathematické literatury tohoto století, nadepsaný: „Die lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik, dargestellt von H. Grassmann.“ Jest známo, jakým nepříznivým osudem toto pozoruhodné dílo bylo postiženo; zůstaloť po dlouhou řadu let nepovšimnuto a v odborných časopisech, té doby vycházejících, nenalézáme ani stopy po tom, že by zásady Grassmannem vyslovené byly nalezly nějakého pěstovatele a vzdělavatele. Spisovatel, domnívaje se, že příčinou tohoto neúspěchu jest forma spisu, která jest spíše filosofická než mathematická, zpracoval nauku svou r. 1862 po druhé, uživ tu formy mathematikům obvyklejší (Die Ausdehnungslehre. Vollständig und in strenger Form bearbeitet von H. Grassmann.). Avšak ani pak nebyla knize věnována pozornost, které vším právem zasluhovala, třeba že ta odvětví mathematiky, jež s ní úzce souvisí, jako jsou: Möbiusův počet barycentrický, Bellavitisova methoda aequipollencí, Saint-Venantův pojem geometrického součinu a zvláště Hamiltonova theorie vektorů, docházela čím dále, tím většího rozšíření a užívání. Teprve v nejnovější době jeví se potěšitelný obrat k lepšímu, jednak tím, že se vydávají spisy, pojednávající o Grassmannově Ausdehnungslehre neb o některé části její, jednak tím, že se v odborných časopisech častěji vyskytují články, jichž účelem jest, dále vzdělávati nauku tu a ukázati její prospěšnost.*)

Abych přispěl k rozšíření známosti theorie Grassmannovy u nás, zpracoval jsem tyto základy geometrického počtu, které jsou vlastně užitím obecných zásad a vět, jimž učí Ausdehnungslehre, na geometrii. Nelze popříti, že v tomto zpracování mnohé definice, k jichž úplnému vysvětlení a porozumění jest třeba

*) Úsudky některých anglických mathematiků o Ausdehnungslehre uvedeny jsou v Nature (Vol. XLVIII, 1893); tak praví *Clifford*: „Budiž mi dovoleno, vysloviti svůj hluboký podiv tomuto neobyčejnému dílu; jsem přesvědčen, že zásady v něm obsažené budou mocně působiti v budoucí utváření se vědy mathematické“ (pag. 517). *R. S. Ball* klade znamenité dílo Grassmannovo výše než Hamiltonovo známé dílo o kvaternionech (pag. 391.).

znáti celou nauku, zdají se býti do jisté míry libovolnými; za to jest předností této části Ausdehnungslehre, že jest názornou a tudíž především způsobilou, býti průpravou ke studiu díla Grassmannova, jež jest zvláště znesnadněno velice abstraktním rázem pojmů a pouček v něm obsažených. Příkladů, jimiž by se jednotlivé věty objasňovaly a užitečnost celé theorie ještě ve větší míře objevila, téměř neuvádím, poněvadž by tím objem článku velmi vzrostl; přihlížel jsem však ku všem pojmům i poučkám, kterých se může v theoretické mechanice použíti, i lze tento článek pokládati též za úvod k mechanice zbudované na zásadách Grassmannových *).

Úvod.

Základními veličinami geometrickými jsou dle Grassmanna *vektor* a *bod hmotný*. Charakteristickými známkami vektoru jsou jeho běh a jeho délka; charakteristickými známkami bodu hmotného jsou jeho místo v prostoru a jakýsi numerický součinitel (jeho hmota), který mu přisuzujeme, rozeznávajíce jej tak od bodu geometrického. Metrickými součástkami vektoru a bodu, kterými se z geometrických útvarů, totiž přímky určitého běhu a bodu geometrického stávají veličiny, jsou tedy: délka vektoru a součinitel bodu.

