Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Arnošt Dittrich

Polní rovnice obou gravitačních vektorů

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 44 (1915), No. 1, 46--55

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122379

Symbolicky to můžeme psáti ve tvaru následujícím:

$$D_k = \prod_{n=0}^{k} \{[a + (k - 2n)\, c]^2 - (2k + 1 - 2n)^2\, b^2\}$$

Ku konci dlužno podotknouti, že způsobem, kterým jsme dospěli ku vyčíslení determinantu D_k, bychom mohli dospěti ku vyčíslení determinantů složitějších, které by se rovnaly též součinu lineárných faktorů. To by bylo v tom případě, kdybychom prvky a, b, c determinantu D_k považovali opět za quadratické matice stejného typu a téhož typu jako quadratické matice determinantu D_k. Výraz pa má ten význam, že všecky prvky matice a jsou násobeny číslem p. Úvahy naše by pak byly zcela analogické úvahám, které jsme provedli v článku: „O zvláštních determinantech , uveřejněném v XLII. ročníku tohoto časopisu (p. 534).

Polní rovnice obou gravitačních vektorů.

Prof. Dr. **Arnošt Dittrich** v Třeboni.

Označení. Na okraji rovnic připojím stenografický zápis jejich myšlenkového obsahu v symbolech vektorového kalkulu. V pozdějším textu se pak rovnice onou vektoriellní poznámkou citují. Aby differentiální rovnice nezaujímaly mnoho místa, označíme derivace indexy. Důsledně budiž

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Vektorové složky se pak arci indexy označovati nesmí. Proto stanovím: Vektor x má složky X, Y, Z; vektor l má složky L, M, N; vektor A bude míti složky a, b, c; vektor a složky A, B, C atd.

Klassická mechanika o gravitačním poli. Hustota hmoty budiž

$$\varrho \; \frac{g}{cm^3}.$$

Značíme intensitu gravitačního pole jako vektor x, kde

$$|\, x \,| \; \frac{cm}{sec^2}$$

dle rozměru svého jest urychlením. Gravitační konstanta *)

$$\varkappa = 66{\cdot}9 \,.\, 10^{-9} \frac{cm^3}{g\, sec^2}\,.$$

Užijeme důsledně soustavy *cm-g-sec*.

Klassická mechanika činí o gravitačním poli dvě sdělení:

I. Vektor gravitační jest gradientem, jest to vektor nevířící:

$$\begin{array}{l} Z_y - Y_z = 0 \\ X_z - Z_x = 0 \\ Y_x - X_y = 0 \end{array} \qquad curl\, x = 0.$$

II. Divergence jeho jest úměrná hustotě

$$X_x + Y_y + Z_z = -4\pi\varkappa\varrho \qquad div\, x = -4\pi\varkappa\varrho.$$

Hustota ve vakuu jest rovna nulle.

Podrobme nejdříve tyto dvě myšlenky nutné kritice. Věta prvá jest tak jistá jako princip o zachování energie, pokud isothermní pole v čase se nemění. Kdyby práce získaná proběhnutím uzavřené křivky statického pole nerovnala se vždy nulle, sestrojili bychom snadno gravitační perpetuum mobile, gravitační motor**). — Jinak jest s větou druhou. Ta obsahuje jen negativní sdělení, že vektor gravitační nezachovává kontinuitu, vyjadřuje v mathematické formě, že o jeho divergenci nic nevíme. Rovnice ta vlastně hustotu definuje. Můžeme proto bez obavy považovati rovnice

$$curl\, x = 0\,; \quad div\, x = -4\pi\varkappa\varrho$$

za polní rovnice *statického pole gravitačního*. Když ale přejdeme k polím časově proměnlivým, třeba upustiti od myšlenky, že vektor jest gradient, ale relaci divergenční lze podržeti, poněvadž jest definicí.

První serie polních rovnic. Protože divergenční vztah

$$div\, x = -4\pi\varkappa\varrho,$$

---

*) Strouhal, „Mechanika", vyd. 2. z r. 1910, str. 274.

