

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Augustin Žáček

O sesilovači stejnosměrného proudu. [I.]

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 50 (1921), No. 1, 1--23

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/122278>

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1921

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

O sesilovači stejnosměrného proudu.

Napsal August Žáček.

Obsah:

- I. Část teoretická.
 - Elektronové lampy o dvou elektrodách.
 - Elektronové lampy s mřížkou: 1. Vlastnosti lampy. 2. Konstanty lampy a jich měření
 - Teorie sesilovače stejnosměrného proudu.
 - Kompensační metody k určování S , D , R_i .
- II. Část experimentální.
 - Jednolampový sesilovač.
 - Dvojlampový sesilovač.
 - Měření veličin S , D , R_i .

V Comptes Rendus pařížské Akademie (svazek 168, str. 1321 - 3, r. 1919) udávají Henry Abraham a Eugène Bloch konstrukci sesilovače stejnosměrného proudu těmito slovy: „Obsahuje-li anodový kruh lampy odpor velikosti vnitřního odporu lampy (ca 50.000 *ohmů*), způsobují variace napětí na mřížce variace anodového proudu a tím i variace napětí na koncích odporu. Tyto variace napětí lze přenášeti přímo na mřížku následující lampy, zařadíme-li do vedení pomocnou baterii, jež dává mřížce takové střední napětí, při kterém lampa pracuje nejlépe. Opakujeme-li toto uspořádání, dostáváme odporový sesilovač pro všechny frekvence, speciálně i pro frekvence nejnižší, ba dokonce i pro proud stejnosměrný. Poněvadž napětí pomocné baterie mezi dvěma lampami se dá měnit pouze skokem (vždy o 2 *voly*. užíváme-li akumulátorů), takže není možno přesně naregulovati potenciál mřížky, doporučuje se zařaditi do anodového kruhu ještě malý, proměnlivý odpor, jímž možno žádané napětí na mřížce naregulovati úplně přesně. Ta okolnost, že vedle topné a anodové baterie je třeba ještě dalších baterií pomocných, způsobuje, že se toto uspořádání nehodí pro frekvence radiotelegra-

fické a akustické, za to jest užitečné při frekvencích velmi nízkých a nutné při sesilování stejnosměrného proudu pomocí lamp.“

Autoři neuvádějí, jakým způsobem měří variace napětí na odporu v anodovém kruhu poslední lampy, necitují žádných dat a pozorování, z nichž-by bylo možno posouditi cenu popsaného sesilovače. Konečně postrádáme v jejich popisu údajů o tom, jaké vlastnosti mají míti užité lampy a jak má býti sesilovač konstruován, aby jeho účinnost byla co největší.

Lze očekávati, že tohoto sesilovače bude hojně používáno při fyzikálních pracích a to hlavně pro proud stejnosměrný; nebude tedy od místa, všimnouti si blíže těch otázek, jimž jmenování autoři nevěnovali pozornosti.

Podám proto v prvním oddílu této práce teorii sesilovače stejnosměrného proudu, u něhož se měří výsledná změna napětí na koncích odporu poslední lampy galvanometrem v kompenzačním uspořádání. Z odvozeného vzorce ihned vyplyne závislost citlivosti sesilovače na konstantách lamp, dále poznáme při tom směrnice pro konstrukci sesilovače; uvidíme konečně, kdy užití sesilovače jest výhodné a kdy nemá významu. Při odvozování tohoto vzorce vycházíme z pojmu charakteristik a pojmů z nich odvozených, jež se tolik osvědčily při teoretickém projednávání ostatních aplikací lamp. Proto v úvodu tyto pojmy, jež zavedli Schottky a Barkhausen, krátce vyložíme.

Kompenzační uspořádání, o němž jsme mluvili, dovoluje vypracovati velmi přesnou a jednoduchou metodu k měření charakteristických dat elektronových lamp. Podáme proto ku konci prvního oddílu popis této metody, pokud vím, dosud nepopsané a odvození příslušných vzorců.

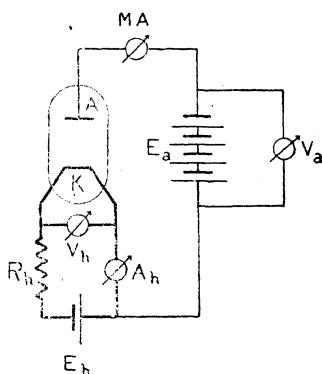
Druhý díl práce — experimentální — obsahuje nejprve měření se sesilovačem jednolampovým a dvojlampovým, z nichž je patrný souhlas odvozených formulí s měřeními. Další měření týkají se určování charakteristických dat lamp novou metodou.

I Část teoretická.

Elektronové lampy o dvou elektrodách.

Tak zvané elektronové lampy jsou vakuové trubice o extrémně vysokém zředění (ca 10^{-4} mm) se dvěma, třemi i více

elektrodami. Nejprve si všimneme případu nejjednoduššího, ale pro další výklady základního, totiž elektronové lampy o dvou elektrodách. První elektrodu — „katodu“ — z tenkého wolframového drátu možno „topnou baterií“ E_h zahřáti do bílého žáru. Kruh katody (viz obr. 1.), obsahující katodu K , topnou baterii E_h , ev. těž reostat R_h a aparáty k měření intenzity topného proudu (ampermetr A_h nebo ke katodě paralelně připojený voltmetr V_h), budeme nazývat „topným kruhem“. Druhá elektroda A — zvaná „anodou“ — mívá buď tvar pláště kruhového válce koncentrického s katodou, nebo bývá ve formě deštičky paralelní s katodou. Anoda jest udržována na určité potenciální diferenci vůči



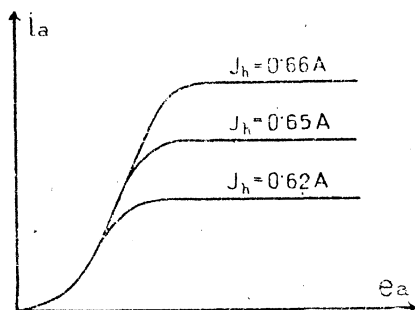
Obr. 1.

katodě a to tím způsobem, že je připojena k jednomu pólu anodové baterie E_a , jejíž druhý pól jest připojen k nějakému bodu topného kruhu; v této práci bude to, jako nejčastěji, negativní pól katody. Kruh, obsahující anodu, anodovou baterii, ev. miliampermetr a prostor v lampě mezi katodou a anodou, nazýváme „anodovým kruhem“. Veličiny, vztahující se na anodový kruh, označíme indexem a ; tak na př. i_a značí proud protékající anodovým kruhem a pod.