O dvou vektorech, jež mají týž běh a touž délku, říkáme, že se sobě rovnají; podobně jsou dva body sobě rovnými, ná-

---

*) Mimo obě připomenutá vydání Grassmannovy „Ausdehnungslehre“ použil jsem ještě těchto pramenů: *H. Grassmann*: „Geometrische Analyse geknüpft an die von Leibniz erfundene geometrische Charakteristik. Mit einer erläuternden Abhandlung von *A. F. Möbius*“; „System der Raumlehre. Von *V. Schlegel*“; *Hankel*: „Vorlesungen über die complexen Zahlen“; *G. Peano*: „Die Grundzüge des geometrischen Calculs“; *F. Kraft*: „Abriss des geometrischen Kalküls“; dále částečně článků: „Preliminary Sketch of Biquaternions. By Prof. *Clifford* (Proceedings of the London Mathematical Society. Vol. IV.); *Everett*: „On a new method in statics and kinematics (The Messenger of Mathematics. Vol. IV.); *E. Müller*: „Die Liniengeometrie nach den Principien der Grassmann'schen Ausdehnungslehre“ (Monatshefte für Mathematik und Physik, II. Jahrg.); *Carvallo*: „La méthode de Grassmann“ (Nouvelles Annales de Mathématiques, 1892). Též použil jsem na několika místech rukopisu spisku Dr. *Lásky*: „Die Ausdehnungslehre,“ který mi spisovatel laskavě zapůjčil, začež mu tuto díky vzdávám.

ležejí-li jim i totéž místo v prostoru i týž součinitel. Jsou-li dány dva vektory téhož běhu (vektory rovnoběžné), můžeme posloupným kladením jednoho podél druhého ustanoviti, kolikrát jest délka tohoto obsažena v délce onoho; výsledkem bude číslo poměrné, o kterém chceme zatím předpokládati, že jest absolutní. Zavedeme-li pro vektory označení malými písmeny latinskými a pro čísla malými písmeny řeckými, značí αa vektor rovnoběžný s vektorem a, jehož délka jest α-krát větší než délka vektoru a. Podobně jest αA bod soumístný s bodem A, který má α-krát větší součinitel než součinitel bodu A. Budeme-li některé vektory (různých běhů) pokládati za jednotky (relativní), označíme je písmeny i, j, k. Mezi body hmotnými odpovídají těmto vektorům body *jednoduché,* jichž součinitel rovná se jednotce; body o jiných součinitelích slovou pak *mnohonásobnými.*

Z těchto základních veličin geometrických odvodíme určitými změnami v poloze jejich později veličiny složitější; každé z nich přisuzujeme jakýsi *stupeň,* jenž souvisí se způsobem, kterým byla vytvořena.

Veličiny stejným způsobem odvozené mají stejný stupeň, jsou *stejnorodé.* Vektor a bod hmotný jsou veličiny stupně prvého.

S veličinami geometrickými provádíme rozličné výkony početní tak jako v arithmetice počítáme čísly. Za tím účelem musíme však upustiti od definic jednotlivých výkonů početních, kterých se užívá v arithmetice elementární a zavésti definice nové, do jisté míry obecnější.

Buďtež a a b dvě veličiny geometrické, spojení jejich nějakou operací početní označme $a \frown b$ a výsledek tohoto spojení $(a \frown b)$. O tomto výsledku předpokládáme, že jest *jednoznačným,* t. j. že se vždy změní, změníme-li jeden člen spojení, na př. a, neměníce při tom členu druhého b. Z tohoto spojení povstává jiné, hledáme-li z daného výsledku $(a \frown b)$ (kratšeji c) a jednoho členu na př. b člen druhý a. Toto odvozené spojení nazýváme jak známo *lytickým,* kdežto původní spojení sluje *thetickým.* Lytické spojení označíme $c \smile a$ neb $c \smile b$ dle toho, který člen spojení thetického $a \frown b$ jest vedle výsledku jeho dán.