**) Viz článek: Snahy Komenského o „perpetuum mobile" v tomto časopise, ročník XLII. z r. 1913, str. 560. — Tam je pseudo-gravitační motor podrobně vyložen.

užijeme k definici hustoty i v poli časově proměnlivém, *smí se* relace tato *derivovati* dle *času,* čím dostaneme, že

$$div\ x_t = -4\pi\varkappa\varrho_t.$$

Z této rovnice samotné nelze však nic vyvoditi, poněvadž neobsahuje žádnou přírodopisnou myšlenku. Proto přibereme zákon zachování hmoty

$$(\varrho u)_x + (\varrho v)_y + (\varrho w)_z = -\varrho_t, \qquad div\ \varrho\, U = -\varrho_t$$

kde vektor U jest rychlostí v bodě x, y, z v čas t. Hustota v tom bodě a čase jest ϱ.

Eliminujme z obou divergenčních relací ϱ_t a obdržíme, že

$$div\ (x_t - 4\pi\varkappa\varrho\, U) = 0.$$

Tím dokázáno, že vektor

$$x_t - 4\pi\varkappa\varrho\, U$$

zachovává kontinuitu, že víří. Myšlenku tu lze vyjádřiti*) třemi rovnicemi:

$$\begin{aligned} X_t - 4\pi\varkappa\varrho\, u &= N_y - M_z, \\ Y_t - 4\pi\varkappa\varrho\, v &= L_z - N_x, \\ Z_t - 4\pi\varkappa\varrho\, w &= M_x - L_y, \end{aligned} \qquad x_t - 4\pi\varkappa\varrho\, U = curl\, l$$

do nichž vstupuje nový vektor l. Tím jest první serie rovnic nalezena. Nazveme je „gravitačními" v užším slova smyslu, poněvadž se vztahují na časový vzrost vektoru x.

Existence tří dalších rovnic. Specialisujeme-li nám již známé i ještě neznámé rovnice pro případ statický, dostaneme tím rovnice, mezi nimiž musí býti obsaženy relace statického pole, známé z klassické mechaniky

$$curl\ x = 0.$$

Tuto podmínku nelze však dostati z prvé serie polních rovnic tím, že vektor l ztotožníme s vektorem gravitačním, čím by prvá serie rovnic dostala tvar:

$$x_t - 4\pi\varkappa\varrho\, U = C\ curl\ x,$$

kde konstanta úměrnosti C smí se považovati za funkci času. Neboť statickým v polních rovnicích jest také každé rozdělení

*) Viz článeček: „Vliv principu relativnosti na formu rovnic vektorového pole". V tomto časopise, ročník XL. z r. 1911, str. 585.

rychlostí a hustoty na čase nezávislé. Pro stacionární rozdělení rychlostí redukují se horní rovnice na podmínku:

$$-4\pi\varkappa\varrho\, U = C\, curl\, x.$$

Pak by ale vektor gravitační x uvnitř hmoty opravdu víříl. Tu by se síly gravitační uvnitř hmoty nedaly derivovati z potenciálu, a částice obíhající stationárně na uzavřené křivce konala neb absorbovala by práci na útraty gravitační energie. Tu by se — po případě obrácením pohybu — dalo skombinovati perpetuum mobile!

Je tedy tak jisto jako princip zachování energie, že existují ještě aspoň tři další rovnice, jež specialisovány pro statické pole dají podmínku

$$curl\, x = 0.$$

Tím jest zároveň zajištěna samostatnost a nezávislost vektoru l na vektoru gravitačním x v témž smyslu, v němž magnetický vektor jest nezávislý na elektrickém. Pak musí ale existovati tři polní rovnice obsahující časové vzrosty vektoru l. Poněvadž je nám již dosti těžko věřiti v existenci šesti gravitačních rovnic, zkusíme, zda nelze rovnice pro l_t považovati za totožné s těmi, z nichž se v případě statickém vyspecialisuje podmínka, že síly gravitační neviří. Kdo by na to chtěl přistoupiti, projevuje tím, že věří v existenci devíti na sobě nezávislých rovnic gravitačních. Tolik odvahy nemám.

Druhá serie rovnic. Každý vektor L lze rozložiti v čisté víření a gradient:

$$L = curl\, A + grad\, P,$$

kde

$$div\, A = 0.$$

Skalára P určí se z relace

$$div\, L = div\, (grad\, P),$$

což jest rovnocenné s podmínkou:

$$\varDelta P = div\, L.$$

Vektor A určí se z podmínky

$$curl\, L = curl\, (curl\, A),$$

což jest rovnocenné s relacemi:

$$-\varDelta A = curl\, L.$$

Známe-li z vektoru jen curl, jako na př. z vektoru l, nelze určiti aditivní jeho gradient, poněvadž neznáme divergenci. Proto klademe v dalších počtech