Uvedeme-li katodu do bílého žáru, vysílá do okolního vzduchoprázdného prostoru elektrony; je-li anoda připojena k pozitivnímu pólu anodové baterie, je-li tedy na pozitivním potenciálu vůči katodě, přitahuje tyto elektrony, anodovým kruhem protéká „anodový proud“. Tento proud jest tvořen jediné negativními

elektrony vystupujícími z katody a má proto směr proti jejich pohybu, tedy v lampě od anody ke katodě. Je-li anoda připojena k negativnímu pólu anodové baterie, odpuzuje anoda nyní negativně nabitá negativní elektrony ke katodě zpět, lampou neprochází žádný proud. Vidíme tedy, že elektronová lampa o dvou elektrodách působí jako ventil, propouštějící proud pouze jedním směrem.

Tento elektronový proud vyznačuje se naprostou pravidelností a poměrnou jednoduchostí; je ovládán třemi zákony, z nichž každý platí pro jiný obor anodového napětí. Znázorníme-li graficky závislost intenzity anodového proudu na anodovém napětí



Obr. 2.

a teplotě vlákna (resp. intenzitě topného proudu), při čemž intenzitu anodového proudu volíme za ordinátu, anodové napětí za abscisu a teplotu za parametr, dostáváme křivky, zvané „charakteristikami“ (viz obr. 2.).

Pozorujeme-li blíže tyto charakteristiky, vidíme toto: jakmile anodové napětí překročí určité napětí E_s , nezávisí již anodový proud na anodovém napětí, nýbrž nabývá maximální hodnoty J_s , závislé pouze na teplotě a materiálu katody dle Richardsonova vzorce,

$$J_s = Aq\sqrt{T}\varepsilon^{-\frac{B}{T}},$$

(platného pro anodová napětí $e_a > E_s$); při tom značí q povrch žhoucí katody, T její absolutní teplotu, A a B jsou konstanty závislé pouze na materiálu katody, ε exponenciála. J nazýváme „nasyceným proudem“, zjev sám „nasycením“, ono nej-

menší napětí E_s , při němž nasycení nastává, pak „syťcím napětím“. Nasycení nastává, jakmile elektrické pole v lampě nabude takové intenzity, že všechny elektrony, vystupující z katody při dané teplotě vlákna (resp. topném proudu), se odvádějí k anodě.

Je-li anodové napětí menší než napětí syťcím, tu uplatňuje se vliv negativního prostorového náboje, pocházejícího od elektronů letících k anodě; tento vliv jeví se tím způsobem, že letící elektrony odpuzují a zahánějí do katody zpět část elektronů za nimi postupujících, takže všechny elektrony, jež katoda při dané teplotě může vysílati, nedostihnou anody — anodový proud jest menší než proud nasycený. Tento „efekt prostorového náboje“ uplatňuje se tím více, čím větší jest hustota postupujících elektronů (čím je větší spec. emise a tedy i teplota katody) a čím slabší jest elektrické pole, způsobené anodovým napětím.

Pro tento obor anodového napětí ($0 < e_a < E_s$) jest dán anodový proud Langmuirovou formulí

$$i_a = C e_a^{\frac{3}{2}}$$

Konstanta C závisí pouze na dimensích lampy; tak na příklad u lamp s cylindrickou anodou délky l , poloměru r a katodou, nacházející se v ose anody, jest

$$C = 1.465 \frac{l}{r} \cdot 10^{-5},$$

takže můžeme v tomto případě intenzitu anodového proudu přímo vypočítati dle formule

$$i_a = 1.465 \frac{l}{r} e_a^{\frac{3}{2}} \cdot 10^{-5} \text{ amperu.}$$

Z tohoto vzorce vidíme, že anodový proud závisí pouze na dimensích lampy a anodovém napětí, nezávisí však, což jistě překvapuje, na teplotě a průměru katody. Při sesilovačích (jak obvyklých tak i na stejnosměrný proud) pracujeme vždy v tomto oboru charakteristik.

V kapitole, pojednávající o teorii sesilovače, často se setkáme s pojmem koeficientu strmosti S (kratěji budeme mluvíti

prostě o strmosti), jež můžeme již nyní definovati. Jako koeficient strmosti S charakteristiky definujeme směrnicí tečné v daném bodě charakteristiky,

$$S = \frac{\partial i_a}{\partial e_a}.$$

Jak ze vzorce vidíme, má strmost rozměr vodivosti $\frac{\text{amper}}{\text{volt}}$. Derivováním Langmuirovy formule dostáváme pro strmost

$$S = \frac{2}{3} C e_a^{\frac{1}{2}},$$

speciálně pak pro lampy cylindrické v praxi nejčastější jest

$$S = \frac{3}{2} \cdot 1.465 \frac{l}{r} e_a^{\frac{1}{2}} \cdot 10^{-5} \frac{\text{amper}}{\text{volt}}.$$

Jak později poznáme, mají míti dobré sesilovací lampy strmost pokud možno velikou. Z uvedené formule vidíme, jak nutno lampy dimensovati, aby bylo vyhověno této podmínce: nutno voliti dlouhou katodu, anodu pak rovněž dlouhou, ale s malým polo-
měrem. Z úvahy o vlivu prostorového náboje elektronů plyne dále, že nutno tento vliv snížit co nejvíce, chceme-li dostati lampu s velmi strmou charakteristikou; toho se docílí, je-li hustota proudu ve vakuu pokud možno malá (srovn. Schottky-ho lampy s 2 mřížkami).

Pozorujeme-li celkový průběh charakteristiky, vidíme, že pro malá anodová napětí je také strmost malá, s rostoucím napětím roste, nabývá v inflekčním bodě charakteristiky maxima a při ještě dále rostoucím napětí opět neustále klesá, až při nasycení jest strmost opět nulová. Největší strmost má charakteristika v místech mezi $i_a = \frac{1}{2} J_s$ až $i_a = \frac{2}{3} J_s$. V okolí inflekčního bodu probíhá charakteristika jako přímka, t. j. v okolí inflekčního bodu jest strmost S v dosti značném oboru anodového napětí konstantní.

Z katody vystupují elektrony s konečnými, byť velmi malými rychlostmi, rozdělenými na jednotlivé elektrony dle Maxwellova zákona. Většina elektronů má sice při normální teplotě katody tak nepatrnou rychlost, že již napětí anody rovné 0.3 voltu jim brání doběhnouti k anodě. Některé z nich mají však rychlost větší, takže doběhnou i proti větším napětím; ovšem jest jich tím méně, čím postupujeme

k větším rychlostem. Pro anodová napětí negativní a malá pozitivní platí tedy třetí základní zákon:

$$i_a = i_{a0} \varepsilon^{-\frac{e_a}{e_0}};$$

při tom konstanta $e_0 = 8 \cdot 6 \cdot 10^{-5} T$, takže pro obvyklou teplotu $T = 2300^\circ$ jest $e_0 = 0 \cdot 2$ voltu. Z formule vidíme, že, stane-li se e_a o $0 \cdot 2$ voltu negativnější, klesne i_a vždy na $\frac{1}{2 \cdot 7}$ -tou část své dřívější hodnoty; je-li tedy $e_a = -1$ voltu, jest anodový proud prakticky roven nule. Tato vlastnost hraje také u sesilovače stejnosměrného proudu značnou úlohu.