Z arithmetiky víme, že základní vlastnosti různých výkonů početních s čísly určují jisté formální principy, jichž též užijeme definujíce výkony s veličinami geometrickými. Jsou to zejména:

1. Princip *associativní,* dle něhož platí pro thetické spojení trojčlenné

$$(a^\frown b^\frown c) = [(a^\frown b)^\frown c] = [a^\frown (b^\frown c)].$$

Je-li tento princip platným pro spojení trojčlenné, platí i pro libovolný počet členů týmž způsobem theticky spojených, jak snadno lze dokázati. Dle tohoto principu lze tedy libovolný počet členů theticky spojených v závorku uzavříti, anebo závorku, před níž jest znamení thetické, prostě vynechati.

2. Princip *kommutativní,* dle něhož výsledek spojení thetického se nemění, vyměníme-li oba jeho členy, t. j.

$$(a^\frown b) = (b^\frown a).$$

Platí-li tento princip pro nějaké thetické spojení dvou veličin, není žádného kvalitativního rozdílu mezi výsledky obou příslušných spojení lytických $(c_\smile a)$ a $(c_\smile b)$.

3. Princip *distributivní.* Poznačíme-li dvě různá thetická spojení veličin $a^\frown b$ a $a\,\hat{\frown}\,b$, jest výrazem tohoto principu rovnice

$$(a^\frown b)\,\hat{\frown}\,c = (a\,\hat{\frown}\,c)^\frown (b\,\hat{\frown}\,c).$$

Thetické spojení veličin, které vyhovuje principu associativnímu a kommutativnímu, nazývá Grassmann *jednoduchým*; v takovém spojení jest pořádek, v němž členy po sobě jdou, libovolným. Vysvítá to z této složené rovnice (kde jsou vynechány závorky na počátku a po rovnítku):

$$a^\frown b^\frown c = a^\frown (b^\frown c) = a^\frown (c^\frown b) = a^\frown c^\frown b.$$

Budiž dáno jednoduché spojení

(1) $$a^\frown b = c,$$

pak platí

(2) $$c_\smile b = a;$$

dosadíme-li za a výraz $(c_\smile b)$ do (1), vznikne rovnice

(3) $$(c_\smile b)^\frown b = c,$$

Je-li výsledek příslušného spojení lytického jednoznačným, obdržíme vložením výrazu $(a^\frown b)$ za c do (2) rovnici

$$(4)\qquad (a^\frown b)_\smile b = a.$$

Rovnice tato nemá platnosti, není-li výsledek lytického spojení $c_\smile b$ jednoznačným, poněvadž pak není a jedinou veličinou, která spojena jsouc theticky s b dává c.

Význam rovnic (3) a (4) jest zřejmý.

Nahradíme-li dle (3) ve spojení trojčlenném $a^\frown b_\smile c$ veličinu b výrazem $(b_\smile c)^\frown c$, můžeme psáti

$$a^\frown b_\smile c = a^\frown[(b_\smile c)^\frown c]_\smile c,$$

aneb, pokládáme-li tu $(b_\smile c)$ za jeden člen, dle principu associativního

$$a^\frown b_\smile c = a^\frown(b_\smile c)^\frown c_\smile c = \{[a^\frown(b_\smile c)]^\frown c\}_\smile c,$$

a konečně dle rovnice (4)

$$a^\frown b_\smile c = a^\frown(b_\smile c).$$

Z toho plyne, že lze při takových spojeních jednoznačných závorku po znamení thetickém klásti neb vynechati i tenkráte, jsou-li uvnitř závorky některé členy spojeny lyticky. Důsledkem toho jest, že i pak nezávisí výsledek na pořádku, v jakém členy po sobě jdou. Jest totiž

$$a^\frown b_\smile c = b^\frown a_\smile c = b^\frown(a_\smile c) = (a_\smile c)^\frown b = a_\smile c^\frown b.$$

Chceme ještě vyšetřiti případy, ve kterých závorka stojí po znamení lytickém. Je-li nejprve

$$a_\smile(b^\frown c) = d,$$

jest dle definice lytického výkonu

$$a = d^\frown(b^\frown c) = d^\frown(c^\frown b) = (d^\frown c)^\frown b;$$

z toho opět jde

$$a_\smile b = d^\frown c,$$

a dále

$$(a_\smile b)_\smile c = d.$$

Srovnáním vychází

$$a \smile (b \frown c) = a \smile b \smile c, \tag{5}$$

vynecháme-li ještě závorku po rovnítku.

