O řešení lineárných rovnic.

Napsal

Edvard Weyr.

(Dokončení.)

§. IV. O řešení n lineárných homogenních rovnic o libovolném počtu neznámých.

Případ, kdy počet neznámých se rovná počtu rovnic, prozkoumán v §. III.; zbývají tedy případy, kdy onen počet jest větší a kdy jest menší než tento.

Mějme předně s linearných homogenních rovnic o n neznámých, $n > s$,

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{n1}x_n = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \ldots + a_{sn}x_n = 0.$$

Nazveme minorem r-ho stupně každý determinant utvořený ze soustavy koefficientů

$$\begin{matrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{s1}, & a_{s2}, & \ldots, & a_{sn} \end{matrix}$$

tím, že podržíme elementy nalézající se v r řádcích a v v sloupcích této soustavy.

Utvořme minory s-ho stupně. Jestliže jeden z nich nevymizí, na př. onen, jehož elementy vzaty z prvních s sloupců, pak nastává závěrečný případ §. III. Jsou tedy pak $x_{s+1}, \ldots, x_n$ libovolné a $x_1, \ldots, x_s$ dány formulí (8).

Vymizí-li všecky minory s-ho stupně, tedy tvořme minory stupně s—1-ho. Dejme tomu, že jeden nevymizí, na př. onen, jehož elementy jsou vzaty z prvních řádků a ze sloupců μ_1-ho, μ_2-ho, ..., μ_{s-1}-ho. Pak jsou systemy $a_{k1}, a_{k2}, \ldots, a_{kn}$, při $k = 1, 2, \ldots, (s-1)$ podstatně různé, při $k = 1, 2, \ldots, s$ nejsou podstatně různé a tedy lze poslední rovnici složiti z předcházejících, pročež ji vynecháme. Ze zbývajících rovnic vypočteme

x_{μ_1}, x_{μ_2}, ..., $x_{\mu_{s-1}}$ tak jako v předcházejícím paragrafu jakožto lineárné homogenní funkce ostatních neznámých, jichž hodnoty jsou zcela libovolné. Je patrné, kterak nutno pokračovati v případě, že i všecky minory s—1-ho stupně vymizí, pročež věc čtenáři zůstavuji.

Mějme za druhé více rovnic než neznámých, tedy $s > n$. Tvořme minory n-ho stupně; jestliže jeden nevymizí, tedy vyhoví příslušným n rovnicím jen hodnoty $x_1 = x_2 = .. = x_n = 0$ a ty vyhoví i ostatním; jest to tedy jediné zde možné řešení daných rovnic.

Vymizí-li všecky minory n-ho stupně, tvořme minory n—1-ho stupně; nechť z nich alespoň jeden nevymizí, na př. ten, jehož elementy jsou vzaty z prvních n—1 řádků a sloupců. Pak stačí z důvodů již známých, přihlížíme-li jen k prvním n—1 rovnicím; zvolivše x_n libovolně, obdržíme x_1, ..., x_{n-1} řešením těchto rovnic ve tvaru $\lambda_1 x_n$, $\lambda_2 x_n$, ..., $\lambda_{n-1} x_n$.

Vymizí-li i všecky minory n—1-ho stupně, tvořme minory stupně n—2-ho, z nichž nechť jeden nevymizí, na př. onen, jehož elementy vzaty z prvních řádků a sloupců.

Pak stačí přihlížeti k prvním n—2 rovnicím; zvolivše x_{n-1} a x_n libovolné, obdržíme jich řešením x_1, x_2, ..., x_{n-2} ve tvaru $x_k = \lambda_k x_{n-1} + \mu_k x_n$, $(k = 1, 2, \ldots, (n-2))$.

Opět je patrné, kterak zde lze pokračovati, čímž vytknutý úkol úplně řešen.

§. V. O řešení n lineárných rovnic o n neznámých.

Budiž dáno n lineárných rovnic o n neznámých

$$(9) \qquad \begin{array}{l} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + a_1 = 0, \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + a_2 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n + a_n = 0. \end{array}$$

Dejme tomu, že lze všem rovnicím jistými hodnotami x_1, x_2, ..., x_n vyhověti.