Elektronové lampy s mřížkou.

1. *Vlastnosti lampy.* Elektronové lampy, užívané nyní v praxi, mají vedle katody a anody ještě další elektrodu, zvanou „mřížkou“; u tak zvané cylindrické lampy má mřížka tvar pláště koncentrického válce, umístěného mezi katodou a anodou. Bývá buď tlačena z plechu nebo vinuta ve tvaru spirály z drátu. Je-li anoda rovinná, je také mřížka rovinná a s anodou rovnoběžná.

U elektronové lampy s mřížkou část elektronů, vycházejících ze žhavé katody, letí k anodě (tak zv. „anodový proud“ i_a), část jich dopadá na mřížku a tvoří tak zv. „mřížkový proud“ i_g . Úhrnný počet elektronů, jež katoda vysílá, tvoří tak zvaný „emisní proud“ i_e , pro nějž patrně platí:

$$i_e = i_a + i_g.$$

O tom, jak se emisní proud rozděluje na své složky i_a , i_g , rozhodují potenciály anody a mřížky, jich vzdálenosti od katody, síla drátu a velikost ok mřížky. Pokud jest anodové napětí značné proti napětí mřížky, je také anodový proud značný proti proudu mřížkovému.

Pro další nemá tato otázka významu; budeme totiž vždy udržovati mřížku pomocným negativním napětím E_g na tak značném negativním potenciálu vůči katodě, že mřížka vůbec žádných elektronů neschytává, nýbrž je všechny propouští svými otvory k anodě. V tom případě je

$$\begin{aligned} i_g &= 0, \\ i_e &= i_a. \end{aligned}$$

Všimněme si dále, na čem závisí intenzita i_e emisního proudu; dá se čekat, že bude záviseti jak na napěti anody, tak i mřížky:*)

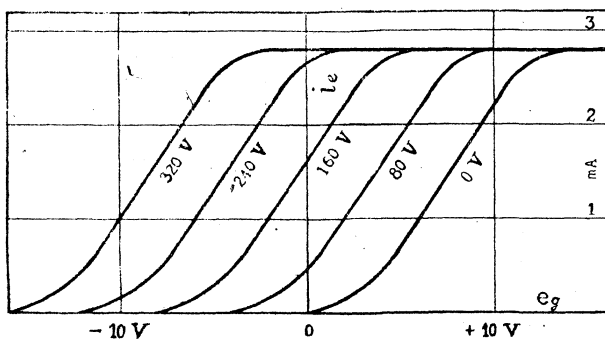
podobně jest

$$i_c = i_c(e_g, e_a),$$

$$i_a = i_a(e_g, e_a),$$

$$i_g = i_g(e_g, e_a).$$

Grafické znázornění emisního proudu v závislosti na obou napětích nazývá se „emisní charakteristikou“. Podobně mluvíme o „anodové charakteristice“ a o „mřížkové charakteristice“; při tom vždy nanášíme proud jako ordinátu, e_g jako abscisu, e_a je parametrem. Nakreslíme-li řadu emisních charakteristik pro různá



Obr. 3.

anodová napětí (obr. 3.), vidíme, že všechny mají též tvar, pouze že jsou navzájem posunuty, a to paralelně s osou abscis. Charakteristiku pro parametr e_a dostaneme z charakteristiky pro anodové napětí rovné nule paralelním posunutím o De_a , kde D jest konstanta. Všimněme-li si pak blíže oně charakteristiky pro $e_a = 0$, vidíme, že má též tvar, jako má charakteristika lampy o dvou elektrodách, kde by mřížka fungovala jako anoda. Z těchto dvou poznatků, získaných pozorováním charakteristik, můžeme usuzovati, že vzorce, uvedené pro lampu o dvou elektrodách, podržují svoji platnost i u elektronových lamp s mřížkou, jen nutno za napětí klásti tak zvané „ekvivalentní napětí“ e_{st} , jež jest vázáno s e_g , e_a jednoduchým vztahem:

$$e_{st} = e_g + De_a.$$

*) V následujících vzorcích značí i_c , i_a a i_g na pravých stranách funkční znamení.

Tak na př. zní Langmuirova formule pro lampu o třech elektrodách :

$$i_e = C (e_g + De_a)^{\frac{3}{2}}.$$

Změníme-li napětí mřížky o de_g a napětí anodové o de_a tak, aby se ekvivalentní napětí tím nezměnilo, t. j. aby

$$de_{st} = de_g + Dde_a = 0,$$

zůstává také intensita emisního proudu nezměněna. Z podmínky $de_{st} = 0$ vypočítáme

$$D = - \left(\frac{de_g}{de_a} \right)_{i_e}.$$

Koeficient D jest aspoň přibližně konstantní, závisí pouze na geometrických dimensích lampy: jest tím menší, čím menší jsou otvory v mřížce a čím jest anoda vzdálenější. Veličina D , již budeme nazývatí koeficientem průniku (krátce také prostě „průnikem“), jest nám vhodnou měrou vlivu, jež má anodové napětí vzhledem k napětí mřížky na emisní proud lampy. Bývá udáván pravidelně v procentech: tak u sesilovacích lamp bývá přibližně $D = 10\%$; to značí, že vzhledem k napětí mřížky uplatňuje se anodové napětí a jeho změny pouze deseti procenty; t. j. změna anodového napětí na př. o 2 volty jest ekvivalentní změně mřížkového napětí o 0·2 voltu. Název *) — průnik — (dle německého Durchgriff) jest volen proto, že D jest měrou toho, jak vliv anodového napětí proniká otvory mřížky ke katodě.

Z toho, co bylo nahoře řečeno, plyne ihned, že vhodnou volbou anodového napětí můžeme dáti charakteristice libovolnou polohu; tak na př. lze snadno docílití, aby rovná část charakteristiky byla v oboru $e_g = -1$ volt až $e_g = -2$ volty, kde, jak jsme viděli, jest $i_g = 0$ a $i_e = i_a$, což jest u sesilovačů velmi důležité. Z toho, co bylo uvedeno o průniku, plyne dále, že k docílení předepsaného posunutí charakteristiky jest potřebí tím většího anodového napětí, čím menší jest průnik.