$$l = curl\ A$$

bez aditivního gradientu, čím řečeno, že

$$div\ l = 0.$$

Myslím, že vektor

$$L = l + grad\ P$$

vůbec asi (zpravidla?) zachovává kontinuitu. Neboť místa, z nichž diverguje nějaký vektor, vždy velice intensivně se vnucují pozornosti. Na př. hmota, do níž se vpíjejí silokřivky gravitační. Magnet objevili pozorovatelé necvičení, elektřinu Řekyně a Indiáni*), kdežto v existenci vektoru světelného dlouho nevěřili mnozí fysikové, poněvadž vektor, jenž zachovává kontinuitu, stává se tím *nenápadným*. Další úvahy jsou však na mínění, že vektor L zachovává kontinuitu, nezávislé a zůstávají správnými, ať nám experimentální objevy budoucí udělí o divergenci vektoru L jakékoliv poučení.

Vraťme se k rovnici

$$div\ l = 0,$$

jež vyjadřuje, že o gradient k vektoru tomu náležející prozatím nedbáme. Pak jest také

$$div\ l_t = 0,$$

což jest rovnocenné s relacemi

$$\begin{aligned} L_t &= C_y - B_z, \\ M_t &= A_z - C_x, \\ N_t &= B_x - A_y. \end{aligned} \qquad l_t = curl\ a$$

To jsou však ony tři relace druhé serie, jichž existence plyne ze samostatnosti vektoru l vůči vektoru x.

K bližšímu určení vektoru a užijeme, že rovnice ty specialisovány pro stav statický dají

$$curl\ a = 0,$$

*) Humbold viděl na březích Orinoka, jak si indiánské děti hrají s fundamentálním pokusem elektrostatiky. Třeli velká plochá semena, aby přitahovala vlákna bavlněná.

což má býti rovnocenné s podmínkou

$$curl\ x = 0.$$

Druhá serie rovnic zní tedy

$$l_t = k\ .\ curl\ x,$$

kde k smí se prozatím považovati za funkci času.

Gravitační vlny ve vakuu. O jich existenci není pochybnosti. Točí-li se trojosý elipsoid kol malé osy, kýve-li kyvadlo, krouží-li planeta . . . mění se periodicky rozložení gravitačních silokřivek v prostoru. Změny ty zajisté stálou, byť i velmi značnou rychlostí šíří se ven, do prostoru. Rychlost ta musí býti veliká vůči rychlosti planet kol slunce. Jinak by bylo nevysvětlitelno, jak astronomie dobyla svých úspěchů při popisu *pohybu* těles nebeských pomocí *statických* rovnic gravitačního pole.

Těchto dle dnešního stavu fysiky samozřejmých myšlenek užijeme k poslednímu vybroušení druhé serie, k stanovení hodnoty k. Pro vakuum jest

$$x_t = curl\ l,$$
$$l_t = k\ .\ curl\ x.$$

Eliminujme vektor l a dostaneme rovnice pro vlny gravitační ve vakuu

$$x_{tt} = -k\ .\ \Delta x.$$

To jsou známé rovnice vibrační; nyní se nám podstata hodnoty k objasnila. Nezávisí na čase, což ostatně lze vyvoditi též z okolnosti, že čas je homogenní, že jeden jeho okamžik jest rovnocenný s druhým. Jest pak

$$-k = c^2,$$

kde c jest rychlostí, jíž se gravitační poruchy šíří prostorem.

Přehled polních rovnic. Dospěli jsme k čtyřem rovnicím gravitačním prvé serie

$$\begin{aligned} X_t - 4\pi\varkappa\varrho\, u &= N_y - M_z, \\ Y_t - 4\pi\varkappa\varrho\, v &= L_z - N_x, \\ Z_t - 4\pi\varkappa\varrho\, w &= M_x - L_y, \\ -4\pi\varkappa\varrho &= X_x + Y_y + Z_z, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_t - 4\pi\varkappa\varrho\, U &= curl\ l \\ -4\pi\varkappa\varrho &= div\ x \end{aligned}$$

a k čtyřem rovnicím druhé serie

$$
\begin{aligned}
L^t &= -c^2(Z_y - Y_z), \\
M_t &= -c^2(X_z - Z_x), \qquad & l_t &= -c^2\, curl\, x \\
N_t &= -c^2(Y_x - X_y), \qquad & 0 &= div\, l. \\
0 &= L_x + M_y + N_z.
\end{aligned}
$$

Zasáhnutí principu relativnosti. Rovnice gravitační jsou v nápadné analogii k oněm rovnicím Maxwellovým, které užívá theorie elektronů. Z tohoto souhlasu ve *formě* plyne důležitý závěr *věcný*. Zjevy gravitační vyhovují principu relativnosti jako zjevy optické, jen že úlohu rychlosti světla převzala rychlost gravitačních poruchů.