Utvořme determinant $\Delta = \Sigma \pm a_{11}a_{22} \ldots a_{nn}$ a označme literou A_{ik} adjunkt jeho elementu a_{ik}. Násobme rovnice respektivnými adjunkty elementů k-ho sloupce a sečtěme výsledky; i obdržíme patrně

$$\Delta x_k + a_1 A_{1k} + a_2 A_{2k} + \ldots + a_n A_{nk} = 0.$$

Je-li determinant Δ různý od nully, máme

$$x_k = -\frac{1}{\Delta}(a_1 A_{1k} + a_2 A_{2k} + \ldots + a_n A_{nk}). \tag{10}$$

V případě $\Delta \gtrless 0$ může tedy daným rovnicím jen jediný system $x_1, \ldots, x_n$ vyhovovati, jehož hodnoty jsou poslední formulí dány. Patrně vychází čitatel v této formuli ze jmenovatele Δ, nahradíme-li v tomto elementy k-ho sloupce resp. hodnotami $-a_1, -a_2, \ldots, -a_n$. Nalezené hodnoty $x_1, \ldots, x_n$ daným rovnicím skutečně vyhovují, neboť vloživše je na př. do rovnice k-té a seřadivše dle liter $a_1, \ldots, a_n$, obdržíme u a_j koefficient

$$-\frac{1}{\Delta}(a_{k1} A_{j1} + a_{k2} A_{j2} + \ldots + a_{kn} A_{jn}).$$

Výraz v závorce pro všecky indexy j různé od k vymizí a při $j = k$ má hodnotu Δ, pročež jest koefficient při jediném a_k záporná jednice, ostatní nully; zní tedy levá strana $k^{\text{té}}$ rovnice $-a_k + a_k$, rovnice ona tedy vyplněna.

V případě $\Delta \gtrless 0$ existuje tudíž jediné řešení rovnic (9) a jest dáno formulí (10).

Předpokládejme za druhé, že determinant Δ se rovná nulle; pak se mohou vyskytnouti dva případy: *buď neexistuje žádné řešení daných rovnic* (9) *aneb jich existuje nekonečně mnoho.* — Utvořme minory $n-1^{\text{ho}}$ stupně determinantu Δ a předpokládejme, že alespoň jeden z nich nevymizí, na př. onen, jenž jest utvořen z elementů prvních $n-1$ řádků a sloupců. Pak lze, položíme-li k vůli stručnosti

$$a_{k1} x_1 + a_{k2} x_2 + \ldots + a_{kn} x_n = \varphi_k,$$

jako v § III. ustanoviti $n-1$ hodnot $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ tak, že platí identicky t. j. při libovolných hodnotách $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$\varphi_n = \alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2 + \ldots + \alpha_{n-1} \varphi_{n-1}.$$

Možno-li daným rovnicím (9) vyhověti, tu máme

$$\varphi_1 = -a_1, \; \varphi_2 = -a_2, \; \ldots, \; \varphi_n = -a_n,$$

tedy pak musí taky

$$a_n = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_{n-1} a_{n-1}. \tag{11}$$

Není-li tato rovnice vyplněna, *nelze daným rovnicím* (9) *vyhověti*; patrně odporuje pak poslední rovnice předcházejícím. Je-li (11) vyplněna, pak lze poslední rovnici (9) obdržeti tím, že násobíme předcházející resp. hodnotami $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-2}$ a že výsledky sečteme. Stačí pak hledati řešení prvních $n-1$ rovnic (9), o čemž doleji.

V tomto případě, kdy totiž φ_n lze naznačeným způsobem složiti z $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ a kdy je a_n složeno týmž způsobem z $a_1, \ldots, a_{n-1}$, jsou patrně všecky minory n^{ho} stupně soustavy

$$(A) \qquad \begin{matrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & a_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} & a_n \end{matrix}$$

nullami. Avšak i opak platí, t. j. nevymizí-li minor $n-1^{\text{ho}}$ stupně $\Sigma \pm a_{11}\, a_{22} \ldots a_{n-1,\, n-1}$ a vymizí-li všecky minory n^{ho} stupně poslední soustavy, pak jest rovnice poslední složena z rovnic předcházejících a lze ji vypustiti. Neboť pak jsou $a_{k1}, \ldots, a_{kn}$, a_k při $k=1, 2, \ldots (n-1)$ podstatně různé systemy, při $k=1, 2, \ldots, n$ však ne a tedy lze stanoviti $n-1$ čísel $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ takových, že

$$a_{ni} = \alpha_1\, a_{1i} + \alpha_2\, a_{2i} + \ldots + \alpha_{n-1}\, a_{n-1,\, i}$$
$$a_n = \alpha_1\, a_1 + \alpha_2\, a_2 + \ldots + \alpha_{n-1}\, a_{n-1},$$