2. *Konstanty lampy S , D , R ; a jich měření.* U sesilovače budou napětí na mřížce a anodě volena tak, že ve velkém oboru

*) Pojmenování »průnik« vyjadřuje lépe význam veličiny D než Francouzy pro reciprokou hodnotu uzívané »facteur d'amplification«.

mřížkového napětí všechny elektrony budou postupovati pouze k anodě, že bude tedy

$$i_g = 0 \quad \text{a} \quad i_e = i_a.$$

V tomto případě jest již dříve definovaná strmost S dána vzorcem

$$S = \left(\frac{\partial i_a}{\partial e_g} \right)_{e_a};$$

průnik jest potom v souhlase s dřívější definicí:

$$D = - \left(\frac{\partial e_g}{\partial e_a} \right)_{i_a}.$$

Vedle veličin S a D setkáme se v teorii sesilovače ještě s další veličinou lampu charakterisující, t. zv. „vnitřním odporem“ lampy, definovaným vztahem:

$$R_i = \left(\frac{\partial e_a}{\partial i_a} \right)_{e_g}.$$

Jak ze souhrnu charakteristik (obr. 3.) vidíme, není R_i konstantní; pracujeme-li v nejstrmějších místech charakteristiky, jest odpor lampy nejmenší (u sesilovacích lamp ca 30.000 až 50.000 *ohmů*); pro body charakteristiky po obou stranách inflexčního bodu R_i roste, a to tím více, čím více se vzdalujeme od inflexčního bodu.

Mezi veličinami S , D , R_i platí důležitá relace, zvaná „Barkhausenovou vnitřní rovnicí“ lampy; lze ji snadno odvoditi. Anodový proud i_a jest funkcí napětí e_g , e_a ; je proto

$$\begin{aligned} di_a &= \left(\frac{\partial i_a}{\partial e_g} \right)_{e_a} de_g + \left(\frac{\partial i_a}{\partial e_a} \right)_{e_g} de_a, \\ &= S de_g + \frac{1}{R_i} de_a. \end{aligned}$$

Jinak však jest dle dřívějšího také

$$i_a = F(e_{st}) = F(e_g + D e_a),$$

z čehož vychází diferencováním

$$di_a = \frac{di_a}{de_{st}} \cdot (de_g + D de_a).$$

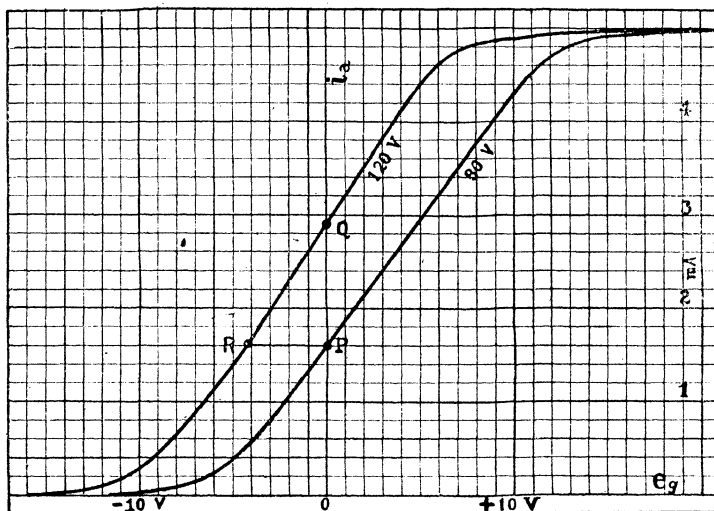
Srovnáním koeficientů v obou výrazech pro di_a dostáváme

$$S = \frac{di_a}{de_{st}}, \quad \frac{1}{R_i} = D \frac{di_a}{de_{st}},$$

z čehož ihned vychází hledaná relace:

$$SDR_i = 1.$$

Při měření uvedených veličin, velmi důležitých pro teorii sesilovače, vycházíme z relací je definujících. Tak na př. pro bod R (obr. 4.) charakteristiky určíme strmost S takto: Ponechávájice



Obr. 4.

e_a konstantní (120 V., t. j. zůstávající na téže charakteristice), změním napětí mřížky z e_g na $e_g + de_g$ (tedy o $de_g = [4,2 \text{ voltu}]$). Při tom se změní anodový proud o $di_a = 1,31 \cdot 10^{-3} \text{ A}$. Strmost jest potom

$$S = \left(\frac{\partial i_a}{\partial e_g} \right)_{e_a} = \frac{PQ}{RP} = 3 \cdot 1 \cdot 10^{-4} \frac{\text{A}}{\text{V}}.$$

Průnik D určíme takto: Změním e_a o de_a (ze 120 volt na 80 volt) a pozorujeme, o č nutno změnit e_g , aby i_a zůstalo ne-

změněno (v našem případě o 4·2 voltu). Z toho máme ihned

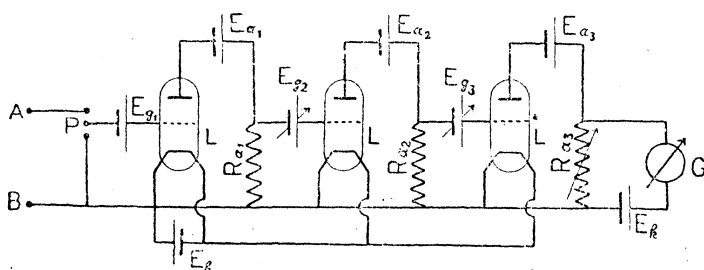
$$D = \frac{RP}{40} = 0.105 = 10.5\%$$

A konečně při určování vnitřního odporu R_i měříme změnu di_a ($= 1.3 \cdot 10^{-3} A$) anodového proudu, způsobenou změnou anodového napětí o de_a ($= 40 \text{ volt}$) při konstantním e_g . Pak jest

$$R_i = \left(\frac{\partial i_a}{\partial e_a} \right)_{e_g} = \frac{40 V}{PQ} = 30.800 \text{ ohmů.}$$

Teorie sesilovače stejnosměrného proudu.

Lampový sesilovač stejnosměrného proudu je znázorněn schematicky v obr. 5. Hlavní jeho součástí jsou elektronové lampy L s mřížkou. Katody všech lamp jsou spojeny paralelně



Obr. 5.

a připojeny k topné baterii E_h ; v případě, že pro jednotlivé lampy jsou předepsána různá napětí, dáme každé lampě resp. serii lamp vlastní baterii, pouze negativní póly katod všech lamp se spojí. Negativní pól katody a mřížka první lampy mohou být přepínačem P buď spojeny na krátko, nebo připojeny k bodům A, B , jichž potenciální diference de_{g_1} se má sesilovačem sesliti resp. změřiti. Jak jsme viděli v předešlém odstavci, jest počet elektronů, které doběhnou z katody na mřížku, velmi malý, má-li mřížka nepatrný potenciál proti potenciálu anody, jak skutečně je tomu v našem případě. Kdyby však přes to byla obava, že by i tento nepatrný mřížkový proud mohl snížit potenciální diferenci de_{g_1} , zařadíme do vedení k mřížce jeden nebo dva suché články, čímž se mřížka uvede na napětí $E_{g_1} = -1$ až

— 2 *volt*y — mřížkový proud zmizí, odpor lampy mezi katodou a mřížkou se stane nekonečným.