Po druhé jest

$$\begin{aligned} a \smile (b \smile c) &= \{[a \smile (b \smile c)] \smile c\} \frown c = \{a \smile (b \smile c) \smile c\} \frown c = \\ &\{a \smile [(b \smile c) \frown c]\} \frown c = \{a \smile [b \smile c \frown c]\} \frown c = a \smile b \frown c, \end{aligned}$$

při čemž jsme použili nejprve rovnice (3), pak (5) (pokládajíce $(b \smile c)$ za jediný člen a píšíce pravou stranu té rovnice napřed) a konečně položili za $(b \smile c \frown c)$ veličinu b.

Vynecháme-li tedy při takových spojeních závorku, před níž jest znamení lytické, jest nám zároveň zaměniti všechna znamení lytická uvnitř závorek v thetická a naopak.

Předeslavše tyto výklady můžeme výkony početní geometrickými veličinami definovati takto:

Vyhledáváme-li ze dvou veličin stejnorodých veličinu kvalitativně stejnou výkonem jednoduchým, jemuž přísluší lytický výkon jednoznačný, *sečítáme.*

Vyhledáváme-li ze dvou veličin veličinu novou výkonem associativním, který souvisí se sečítáním principem distributivním, *násobíme.*

Lytický výkon příslušný k sečítání jest *odečítání* a lytický výkon příslušný k násobení jest *dělení.*

Po tomto krátkém úvodu z mathematického tvarosloví přikročíme ku vlastnímu předmětu tohoto pojednání; ukážeme nejprve, jak se počítá s geom. veličinami stupně prvního, popíšeme veličiny vyšších stupňů, které při tom vznikají a probéřeme konečně některé výkony početní těmito veličinami, pokud jsou důležité.

Počítání geom. veličinami stupně prvního.

Sečítání a odčítání. Je-li dán jednoduchý bod A a vektor a, ustanovíme součet jejich touto úvahou: Připojíme-li vektor a k bodu A tak, aby počátek jeho s místem bodu A v jedno splynul, poznáváme, že stává jednoho bodu v prostoru, který jest k bodu i k vektoru danému v jakémsi určitějším vztahu. Jest to jednoduchý bod B, jehož místem jest konec vektoru a takto položeného. Pokládáme-li tento bod za hledaný součet bodu A a vektoru a, ustanovivše ještě, že právě tak k vektoru přičítáme bod, vyhověli jsme všemu, čeho se dle definice žádá na geom. sečítání dvou veličin; výsledek tohoto thetického spojení jest jednoznačný a veličinou téhož stupně jako oba sčítanci. Poznáváme snadno, že jest též výsledek příslušného spojení lytického jednoznačným. Kdybychom zvolili jiný bod neb nějaký vektor za hledaný součet, bylo by sečítání bodu a vektoru složitějším, v mnohých případech závislým ještě na jiném útvaru, vzhledem k němuž by se poloha součtu ustanoviti musila.

Používajíce k označení tohoto výkonu znaménka v arithmetice obvyklého, píšeme

$$\text{(6)} \qquad A + a = B.$$

V tom smyslu jest vektor a operatorem, který převádí daný bod z jedné polohy A do jiné B.