čímž tvrzení dokázáno.*)

---

*) Rovnice (10) ma pak tvar $0\, x_k = 0$ a nepraví o x_k pranic. Souditi — a to se v mnohých spisech děje — že x_k jest neurčité, ničím není oprávněno, neboť rovnice (10) jsou odvozeny za tou *supposicí*, že platí (9) t. j. že *lze* rovnicím (9) vyhověti a nic nedokazuje, že by ta supposice musila platiti, a kdyby i platila, musilo by se teprve ukázati, že hodnoty x_k hovící rovnicím (10) též naopak vyhoví rovnicím (9). A skutečně vezmeme-li na př. rovnice

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10,$$
$$2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 25,$$
$$3x_1 + 6x_2 + 9x_3 = 4,$$

tu by formule (10) podávala každou neznámou ve tvaru $\frac{0}{0}$ a přece napsaným rovnicím nelze vůbec vyhověti, neboť druhá odporuje první a třetí patrně odporuje prvním dvěma.

Poukaži ještě k jedné okolnosti. Sečteme-li první dvě rovnice, vidíme ihned, že jim třetí odporuje; násobíme-li první zlomkem $\frac{67}{5}$, druhou záporným zlomkem $-\frac{26}{5}$ a sečteme-li výsledky, obdržíme třetí rovnici. První výsledek vede k tomuto závěrku: Vyhovují-li nějaké hodnoty x_1, x_2, x_3 prvním dvěma rovnicím, tedy nemohou vyhověti třetí; a druhý výsledek vede k tomuto závěrku: vyhovují-li x_1, x_2, x_3 prvním dvěma rovnicím, tu vyhoví i třetí. Toť odpor, a aby přestal, nutno prohlásiti, že praemissa je nemožná t. j. že prvním dvěma rovnicím vyhověti nelze; tak tomu arci skutečně jest. Čtenář dočet tento paragraf, prohlédne věc úplně ve všech případech.

Vymizí-li všecky minory $n-1^{\text{ho}}$ stupně determinantu Δ, tedy tvořme minory stupně $n-2^{\text{ho}}$. Předpokládejme, že se vyskytne alespoň jeden různý od nully, na př. onen, jehož elementy jsou vzaty z prvních $n-2$ řádků a sloupců.

Pak dovedeme cestou naznačenou v § III. ustanoviti $n-2$ hodnot $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-2}$ a $n-2$ hodnot $\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}$ takových, že

$$\varphi_{n-1} = \alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2 + \ldots + \alpha_{n-2} \varphi_{n-2}$$
$$\varphi_n = \beta_1 \varphi_1 + \beta_2 \varphi_2 + \ldots + \beta_{n-2} \varphi_{n-2}.$$

Možno-li daným rovnicím vyhověti, musí tedy i

$$\begin{aligned} a_{n-1} &= \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_{n-2} a_{n-2} \\ a_n &= \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \ldots + \beta_{n-2} a_{n-2}. \end{aligned} \tag{12}$$

Nejsou-li tyto rovnice vyplněny, nelze daným rovnicím (9) zadost učiniti; patrně odporuje pak předposlední nebo poslední rovnice (9) anebo obě dvě rovnicím předcházejícím.

Jsou-li rovnice (12) vyplněny, pak lze předposlední a poslední rovnici (9) lineárně složiti z prvních $n-2$ rovnic a tedy stačí hledati řešení těchto rovnic. V naznačeném případě patrně vymizí všecky minory $n-1^{\text{ho}}$ stupně soustavy (A); ale i opak platí t. j. jestliže při stálé supposici $\Sigma \pm a_{11} a_{22} \ldots a_{n-2,\, n-2} \gtrless 0$ vymizí všecky minory $n-1^{\text{ho}}$ stupně vzaté z prvních $n-2$ řádků a z jednoho dalšího řádku soustavy (A), tu lze předposlední a poslední rovnici lineárně složiti z prvních $n-2$ rovnic (9). Důkaz je na bíledni.