Anodový kruh každé lampy obsahuje vlastní anodovou baterii E_a a velký ohmický odpor R_a ; u poslední lampy je tento odpor proměnlivý, u ostatních stálý. Napětí anodových baterií jsou volena tak, aby charakteristiky pro anodové napětí e_a (= napětí anodové baterie zmenšenému o spád na odporu: $E_a - i_a R_a$) měly svoji rovnou část asi mezi $e_g = -3$ až 0 *volt*. Počátek odporu v anodovém kruhu každé lampy, kromě poslední, jest připojen k mřížce lampy následující. Poněvadž na těchto odporech vzniká značný spád napětí $i_a R_a$, i když $de_{g_1} = 0$, byly by při tomto uspořádání mřížky na značném negativním potenciálu vůči katodě; pracovali bychom již v oboru charakteristik, kde anodový proud jest velmi malý, nebo se rovná nule. Naopak však je třeba, abychom pracovali v těch částech charakteristiky, kde je nejstrmější. Toho snadno docílíme tím, když do vedení k mřížkám zařadíme zvláštní pomocné baterie E_g , u nichž možno měniti počet zařazených článků. Napětí těchto baterií volíme tak, aby spád na odporech R_a byl téměř vykompensován, aby tedy napětí mřížek vzhledem ke katodám bylo kolem — 1 až — 2 *volt*ů. Z okolnosti, že charakteristiky jsou kolem inflexčního bodu pro dosti značný rozsah mřížkového napětí přímkami, plyne, že stačí, měníme-li v pomocných bateriích počet článků, hlavně tehdy, užíváme-li aspoň ku konci akumulátorů Edisonových, takže máme možnost měniti napětí pomocných baterií v skocích o 1 *voltu*. Proměnlivost odporů $R_{a_1}, R_{a_2} \dots$, jak ji doporučují Abraham a Bloch, je úplně zbytečná a činí sesilovač, jenž sám o sobě je složitý, ještě komplikovanějším, ačkoliv se tím ničeho podstatného nedocílí.

Paralelně k proměnlivému odporu R_{a_n} poslední lampy je připojen kompenzační kruh, obsahující baterii E_k a galvanometr G resp. jiný aparát. Odpor R_{a_n} jest naregulován tak, aby proud v kompenzačním kruhu byl aspoň přibližně roven nule, je-li mřížka první lampy na potenciálu negativního pólu katody první lampy. Vzroste-li potenciál mřížky první lampy o de_{g_1} , vzroste také anodový proud první lampy o di_{a_1} , tím spád napětí na R_{a_1} o $R_{a_1} di_{a_1}$. Tato změna napětí se přenesse na mřížku lampy následující.

dující, kde se opakuje totéž, co u lampy první. V poslední lampě způsobí změna mřížkového napětí porušení kompensace, galvanometrovým kruhem procházející proud se změní o di_G .

Přistoupíme nyní k odvození vztahu mezi proudem di_G v kruhu galvanometru, změnou de_{g_1} napětí mřížky první lampy a konstantami sesilovače.

Budiž dán souhrn anodových charakteristik na př. první lampy v $i_a - e_g$ -diagramu. Bod o koordinátách e_g, i_a nazýváme „pracovní bodem“, neboť nám svojí polohou udává, za kterých podmínek lampa pracuje. Je-li anodový kruh lampy bez odporu, tu při spojitě změně napětí mřížky probíhá pracovní bod charakteristiku, poněvadž anodové napětí jest v tomto případě rovno konstantnímu napětí anodové baterie. Je-li však do anodového kruhu zařazen ohmický odpor, tu „pracovní křivka“ s charakteristikou nesplyvá. Je to snadno pochopitelné: změní-li se totiž napětí na mřížce, na př. vzroste-li, vzroste také anodový proud, s ním však zároveň vzroste také spád napětí na odporu a naopak o týž obnos klesne anodové napětí lampy. Pracovní bod přejde tedy na charakteristiku příslušnou menšímu napětí, než bylo původní. A zase naopak: klesne-li napětí mřížky, klesne současně také anodový proud a s ním spád na odporu, ale o touž hodnotu vzroste zase anodové napětí, pracovní bod přejde na charakteristiku odpovídající vyššímu napětí.

Volbou napětí anodových baterií jsme upravili polohu charakteristik tak, že za nulového stavu ($de_{g_1} = 0$) mají charakteristiky všech lamp svoji rovnou část v oboru kol $e_g = -2$ voltům. Suponujeme-li dále, že změny napětí na mřížkách všech lamp jsou tak malé, že pracovní bod, i když přejde na charakteristiky sousední, zůstává na jich přímých částech, jsou veličiny S, D, R_i konstantami. Pozorujme nyní poměry v první lampě: anodový proud i_{a_1} za nulového stavu ($de_{g_1} = 0$) závisí na napětí mřížky E_{g_1} (od pomocné baterie) a napětí anodovém:

$$i_{a_1} = f(E_{g_1}, E_{a_1} - R_{a_1} i_{a_1}).$$

Změní-li se napětí mřížky o de_{g_1} , změní se i anodový proud o di_{a_1} , a máme potom

$$i_{a_1} + di_{a_1} = f[E_{g_1} + de_{g_1}, E_{a_1} - R_{a_1} (i_{a_1} + di_{a_1})].$$

Rozvineme-li pravou stranu podle Taylorovy řady, dostáváme

$$i_{a_1} + di_{a_1} = f(E_{g_1}, E_{a_1} - R_{a_1} i_{a_1}) + S_1 de_{g_1} - \frac{R_{a_1}}{R_{i_1}} di_{a_1};$$

z toho jest dále

$$di_{a_1} = S_1 de_{g_1} - \frac{R_{a_1}}{R_{i_1}} di_{a_1},$$

z čehož vypočítáme

$$di_{a_1} = \frac{S_1}{1 + \frac{R_{a_1}}{R_{i_1}}} de_{g_1}.$$

Z této relace vidíme, že pracovní křivkou za učiněných suposic jest přímka o směrnici

$$\frac{S_1}{1 + \frac{R_{a_1}}{R_{i_1}}}.$$

Změna ohmického spádu de_{g_2} na odporu R_{a_1} , způsobená změnou di_{a_1} anodového proudu, jest

$$\begin{aligned} de_{g_2} = R_{a_1} di_{a_1} &= \frac{S_1 R_{a_1}}{1 + \frac{R_{a_1}}{R_{i_1}}} de_{g_1}, \\ &= \frac{S_1 R_{i_1}}{1 + \frac{R_{i_1}}{R_{a_1}}} de_{g_1}. \end{aligned}$$