Příslušný výkon lytický lze vyznačiti rovnicí

$$\text{(7)} \qquad B - A = a,$$

t. j. rozdíl dvou bodů jednoduchých dán jest vektorem, jehož počátek jest místo menšitele a jehož konec jest místo menšence.*)

Přejdeme-li nyní ku sečítání dvou vektorů nebo dvou bodů, vyskytuje se nám nejjednodušší případ ten, že vektory jsou rovnoběžné aneb body soumístné. Jakož netřeba dokazovati, platí pro sečítání dvou rovnoběžných vektorů, jimž lze dáti tvary αa a βa, vzorec

$$\alpha a + \beta a = (\alpha + \beta) a;$$

podobně obdržíme pro sečítání dvou soumístných bodů

$$\alpha A + \beta A = (\alpha + \beta) A.$$

Abychom odečítání rovnoběžných vektorů mohli v každém případě provésti, přisuzujeme vektoru též určitý směr; tím se vysvětlují vektory, jichž součinitelé jsou čísla algebraická. Dva vektory αa a $-\alpha a$ jsou rovnoběžné, stejně dlouhé, ale směrů

*) Doporučuje se tudíž psáti také $a = -A + B$.

protivných; za součet jejich položíme zatím nullu, podotýkajíce, že zevrubnější výklad o vektoru, jehož součinitel $= 0$, bude podán níže. Ne tak názorné jako vektory jsou body se součiniteli positivními neb negativními; objasňují se někdy hmotami, jichž užívá theoretická fysika k vysvětlení výjevů magnetických. I tu klademe za součet dvou soumístných bodů, jichž součinitelé jsou stejné, ale protivně označené, nullu.

Je-li obecněji sečítati dva vektory

$$a = -A + B \quad \text{a} \quad b = -A' + B'$$

různých běhů, připojíme vektor druhý rovnoběžným pošinutím k prvnímu tak, aby jeho počátek A′ v jedno splynul s koncem B vektoru a; i bude hledaným součtem vektor $-A+C$, jehož počátek jest bod A a jehož konec C jest koncem vektoru druhého, uvedeným způsobem umístěného. S tímto sečítáním vektorů souvisí sečítání dvou bodů jednoduchých A a C. Buď D bod jednoduchý, jehož místem jest bod rozpolovací vektoru c, který jsme právě stanovili jako součet daných vektorů a a b. Kladouce v rovnici

$$a + b = c$$

hodnoty $a = -A + B$, $b = -B + C$, $\frac{c}{2} = -A + D$, nabudeme rovnice

$$(-A + B) + (-B + C) = 2(-A + D),$$

aneb, poněvadž $B - B = 0$,

$$-A + C = -2A + 2D.$$

Přičteme-li na obou stranách této rovnice 2A a sloučíme-li, obdržíme

$$A + C = 2D,$$

t. j. součet dvou bodů jednoduchých A a C jest bod, uprostřed vektoru $-A + C$ ležící, jehož součinitel $= 2$.

Vytkněme nyní na vektoru $-A + C$ místo jiného bodu E, jehož polohu určíme vzhledem k místům bodů základních A a C poměrem

$$(a) \qquad \frac{-A + E}{-E + C} = \frac{\gamma}{\alpha}.$$

Vedeme-li ještě vektor $-B+E=e$, vycházejí z bodu B tři vektory, totiž $a=-B+A$ (tedy ve směru protivném ku směru, který měl prve jako sčítanec), $c=-B+C$ (označený výše b) a $e=-B+E$. Dosadíme-li v rovnici (a) za A, C a E hodnoty $a+B$, $c+B$ a $e+B$, dostaneme

$$(b) \qquad \frac{e-a}{c-e}=\frac{\gamma}{\alpha}.$$

Z (a) a (b) vycházejí rovnice

$$(8\,a) \qquad \alpha A+\gamma C=(\alpha+\gamma)E,$$

$$(8\,b) \qquad \alpha a+\gamma c=(\alpha+\gamma)e\,.$$

Pokládáme-li v rovnici ($8\,a$) čísla α a γ za součinitele bodů, jichž místa jsou A a C, poznáváme z toho, jak se sčítají body mnohonásobné. Součtem bodů mnohonásobných αA a γC jest bod, jehož místo rozděluje délku vektoru $-A+C$ v poměru $\frac{\gamma}{\alpha}$ a jehož součinitel rovná se součtu součinitelů daných sčítanců.