Jest opět patrné, kterak touto cestou dále pokračujeme. Dejme tomu, že tvoříce minory determinantu Δ shledáme, že vymizí všecky stupně $n-1^{\text{ho}}$, $n-2^{\text{ho}}$ atd. až $s+1^{\text{ho}}$; že však alespoň jeden minor stupně s^{ho} nevymizí, n. p. onen, jehož elementy vzaty z prvních s řádků a sloupců t. j. že

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1s} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{s1} & \ldots & a_{ss} \end{vmatrix} \gtrless 0.$$

Předpokládejme dále, že dosavadní počet neukázal k nemožnosti vyhověti daným rovnicím t. j. že všecky rovnice jako (11), (12) atd. jsou skutečně vyplněny. Dle dřívějších úvah lze pak stanoviti čísla $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ tak, že

$$\varphi_{s+1} = \alpha_1 \varphi_1 + \ldots + \alpha_s \varphi_s$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\varphi_n = \lambda_1 \varphi_1 + \ldots + \lambda_s \varphi_s.$$

Možno-li vyhověti daným rovnicím (9), musí patrně

$$
(13)\qquad \begin{aligned} a_{s+1} &= \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_s a_s \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n &= \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_s a_s, \end{aligned}
$$

aneb, co jest totéž, pak musí vymizeti všecky minory $s+1$-ho stupně vzaté z prvních s řádků a vždy z jednoho dalšího řádku soustavy (A), *a to také postačí, aby* (13) *byly vyplněny.* Ostatně lze ukázati, že pak vymizí *všecky* minory stupně $s+1$-ho soustavy (A). O minorech tohoto stupně vzatých z prvních n sloupců jsme to beztoho supponovali, zbývá tedy vzíti v úvahu minory obsahující elementy z posledního sloupce; a i tyto jsou nullami, poněvadž každý system v (A) se jeví jakožto složený z prvních s systemů, pročež dle §. II. každý minor stupně $s+1$-ho vymizí. Nejsou-li tyto rovnice (13) vyplněny, nelze daným rovnicím vyhověti t. j. *neexistuje žádné řešení rovnic* (9). Patrně pak odporují některé z dalších rovnic prvním s rovnicím (9). Dejme však tomu, že rovnice (13) jsou vyplněny, pak stačí, ustanovíme-li neznámé $x_1, \ldots, x_n$ tak, aby vyhověly prvním s rovnicím (9), totiž aby

$$
(14)\qquad \begin{aligned} a_{11} x_1 + \ldots + a_{1s} x_s + c_1 &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{s1} x_1 + \ldots + a_{ss} x_s + c_s &= 0, \end{aligned}
$$

kdež jsme k vůli stručnosti položili

$$
\begin{aligned} a_{1,\,s+1} x_{s+1} + \ldots + a_{1n} x_n + a_1 &= c_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{s,\,s+1} x_{s+1} + \ldots + a_{sn} x_n + a_n &= c_s. \end{aligned}
$$

Zvolivše hodnoty $x_{s+1}, \ldots, x_n$ libovolně, známe hodnoty $c_1, \ldots, c_s$ a z rovnic (14) obdržíme pak vůči $\delta \gtrless 0$ určité a jediné hodnoty pro $x_1, \ldots, x_s$ dle návodu prvního odstavce tohoto paragrafu. Máme tím nekonečně mnoho řešení daných rovnic a že je máme všecka, vychází z toho, že $x_{s+1}, \ldots, x_n$ můžeme libovolně voliti a že pak $x_1, \ldots, x_s$ jsou úplně určeny. Jest patrné, že $x_1, \ldots, x_s$ vycházejí jakožto lineárné funkce hodnot $x_{s+1}, \ldots, x_n$.

Napíšeme-li jako v § III. determinant

$$
\begin{vmatrix} e & e_1 & \ldots & e_s \\ c_1 & a_{11} & \ldots & a_{1s} \\ c_2 & a_{21} & \ldots & a_{2s} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_s & a_{s1} & \ldots & a_{ss} \end{vmatrix},
$$

jest adjunkt elementu e patrně δ; označivše adjunkty elementů $e_1, \ldots, e_s$ resp. $D_1, \ldots, D_s$, máme jako v onom §

$$x_1 = \frac{D_1}{\delta}, x_2 = \frac{D_2}{\delta}, \ldots, x_s = \frac{D_s}{\delta}.$$

VI. O řešení lineárných rovnic s libovolným počtem neznámých o eliminaci z lineárných rovnic.

Budiž dáno s lineárných rovnic o n neznámých

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + \ldots + x_{1n} x_n + a_1 &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{s1} x_1 + \ldots + a_{sn} x_n + a_s &= 0, \end{aligned} \tag{15}$$

které píšeme stručněji

$$\varphi_1 + a_1 = 0, \quad \ldots, \quad \varphi_s + a_s = 0.$$

Případ $s = n$ probrán v předcházejícím paragrafu.