Dle Barkhausenovy vnitřní rovnice lampy,

$$S_1 D_1 R_{i_1} = 1,$$

máme konečně

$$de_{g_2} = \frac{1}{D_1} \cdot \frac{1}{1 + \frac{R_{i_1}}{R_{a_1}}} de_{g_1}.$$

Tato změna napětí se přenáší na mřížku druhé lampy, proto jsme ji označili symbolem de_{g_2} . Při odvozování jsme předpokládali, že odpor druhé lampy mezi katodou a mřížkou jest nekonečný. Není-li tomu tak, nutno pokládati za odpor v anodovém kruhu první lampy $R_{a_1}^*$ (= odporu paralelně spojených větví lampy a odporu R_{a_1}), pro nějž platí

$$\frac{1}{R_{a_1}^*} = \frac{1}{R_{a_1}} + \frac{1}{Q_2},$$

je-li ϱ_2 odpor druhé lampy mezi katodou a mřížkou v daném pracovním bodě. Naše formule zní tedy definitivně:

$$de_{g_2} = \frac{1}{D_1} \cdot \frac{1}{1 + \frac{R_{i_1}}{R_{a_1}^*}} de_{g_1}.$$

Opakujeme-li touž úvahu pro lampu druhou, třetí, ... až $(n-1)$ -ní, dostáváme řadu vztahů

$$de_{g_3} = \frac{1}{D_2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{R_{i_2}}{R_{a_2}^*}} de_{g_2},$$

.....

$$de_{g_n} = \frac{1}{D_{n-1}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{R_{i_{n-1}}}{R_{a_{n-1}}^*}} de_{g_{n-1}},$$

z nichž eliminací vychází výsledný výraz pro změnu napětí na mřížce poslední lampy, způsobenou změnou napětí de_{g_1} na mřížce lampy první:

$$de_{g_n} = de_{g_1} \cdot \prod_{k=1}^{n-1} \frac{1}{D_k} \cdot \frac{1}{1 + \frac{R_{i_k}}{R_{a_k}^*}}.$$

Zbývá ještě jenom studovati působení poslední lampy: napětí pomocné baterie budiž E_{g_n} , napětí anodové baterie E_{a_n} , napětí kompenzační baterie E_k , velikost odporu v anodovém kruhu R_{a_n} , odpor galvanometru R_G . Proud, procházející za nulového stavu ($de_{g_n} = 0$) lampou, označme $i_{a_n}^0$, odporem R_{a_n} pak i_R^0 , galvanometrem konečně i_G^0 . Aplikujeme Kirchhoffovy zákony na kompenzační kruh poslední lampy, dostáváme:

$$E_k = R_{a_n} i_R^0 - R_G i_G^0, \quad (1)$$

$$i_a^0 = i_R^0 + i_G^0. \quad (2)$$

Změní-li se napětí na mřížce o de_{g_n} , bude procházeti lampou proud i_{a_n} , odporem R_{a_n} proud i_R , galvanometrem konečně i_G . Pak platí podobně jako nahoře:

$$E_k = R_{a_n} i_R - R_G i_G, \quad (3)$$

$$i_a = i_R + i_G. \quad (4)$$

Anodové napětí v prvním případě ($de_{g_n} = 0$) jest:

$$e_{a_n}^0 = E_{a_n} - R_{a_n} i_R^0,$$

v druhém:

$$\begin{aligned} e_{a_n} &= E_{a_n} - R_{a_n} i_R, \\ &= e_{a_n}^0 - R_{a_n} (i_R - i_R^0). \end{aligned}$$

Anodový proud jest v prvním případě dán vztahem

$$i_{a_n}^0 = f(E_{g_n}, e_{a_n}^0),$$

v druhém

$$i_{a_n} = f[E_{g_n} + de_{g_n}, e_{a_n}^0 - R_{a_n} (i_R - i_R^0)].$$

Rozvineme pravou stranu poslední relace podle Taylorovy řady podržující prvé členy a odečteme relaci předcházející; dostáváme

$$i_{a_n} - i_{a_n}^0 = S_n de_{g_n} - \frac{R_{a_n}}{R_{i_n}} (i_R - i_R^0). \quad (5)$$

Klademe-li pro krátkost

$$di_G = i_G - i_G^0,$$

dostáváme z rozdílů (3)–(1), (4)–(2):

$$R_{a_n} (i_R - i_R^0) - R_G di_G = 0, \quad (6)$$

$$i_{a_n} - i_{a_n}^0 = i_R - i_R^0 + di_G. \quad (7)$$

Z (6) a (7) vychází eliminací veličiny $i_R - i_R^0$:

$$R_{a_n} (i_{a_n} - i_{a_n}^0) = (R_{a_n} + R_G) di_G. \quad (8)$$

Z (8) vypočítáme $i_{a_n} - i_{a_n}^0$, z (6) pak $i_R - i_R^0$ a dosadíme vypočtené hodnoty do (5); dostáváme

$$di_G = \frac{S_n}{1 + \frac{R_G}{R_{a_n}} + \frac{R_G}{R_{i_n}}} de_{g_n}.$$

Dosadíme do tohoto vzorce již dříve vypočtenou hodnotu pro de_{g_n} ; dostáváme potom definitivní formuli

$$di_G = \frac{S_n}{1 + \frac{R_G}{R_{a_n}} + \frac{R_G}{R_{i_n}}} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{1}{D_k} \cdot \frac{1}{1 + \frac{R_{i_k}}{R_{a_k}}} \cdot de_{g_1} \equiv \frac{1}{R_s} de_{g_1},$$

jež nám udává, oč se změní proud v galvanometru, změní li se napětí na mřížce první lampy o de_{g1} .

Diskuse: Faktor u de_{g1} jsme označili $\frac{1}{R_s}$, převratnou jeho hodnotu R_s budeme nazývati zdánlivým odporem sesilovače. Dle definice je to poměr mezi změnou napětí na mřížce první lampy a jí způsobenou změnou proudu v kruhu galvanometru. Z uvedeného vzorce plyne, že R_s jest dáno pouze konstantami sesilovače. Od zdánlivého odporu sesilovače nutno dobře odlišovati odpor první lampy mezi mřížkou a katodou, kterážto veličina přichází v úvahu, ptáme-li se, kolik proudu odebírá sesilovač ze zdroje napětí (bodů A , B). Reciproká hodnota zdánlivého odporu $\frac{1}{R_s}$ jest vhodnou měrou účinnosti sesilovače.