Dosud zdržoval jsem se narážek na nový princip, abych pro své názory získal i ty, kteří princip zavrhují. Ale nyní se cesty naše dělí. Důvěřuji nové relativistické fysice, její nové nauce o prostoru a čase a podložím ji dalším úvahám. Je z toho značný prospěch.

I. *Rychlost gravitačních poruchů.* Dle principu relativnosti není možno, aby v optických rovnicích vyskytovala se jiná rychlost než v gravitačních. Proto jest rychlost gravitačních poruchů totožná s rychlostí světla

$$c = 3\,.\,10^{10} \frac{cm}{sec}.$$

Podařilo se mi vztah ten numericky ověřiti pomocí gravitační konstanty a jiného měření, k jinému účelu pořízenému. Uveřejním to v aplikaci své theorie na zeměkouli.

II. *Samostatnost l-vektoru.* První serie rovnic gravitačních jest tak jistá jako zákon zachování hmoty. Můžeme se tedy na ni klidně spolehnouti. Prohlížíme-li však tyto rovnice se stanoviska principu relativnosti, vidíme, že funkce X, Y, Z, L, M, N jsou složkami tak zv. šestérečného vektoru*) jehož komponenty jsou arci na sobě nezávislé v témž smyslu, v němž složka X jest nezávislá na Y nebo Z.

III. *Proč se objevuje curl x v druhé serii rovnic.* Kdyby tam nebyl, doplnil by se nám vektor l dalším vektorem p na šestérečný. Ale statické rovnice

$$curl\, x = 0$$

*) Viz Lane „Das Relativitätsprincip“ r. 1911, str. 64.

nutně žádají obdobného doplnění, pomocí l se to stát nesmí — dle chvilkového předpokladu — tak by se to v nejpříznivějším případě stalo vektorem p. Měli bychom tedy aspoň 9 polních rovnic s 3 na sobě nezávislými vektory. Principia non sunt multiplicanda praeter necessitatem. Spokojím se s nutným minimem, s 6 rovnicemi pro 2 vektory, dokud nebude experimentálních důvodů pro rozšíření theorie.

Ostatně žádá existence gravitačních vln přímo neodvratně existenci nového vektoru l, jenž jest fysikální realitou, ne snad jen útvarem mathematickým. Vždyť každé vlnění zakládá se na rythmických přeměnách dvojí energie, na př. elektrické a magnetické neb elastické a kinetické, či kinetické a gravitační, neb — ve vakuu — gravitační a energii l-vektoru. Ostatně udám brzo strojní pomůcky k realisaci polí nového vektoru. Vtipný čtenář je vyčte tak snadno jako já z prvé serie rovnic.

Vracím se ještě jednou k analogii polních rovnic, s rovnicemi Maxwellovými. Tato objasnila se nám společným vztahem obojích polních rovnic k principu relativnosti. Tím však nechci říci, že otázka této analogie jest touto poznámkou již vyčerpána.

Princip zachování energie. Vyviňme z relací

$$x_t - 4\pi\varkappa\varrho\, U = curl\ l$$

$$\frac{l_t}{c^2} = -\, curl\ x$$

součet skalárních součinů

$$(x x_t) + \frac{1}{c^2}(l\, l_t) - 4\pi\varkappa\varrho\,(x U) = x\ curl\ l - l\ curl\ x.$$

Pak jest pravá strana

$$x\ curl\ l - l\ curl\ x = div\ [xl],$$

kde vektor $[x\, l]$ má složky

$$ZM - YN,$$
$$XN - ZL,$$
$$YL - XM.$$

Je tedy celkem

$$\frac{1}{2}\,|\,x\,|_t^2 + \frac{1}{2c^2}\,|\,l\,|_t^2 - 4\pi\varkappa\varrho\,(xU) = div\ [xl].$$