Mějme tedy předně $s < n$. Tvořme pak, jako v § IV. minory soustavy koefficientů

$$\begin{matrix} a_{11}, \ldots a_{1n}, \\ \ldots\ldots \\ a_{s1}, \ldots a_{sn}. \end{matrix} \tag{A}$$

Je-li δ nějaký minor nejvyššího stupně, který nevymizí, na př. minor

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1r} \\ \ldots\ldots \\ a_{r1} \ldots a_{rr} \end{vmatrix}, \qquad (r \leqq s)$$

pak lze jako v citovaném § vyjádřiti $\varphi_{r+1}, \varphi_{r+2}, \ldots, \varphi_s$ lineárně pomocí $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$ t. j. lze určiti hodnoty $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ tak, aby identicky

$$\begin{aligned} \varphi_{r+1} &= \alpha_1 \varphi_1 + \ldots + \alpha_r \varphi_r, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_s &= \lambda_1 \varphi_1 + \ldots + \lambda_r \varphi_r. \end{aligned}$$

Možno-li daným rovnicím vyhověti, musí patrně

$$\begin{aligned} a_{r+1} &= \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_r a_r, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_s &= \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_r a_r, \end{aligned} \tag{16}$$

aneb i, co je totéž, musí každý minor stupně $r + 1^{\text{ho}}$ soustav $a_{k1}, \ldots, a_{kn}, a_k$ vymizeti a to také stačí.

Nejsou-li tyto rovnice vyplněny, nelze učiniti zadost daným rovnicím (15), patrně si rovnice odporují. Jsou-li rovnice (16) vyplněny, tu můžeme $x_{r+1}, \ldots, x_s$ voliti libovolně, $x_1, \ldots, x_r$ obdržíme pak řešením prvních r rovnic (15) jakožto lineárné funkce oněch libovolných.

Mějme za druhé $s > n$. Utvořme minory n^{ho} stupně soustavy (A). Dejme tomu, že aspoň jeden z nich nevymizí. na př. $\delta = \Sigma \pm a_{11}\, a_{22} \ldots a_{nn}$. Pak stanoví prvních n rovnic (15) neznámé $x_1, \ldots, x_n$ úplně a vložíme-li tyto hodnoty do $n + 1^{\text{ní}}, \ldots, s^{\text{té}}$ rovnice (15), musí výsledek rovnati se nulle, má-li býti možné vyhověti všem rovnicím (15). Avšak označivše adjunkty elementů $e, e_1, \ldots, e_n$ determinantu

$$D = \begin{vmatrix} e & e_1 & e_2 & \ldots & e_n \\ a_1 & a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_2 & a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n & a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

literami $\delta, D_1, \ldots, D_n$ máme patrně řešením prvních n rovnic (15)

$$x_1 = \frac{D_1}{\delta}, \quad x_2 = \frac{D_2}{\delta}, \quad \ldots, \quad x_n = \frac{D_n}{\delta},$$

což vloženo do $n + k^{\text{té}}$ rovnice (15) dává požadavek

$$a_{n+k,1}\, D_1 + a_{n+k,2}\, D_2 + \ldots + a_{n+k}\,\delta = 0$$

t. j. má-li býti možná vyhověti všem rovnicím (15), musejí všecky minory $n + 1^{\text{ho}}$ stupně soustav vzaté z prvních n řádků a z kteréhokoli následujícího řádku soustav

(B) $\qquad a_{k1}, a_{k2}, \ldots, a_{kn}, a_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, s)$

vymizeti. To ale taky stačí, neb pak jsou soustavy $n + 1^{\text{ní}}, \ldots, s^{\text{tá}}$ složeny z prvních n soustav. Mimochodem řečeno, vymizí pak dle § II. všecky minory stupně $n + 1^{\text{ho}}$ soustav (B).