Z výrazu pro di_G jest dále přímo viděti tento důsledek: Jsou-li anodová napětí lamp volena tak, že pracovní křivky všech lamp probíhají v oborech, kde charakteristiky jsou ještě přímkami a tedy veličiny S , D , R_i dle dřívějšího konstantami, jest proud di_G v galvanometru přímo úměrný změně napětí de_{g1} na mřížce první lampy. Tento důsledek jest hlavně tehdy velmi důležit, užíváme-li sesilovače jako citlivého voltmetru k měření nepatrných změn napětí.

Účinnost sesilovače jest tím větší, čím větší jest $\frac{1}{R_s}$, t. j. čím menší jest jeho zdánlivý odpor. Vliv každé lampy na celkový efekt sesilovače jest ve výrazu pro $\frac{1}{R_s}$ dán jedním faktorem. Každé z $(n - 1)$ prvních lamp odpovídá faktor tvaru:

$$\frac{1}{D_k} \cdot \frac{1}{1 + \frac{R_{ik}}{R_{ak}}},$$

ježž možno psáti také ve tvaru:

$$\frac{1}{D_k R_{ik}} \frac{1}{\frac{1}{R_{ik}} + \frac{1}{R_{ak}}} = \frac{S_k}{\frac{1}{R_{ik}} + \frac{1}{R_{ak}}}.$$

Z obou těchto ekvivalentních tvarů vidíme: Aby sesilovač měl pokud možno největší efekt, musí prvních $(n - 1)$ lamp

mítí velkou strmost S_k , nepatrný průnik D_k a velký vnitřní odpor R_{i_k} ; anodový odpor $R_{a_k}^*$ musí býti velký proti vnitřnímu odporu R_{i_k} příslušné lampy. Avšak při velmi malém průniku jest (dle relace $de_g = -Dde_a$) třeba užití velmi značného anodového napětí, abychom docílili potřebného posunutí charakteristiky. Vedle toho vzniká na $R_{a_k}^*$ spád napětí v obnosu $i_{a_k}R_{a_k}^*$; je-li tedy $R_{a_k}^*$ značné, musí býti jednak napětí pomocných baterií mezi anodovým odporem a mřížkou následující lampy velmi značné, jednak nutno opětůně značně zvýšiti napětí anodových baterií, aby se vyvážila ztráta napětí na $R_{a_k}^*$. Proto volíme kompromis: spokojujeme se s lampami s průnikem rovným asi $10^0/0$, $R_{a_k}^*$ volíme pak přibližně rovno vnitřnímu odporu lampy R_{i_k} . Při tom nezapomínejme, že $R_{a_k}^*$ značí nám vlastně hodnotu odporu dvou paralelních větví: odporu R_{a_k} a $(k+1)$ -ní lampy mezi mřížkou a katodou. Volbou pomocného, dostatečně vysokého negativního napětí na mřížce snadno docílíme toho, že tento odpor lampy jest nekonečně veliký a pak jest

$$R_{a_k}^* = R_{a_k}.$$

Zbývá ještě diskuse výrazu

$$\frac{S_n}{1 + \frac{R_G}{R_{a_n}} + \frac{R_G}{R_{i_n}}},$$

vztahujícího se na poslední lampu. Ze vzorce přímo vidíme: má-li býti efekt lampy značný, nutno jednak voliti lampu o velké strmosti, jednak musí býti odpor galvanometru R_G malý jak proti vnitřnímu odporu lampy R_{i_n} , tak proti anodovému odporu R_{a_n} . Poněvadž odpor galvanometru mívá pravidelně pouze několik desítek nebo set *ohmů*, stačí užití lampy o poměrně malém vnitřním odporu.

Ku konci ještě oceníme na základě číselného příkladu výhody, jež nám může sesilovač poskytnouti. Jednolampovým sesilovačem budeme nazývati uspořádání s jedinou lampou (3. v obr. 5.), v jejímž anodovém kruhu jest zařazen ohmický odpor a k němu paralelně připojen kompenzační kruh. Volíme-li sesilovačí lampu fy C. H. F. Müller-Hamburg, jež má jak z německých tak francouzských lamp největší strmost

$$S = 3.6 \cdot 10^{-4} \frac{\text{amper}}{\text{volt}}, \quad D = 5\%, \quad R_i = 55.000 \text{ ohmů},$$

dostáváme

$$R_s = 2770 \text{ ohmů.}$$

Kdyby tedy uspořádání před sesilovačem dovolovalo užití galvanometru (ev. jiného aparátu) o odporu menším než $R_s = 2770 \text{ ohmů}$, pak by užití sesilovače nemělo smyslu. Kdyby naopak, vzhledem k poměrům před body *A*, *B*, bylo třeba k měření napětí d_{e_g} , užití galvanometru o velmi velkém odporu $\gg R_s$, tu užití již jednolampového sesilovače je výhodné. Podobně je tomu u sesilovačů vícelampových. U sesilovače dvojlampového máme pro týž typ lamp

$$R_s = 277 \text{ ohmů,}$$

u trojlampového

$$R_s = 27.7 \text{ ohmu,}$$

u čtyřlampového

$$R_s = 2.8 \text{ ohmu a t. d.}$$

Vidíme z toho, že každým přidáním dalšího stupně klesne zdánlivý odpor sesilovače na $\frac{1}{10}$ předešlé hodnoty, současně však stoupne proud v galvanometru na 10-násobnou hodnotu; za to přibudou v uspořádání dvě další baterie.

Úkolem sesilovače stejnosměrného proudu je vyvolati malou potenciální diferencí na mřížce první lampy pokud možno silný proud v kruhu galvanometru. Při tom lze snadno docílití toho, že z oné potenciální difference se neodebírá žádný proud, nýbrž že se jí pouze elektrostaticky nabíjí mřížka první lampy. Energii proudu v kruhu galvanometru dodává při tom anodová baterie. V tom tkví hlavní přednost a výhoda popsaného sesilovače podobně, jako je tomu i u sesilovačů proudu střídavého.

Kompensační metody k určování *S*, *D*, *R_i*.

Strmost určujeme dle definice obvyklou metodou tak, že měříme změnu anodového proudu, způsobenou malou změnou napětí na mřížce. Jaké přesnosti lze při tom docílití, objasní příklad: U francouzské sesilovací lampy „Metax“ o strmosti ca

$3.10^{-4} \frac{\text{ampér}}{\text{volt}}$ jest intensita nasyceného proudu přes 5 miliamp

Měřena byla miliampermetrem fy Siemens-Halske o odporu 10 ohmů, k němuž jako shunt připojeno dalších 10 ohmů; výchylka miliampermetru přes celou škálu (150 dílků) odpovídá potom proudu 9 miliamper, výchylka o jeden dílek proudu $6.10^{-3} A$.