Ze zvláštních případů, které se tu mohou vyskytnouti, buď uveden toliko jeden: hodnota poměru $\frac{\gamma}{\alpha}=-1$. Z této podmínečné rovnice jde, že $\alpha+\gamma=0$, tedy jest součtem těchto bodů bod 0E, jehož místem jest patrně bod úběžný, daný během vektoru $-A+C$. Tím jsme dospěli k významu bodu, jehož součinitel rovná se nulle; bod ten lze nahraditi vektorem, který během svým stanoví místo jeho. Jsme tudíž oprávněni říkati: bod úběžný jest místem vektoru. Podobně se stane z vektoru geometrický bod, je-li délka jeho rovna nulle; jak již výše bylo vytčeno, klademe v počtu geometrickém i za bod geometrický i za běh přímky nullu.

Pomíjejíce tuto sečítání několika vektorů různých běhů pomocí lomené čáry z daných sčítanců sestrojené, přikročíme ku stanovení součtu několika bodů mnohonásobných

$$\alpha_1A_1+\alpha_2A_2+\ldots+\alpha_nA_n.$$

Volíme-li libovolný bod O v prostoru a vedeme-li vektory

$-\mathrm{O}+\mathrm{A}_k$, které označíme krátce a_k, můžeme hledaný součet vyjádřiti též takto:

$$(9)\quad \sum_1^n \alpha_k \mathrm{A}_k = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_n a_n + (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)\mathrm{O}.$$

Součet vektorů $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_n a_n$ na pravé straně této rovnice jest obecně nějaký vektor, jehož $(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)$tý díl budiž s; tudíž lze psáti, klademe-li ještě

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = \sigma,$$

$$(10)\quad \sum_1^n \alpha_k \mathrm{A}_k = \sigma(\mathrm{O} + s).$$

Buď dána ještě jiná soustava mnohonásobných bodů

$$\beta_1 \mathrm{B}_1,\ \beta_2 \mathrm{B}_2, \ldots, \beta_m \mathrm{B}_m,$$

jichž součet jest též určiti; pak obdržíme podobně, volíme-li zase bod O za společný počátek vektorů b_k,

$$\sum_1^m \beta_k \mathrm{B}_k = \sigma_1(\mathrm{O} + s_1).$$

Mají-li se oba tyto součty sobě rovnati, aneb jinak řečeno, mají-li býti *rovnomocnými*, musí se vyhověti těmto podmínkám:

$$(11)\quad \begin{aligned} \sigma &= \sigma_1, \\ s &= s_1. \end{aligned}$$

Obě tyto rovnice nepozbývají své platnosti, učiníme-li místo bodu O jakýkoli jiný bod O′ počátkem všech vektorů. O první rovnici jest to bezprostředně zřejmo; co se pak týče obou součtů vektorů, pišme nejprv

$$a_k = -\mathrm{O} + \mathrm{A}_k = (-\mathrm{O}' + \mathrm{A}_k) + (-\mathrm{O} + \mathrm{O}'),$$

načež

$$\Sigma \alpha_k a_k = \Sigma \alpha_k a'_k + \sigma(-\mathrm{O} + \mathrm{O}'),$$

tudíž, dělíme-li σ a uvážíme-li, že

$$\frac{1}{\sigma}\Sigma \alpha_k a_k = s, \qquad \frac{1}{\sigma}\Sigma \alpha_k a'_k = s',$$

$$s = s' + (-O + O');$$

podobně obdržíme pro $\sigma_1$tý díl $\Sigma\beta_k b_k$:

$$s_1 = s'_1 + (-O + O'),$$

a z obou těchto vzorců, je-li $s = s_1$, též

$$s' = s'_1.$$

Jsou tedy součty dvou soustav bodových rovnomocnými, rovnají-li se sobě jednak oba součty součinitelů příslušných sčítanců, jednak součty vektorů, vedených z libovolného bodu v prostoru k bodům jedné i druhé soustavy. Podmínky ty lze též takto vysloviti: Dva součty $\Sigma\alpha_k A_k$ a $\Sigma\beta_k B_k$ jsou rovnomocnými, jestliže pro dva body v prostoru O a O′ platí

$$\Sigma\alpha_k(-O + A_k) = \Sigma\beta_k(-O + B_k)$$
$$\Sigma\alpha_k(-O' + A_k) = \Sigma\beta_k(-O' + B_k).$$

Poněvadž $O + s$ se rovná nějakému bodu S, jest

$$\sum_1^n \alpha_k A_k = \sigma S, \tag{12}$$

čímž řešen jest nejjednodušší případ aequivalence dvou soustav bodových, když totiž soustava druhá jest toliko jediný bod. Součinitel toho bodu jest pak $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n$ a polohu jeho stanoví vektor

$$s = \frac{1}{\sigma}(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_n a_n). \tag{13}$$

Z toho poznáváme, jak se sečítání bodů hmotných převádí na sečítání vektorů. Jsou-li dány body $\alpha_1 A_1$, $\alpha_2 A_2$, $\alpha_3 A_3 \ldots$, jichž součet jest určiti, vedeme k místům jejich vektory z libovolného bodu v prostoru O. Délku každého vektoru

$$a_k = -O + A_k$$

zvětšíme α_k-krát (v témž směru, je-li součinitel α_k kladný a v protivném směru, je-li záporný) a takto změněné vektory známým způsobem sečteme. Na vektoru, který tím obdržíme, ustanovíme bod S, jehož vzdálenost od počátku O se má k délce celého vektoru jako

$$1:(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_n).$$

Tento bod jest místem hledaného součtu daných bodů.

Provedeme-li tutéž konstrukci vzhledem k jinému bodu O′, bude součet vektorů $\Sigma\alpha_k a'_k$ zase procházeti bodem S. Měníme-li polohu bodu O′, mění se ovšem též hodnota součtu $\Sigma\alpha_k a'_k$; splyne-li bod O′ s bodem S, rovná se $\Sigma\alpha_k a'_k$ nulle. Užijeme-li rovnice $s'=-\mathrm{O}'+\mathrm{S}$, jest

$$\Sigma\alpha_k a'_k=\sigma(-\mathrm{O}'+\mathrm{S}),$$

tedy stálý pro všechny body O′, nalezající se na povrchu koule, opsané kolem bodu S.

Ve zvláštním případě může $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_n=0$; pak jest dle (9):

$$\Sigma\alpha_k\mathrm{A}_k=\alpha_1 a_1+\alpha_2 a_2+\alpha_3 a_3+\ldots+\alpha_n a_n,$$

t. j. součet hmotných bodů rovná se tu vektoru, jehož běh i délka nezávisí na poloze počátku, který volíme pro vektory a_k. Výsledek ten jest v úplné shodě s rovnicí (12), dle které též

$$\Sigma\alpha_k\mathrm{A}_k=\mathrm{OS},$$

vzpomeneme-li toho, co jsme výše pověděli o významu bodu, jehož součinitel roveň jest nulle.

Již z rovnic (8*a*) a (8*b*), obecněji však z rovnic (12) a (13) vychází, že rovnice, jejíž obě strany tvoří součty bodů mnohonásobných, zůstává rovnicí, nahradí-li se příslušné body jednoduché vektory, k místům jejich z libovolného bodu v prostoru vedenými. Mohou tedy v těchto případech takové vektory zastupovati body, pokud jsou veličinami geometrickými.

(Pokračování.)