Dejme tomu, že vymizí všecky minory stupně n^{ho} soustav (A). Pak tvořme minory stupně $n—1^{\text{ho}}$ těchto soustav. Předpokládejme, že alespoň jeden nevymizí, na př. $\Sigma \pm a_{11}\, a_{22} \ldots a_{n-1,\,n-1}$. Pak lze*) výrazy $\varphi_n, \varphi_{n+1}, \ldots, \varphi_s$ lineárně složiti z výrazů $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$ a lze-li všem rovnicím (15) vyhověti, musejí se týmž způsobem skládati hodnoty $a_n, a_{n+1}, \ldots, a_s$ z hodnot $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$, a to také stačí. Pak ale musí vymizeti každý minor n^{ho} stupně soustav (B), a to opět stačí. V tomto případě

---

*) Touto cestou jsme se mohli bráti již v předcházejícím případě.

volíme x_n libovolně a stanovíme $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ z prvních $n-1$ rovnic (15) jakožto lineárné funkce x_n.

Kdyby vymizely všecky minory $n-1^{\text{ho}}$ stupně soustavy (A), ale jeden minor $n-2^{\text{ho}}$ stupně nevymizel, na př. $\Sigma \pm a_{11} a_{22} \ldots a_{n-1, n-2}$, tu patrné, kterak pokračovati. Má-li býti možno vyhověti všem rovnicím (15), musí vymizeti všecky minory $n-2^{\text{ho}}$ stupně soustavy (B). Hodnoty x_{n-1}, x_n volíme libovolně a $x_1, \ldots, x_{n-2}$ vypočteme z prvních $n-2$ rovnic (15); toť obecné řešení rovnic (15).

A obecně: *je-li minor soustav* (A) *nejvyššího stupně různý od nully stupně $n-r^{\text{ho}}$, tu musí, má-li system (15) míti řešení, vymizeti všecky minory soustav* (B), *které jsou vyššího stupně než $n-r$.* Pak stačí řešiti ony rovnice v počtu $n-r$, z nichž jsou vzaty řádky minoru, který nevymizel. Jest patrné, že se tu hodnoty x příslušné sloupcům onoho minoru objeví jakožto lineárné výrazy ostatních x, které lze libovolně zvoliti.

Eliminovati neznámé z daných rovnic, znamená odvoditi relace mezi koefficienty, které mají platnost, kdykoli lze všem daným rovnicím vyhověti. Jest tedy předcházejícími úvahami problem eliminace z lineárných rovnic úplně řešen. Máme-li na př. $n+1$ rovnici o n neznámých, musí, možno-li všem rovnicím vyhověti, determinant $n+1^{\text{ho}}$ stupně všech koefficientů rovnati se nulle. Rovná-li se tento determinant nulle, tu nemůžeme ještě tvrditi, že lze rovnicím vyhověti. Ovšem bychom tak tvrditi mohli, kdyby determinant z koefficientů $\Sigma \pm a_{11} \ldots a_{kn}$ nevymizel. Vymizí-li, tu nutno postupovati způsobem nahoře naznačeným, abychom shledali, zda-li lze rovnicím vyhověti čili nic.

Dle hořejší definice o eliminací nelze z n homogenních rovnic o n neznámých tyto eliminovati. Neboť není zapotřebí *žádné* relace mezi koefficienty, aby bylo lze rovnicím vyhověti; existuje totiž vždy alespoň řešení jedno, totiž $x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$. Mluví-li se však o eliminaci z homogenních rovnic, jest zvykem, pojímati pojem eliminace jinak než v obecném případě. Dle tohoto pojímání znamená: eliminovati $x_1, x_2, \ldots, x_n$ z lineárných homogenních rovnic tolik, jako odvoditi relace, jež musí platiti mezi koefficienty rovnic, kdykoli lze rovnicím vyhověti hodnotami $x_1, \ldots, x_n$, které nejsou naskrze nullami. Pak arci lze eliminovati n neznámých z n rovnic:

$$a_{k1} x_1 + \ldots + a_{kn} x_n = o. \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

Neboť má-li existovati řešení $x_1, \ldots, x_n$ a je-li na př. $x_j \gtrless 0$, obdržíme jako v §. III.

$$x_j \varDelta = 0,$$

značí-li $\varDelta$ determinant $\Sigma \pm a_{11} \ldots a_{nn}$. Poněvadž $x_j \gtrless 0$, musí $\varDelta = 0$ a toť výsledek eliminace.