Změníme-li tedy napětí mřížky o 0·5 *voltu*, změní se tím při uvedené strmosti lampy anodový proud o $1\cdot5\cdot 10^{-4}A$, což odpovídá výchylce 2·5 skálového dílku. Chybí-li se při odečtení polohy ukazatele po každé o 0·1 dílku, jest maximální chyba, již se můžeme při určování strmosti touto metodou dopustiti, již 8‰. Úplně stejné poměry jsou při určování průniku a vnitřního odporu lampy.

Jest tedy úplně pochopitelno, že se ohlížíme po jiné, dokonalejší metodě. Takové vskutku velmi jednoduché uspořádání, jímž možno uvedené veličiny měřiti s daleko větší přesností, představuje nám jednolampový sesilovač stejnosměrného proudu

Formule pro efekt jím způsobený (str. 17)

$$d_{iG} = \frac{S}{1 + \frac{R_G}{R_a} + \frac{R_G}{R_i}} de_g$$

obsahuje sice obě veličiny S a R_i , ale R_i má hodnoty tak značné (50.000 *ohmů* i více), že možno při malém odporu galvanometru člen $\frac{R_G}{R_i}$ úplně zanedbatí proti 1 (s chybou 0·1‰, je-li $R_G = 50$ *ohmům*). Ostatně v dalším ihned odvodíme analogickou metodu pro určování R_i , takže potom možno užiti formule přesné, určíme-li napřed R_i .

Vraťme se ještě na okamžik k uvedenému číselnému příkladu: užijeme-li při popsané nové metodě galvanometru s citlivostí jistě nepatrnou — $3\cdot 10^{-6}A$ pro jeden skálový dílek — dostáváme při stejné změně napětí na mřížce (o 0·5 *voltu*) v galvanometru výchylku rovnou 50 dílkům; tato výchylka se dá volbou citlivějšího galvanometru ještě značně zvětšiti. Ovšem nedoporučuje se užívati přespříliš citlivého galvanometru, ježto se potom i malé, nahodilé změny v anodovém nebo kompenzačním napětí jeví velkým neklidem galvanometru.

Průnik D určujeme takto: změníme anodové napětí o de_a , s tím současně se změní výchylka galvanometru v kompenzačním kruhu; poté snažíme se změnou napětí mřížky o $-de_g$ uvésti výchylku galvanometru na původní hodnotu. Tím máme zaručeno, že anodový proud jest v obou případech týž, a tedy dle definice jest

$$D = - \frac{de_g}{de_a}$$

Při určování vnitřního odporu lampy měříme změnu intenzity proudu v galvanometru (di_G), způsobenou při stálém napětí mřížky změnou anodového napětí o de_a . Jak se z těchto dvou údajů vypočítá vnitřní odpor lampy R_i , odvodíme úvahou naprosto analogickou jako na str. 16. a 17. takto:

Budiž napětí mřížky E_g , napětí anodové baterie E_a , napětí baterie v kompenzačním kruhu E_k , ohmický odpor v anodovém kruhu R_a , odpor galvanometru konečně R_G ; proud protékající lampou budiž i_a^0 , odporem R_a pak i_R^0 , galvanometrem i_G^0 . Potom jest

$$E_k = R_a i_R^0 - R_G i_G^0, \quad (1)$$

$$i_a^0 = i_R^0 + i_G^0. \quad (2)$$

Změníme-li, udržujíce napětí na mřížce konstantní, napětí anodové baterie o de_a , bude lampou procházeti proud i_a , odporem i_R , galvanometrem i_G ; potom platí podobně jako dříve

$$E_k = R_a i_R - R_G i_G, \quad (3)$$

$$i_a = i_R + i_G. \quad (4)$$

Anodové napětí jest v prvním případě:

$$e_a^0 = E_a - R_a i_R^0,$$

v druhém

$$\begin{aligned} e_a &= E_a + de_a - R_a i_R, \\ &= e_a^0 + de_a - R_a (i_R - i_R^0). \end{aligned}$$

Anodový proud v prvním případě jest

$$i_a^0 = f(E_g, e_a^0),$$

v druhém

$$i_a = f[E_g, e_a^0 + de_a - R_a (i_R - i_R^0)].$$

Rozvineme-li pravou stranu poslední rovnice v řadu, spojujeme se prvními členy, dostáváme po odečtení relace předcházející

$$i_a - i_a^0 = \frac{1}{R_i} de_a - \frac{R_a}{R_i} (i_R - i_R^0). \quad (5)$$

Klademe-li opět $di_G = i_G - i_G^0$, vypočítáme z rovnic (1) až (5)

$$\begin{aligned} di_G &= \frac{1}{R_i} \cdot \frac{de_a}{1 + \frac{R_G}{R_a} + \frac{R_G}{R_i}}, \\ &= \frac{de_a}{R_G + R_i \left(1 + \frac{R_G}{R_a}\right)}, \end{aligned}$$

z čehož plyne dále

$$R_i = \frac{\frac{de_a}{di_G} - R_G}{1 + \frac{R_G}{R_a}}$$

Odpor R_G galvanometru jest pravidelně proti prvnímu členu tak nepatrný, že jej můžeme zanedbatí a psáti

$$R_i = \frac{1}{1 + \frac{R_G}{R_a}} \cdot \left(\frac{de_a}{di_G} \right) e_g$$

Totéž, co jsme dříve uvedli o přesnosti při měření S a D , platí ve stejné míře i zde. (Dokončení.)

O separaci kořenů rovnice algebraické dle reálných částí kořenů a o důkaze fundamentální věty algebry.

Napsal K. Petr.

Jest obecně známo, že, provádíme-li separaci kořenů pomocí Sturmovy věty, dospíváme již při nízkém stupni rovnice ($n = 5, 6, \dots$) z pravidla k číslům tak velikým, že separace jest jenom se značnou námahou proveditelná; ovšem za předpokladu, že se separace ona provádí přesně, takže jsme současně poučení o tom, má-li rovnice daná kořeny mnohonásobné či ne. Ku vykonání separace kořenů dle reálných částí — t. j. ku přesnému výpočtu, kolik jest kořenů dané rovnice algebraické, jichž reálná část jest v intervalu (a, b) — lze však sestrojiti obdobné řady, říkáme jim také Sturmovy, jež jsou značně jednodušší než původní Sturmovy (lze ku př. při rovnicích stupně 8. vystačiti výrazy, jichž výpočet není o mnoho nesnadnější než původních Sturmových při rovnicích stupně 4.). Odvození těchto řad lze podati na základě věty Cauchyovy vztahující se na změnu argumentu čísla komplexního daného hodnotou $f(z)$, když z probíhá uzavřenou křivkou a lze ke konstrukci jich užití rovněž postupného dělení — jakož známo.