V tomto výraze má člen obsahující (xU) jednoduchý názorný význam. Násobíme-li zmíněný skalární součin elementem hmoty

$$dm = \varrho d\tau,$$

obdržíme

$$\varrho d\tau\,(xU) = dm\,(Xu + Yv + Zw).$$

Násobíme-li výsledek ještě elementem času dt, představuje součin

$$dm\,(xU)\,dt = dm\,(Xdx + Ydy + Zdz)$$

práci získanou na útraty gravitačních sil v čase dt posuvem hmoty dm o element Udt. Intensitu pracovní, práci za jednotku času uvolněnou, vypočteme nyní z energetické relace a dostaneme

$$dm\,(xU) = \left(\frac{|x|^2}{8\pi\varkappa} + \frac{|l|^2}{8\pi\varkappa c^2}\right)_t d\tau - d\tau\,\frac{div\,[xl]}{4\pi\varkappa}.$$

Tím jest řečeno, že za 1 sec:

Práce získaná = klesnutí gravitační energie + energie do elementu objemového stěnami vstoupivší.

Označíme-li gravitační energii objemové jednotky W, jest

$$-\frac{\partial W}{\partial t} = \left(\frac{|x|^2}{8\pi\varkappa} + \frac{|l|^2}{8\pi\varkappa c^2}\right)_t,$$

z čeho integrací

$$W = C - \frac{|x|^2}{8\pi\varkappa} - \frac{|l|^2}{8\pi\varkappa c^2}.$$

Proudění gravitační energie reguluje vektor $[xl]:4\pi\varkappa$.

Ryze gravitační na l-vektoru nezávislý díl polní energie

$$C - \frac{|x|^2}{8\pi\varkappa}$$

znal již r. 1865 Maxwell. Věděl také, že konstanta C musí býti kladná a větší než

$$\frac{|x'|^2}{8\pi\varkappa},$$

kde $|x'|$ jest největší hodnota gravitačního vektoru, jež se vůbec někde v prostoru vyskytá, mají-li se stejnojmenné hmoty vždy přitahovati*). Tím je totiž řečeno, že úhrnná polní energie dvou

---

*) Ve velké Teubnerově encyklopaedii mathematiky Zenneckův článek o gravitaci, str. 53. a 65.

oddálených hmot roste. Malým rozborem lze se však přesvědčiti, že díl na silách závislý oddálením hmot klesá. Má-li rozdíl

$$C - |G|$$

klesnutím hodnoty $|G|$ růsti, musí C býti kladné a neustále větší než $|G|$.

Levitace. Veličina C jest kosmická konstanta, jež charakterisuje prostor. Lze pro ni určiti spodní hranici. Má konečnou hodnotu. Kdyby měla nekonečnou, sídlilo by v krychlovém *cm* vakua nekonečné množství energie, vůči němuž by mírné její změny tíží mizely; pak by se tíže stala nepochopitelnou.

Tíží na energii krychlové jednotky valně působiti nemůžeme. Což ale, kdybychom nalezli prostředky k realisaci libovolně silných polí l-vektoru? V takovém poli by se konec konců polní energie W stala zápornou, poněvadž záporný stále rostoucí podíl od l-vektoru jednou převáží konstantu C. Kdybych v takovém poli dvě hmoty od sebe oddálil, klesne tím ryze gravitační podíl energie $|G|$, čím sice celková energie nyní záporná roste. Neboť — 1000 jest menší než — 5. Ale nyní jest W záporné. Pak máme pole takového rázu, jako jest elektrické, pole, v němž oddálením hmot energie klesá. V takovém poli se stejnojmenné hmoty odpuzují. Šťastného experimentátora, jenž by poprvé naplnil pokoj dosti intensivními silokřivkami l-vektoru, třeba si tedy představiti přiraženého ke stropu se vším náčiním, jež není zrovna přibito neb přišroubováno.

Tím končím první sdělení o svých studiích gravitačních.

Z prakse — pro praksi.

Napsal Dr. **Josef Štěpánek**, profesor v Praze-VII.

Jest známá zkušenost každého učitele fysiky, že pokusy fysikální i sebe jednodušší, mají-li se dokonale zdařiti, vyžadují každý určité přípravy a že často malá změna v úpravě obvyklé učiní pokus tu názornějším, tu dokonalejším, jindy zase přesnějším, jindy jednodušším. Zvláště pak při pokusech nových, dříve neprováděných jest třeba delšího zkoušení a mnohých změn, než najde učitel vhodné přístroje a takovou úpravu pokusu, aby