Zde jest správné tvrzení, že při $\varDelta = 0$ lze vždy vyhověti daným rovnicím hodnotami x nerovnajícími se naskrze nulle, neboť dle § III. lze pak hodnotu alespoň jedné neznámé libovolně voliti.

§ VII. O počtu podstatně různých řešení lineárných rovnic homogenních.

Položme si otázku: Kolik podstatně různých systemů x vyhovuje n lineárným homogennním rovnicím o n neznámých

$$a_{k1} x_1 + a_{k2} x_2 + \ldots + a_{kn} x_n = 0. \qquad (k = 1, 2, \ldots n)$$

Utvořme determinant $\varDelta = \Sigma \pm a_{11} a_{22} \ldots a_{nn}$ a jeho minory a dejme tomu, že některý minor nejvyššího stupně, který nezmizí, jest stupně s^{ho}, na př.

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & x_{1s} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \\ a_{s1} & \ldots & x_{ss} \end{vmatrix} \gtrless 0.$$

Pak dle § III. obdržíme každé řešení daných rovnic ve tvaru

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_{11} x_{s+1} + \alpha_{12} x_{s+2} + \ldots + \alpha_{1,\, n-s} x_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_s &= \alpha_{s1} x_{s+1} + \alpha_{s2} x_{s+2} + \ldots + \alpha_{s,\, n-s} x_n, \end{aligned}$$

při čemž hodnoty $x_{s+1}, x_{s+2}, \ldots, x_n$ lze libovolně voliti. Napíšeme-li $n-s$ soustav o n elementech

$$(A) \qquad \begin{array}{l} \alpha_{11}, \ \alpha_{21}, \ \ldots \alpha_{s1}, \ 1, 0, \ldots 0, \\ \alpha_{12}, \ \alpha_{22}, \ \ldots \alpha_{s2}, \ 0, 1, \ldots 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{1,n-s}, \ \alpha_{2,n-s}, \ \ldots \alpha_{s,\, n-s}, \ 0, 0, \ldots 1, \end{array}$$

tu patrně soustava $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jest složena ze soustav těchto pomocí faktorů $x_{s+1}, x_{s+2}, \ldots, x_n$. Soustavy (A) jsou podstatně různé, neboť determinant $n-s^{\text{ho}}$ stupně

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = 1$$

jeť různý od nully; *lze tedy z nich utvořiti nanejvýše $n-s$ podstatně různých soustav* $x_1, \ldots, x_n$. *Tolik jich ale taky skutečně lze utvořiti* vůči okolnosti, že $x_{s+1}, \ldots, x_n$ jsou libovolné, že tedy tyto vždy lze tak voliti, aby determinant z $n-s$ soustav utvořeny $\Sigma \pm x_{s+1}^{(1)} x_{s+2}^{(2)} \ldots x_n^{(n-s)}$ nebyl nullou.

Ale i opak nalezené věty platí t. j.: *Vyhovuje-li daným rovnicím $n-s$ podstatně různých soustav x, pak musí vymizeti Δ i se všemi minory, jichž stupeň jest vyšší než s.* Neboť jakmile by některý nemizící nejvyšší minor byl stupně $\sigma > s$, tu bychom ihned soudili, že může existovati nanejvýše $n-\sigma$ podstatně různých řešení, kdežto jich dle supposice jest $n-s$, to jest více než $n-\sigma$.

V Praze, v prosinci 1884.

Důchod invalidní.

Napsal

Martin Pokorný.

(Pokračování.)

2. Vypočítání hodnoty i_{n+1} předpokládá tedy mimo známé veličiny p_n a s_n ještě A_n jakožto známé, kteroužto veličinu tedy bylo by též určiti.

Počínajíce si podobně jako při určování veličiny i_{n+1}, rozdělme rok opět v m dílů, a určeme postupujíce po $m$tinách roku vždy zbývající aktivní. Podle vzorce (2) jest pravděpodobnost, že osoba aktivní, žijící na konci $(x-1)$ní $m$tiny, přežije x-tou $m$tinu,

$$\frac{m - x + x \, . \, r_n}{m - x + 1 + (x-1) \, r_n},$$

či zavede-li se

$$1 - r_n = w_n,$$

také

$$\frac{m - x \, w_n}{m - (x-1) \, w_u}.$$

Z A_n aktivních $n$letých přežije tedy první $m$tinu roku