Ladislav Klír
Příspěvek ke geometrii trojúhelníku

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 44 (1915), No. 1, 89--93

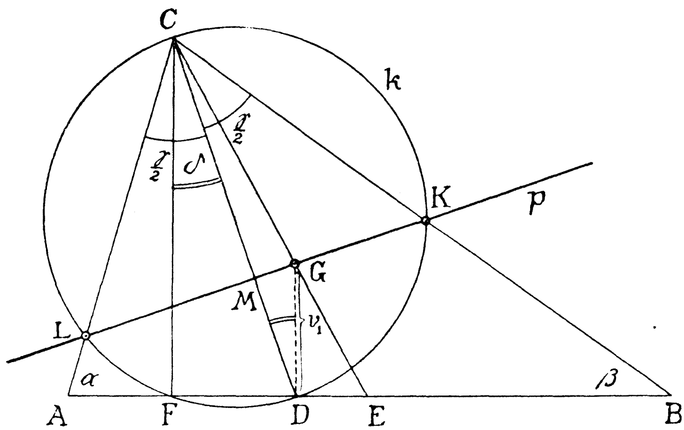
Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122380

Příspěvek ke geometrii trojúhelníku.

Podává **Ladislav Klír.**

Mějme dán trojúhelník ABC (obr. 1.) o úhlech α, β, γ a stranách a, b, c; sestrojme ve vrcholu C symetrálu $\overline{CD} = s$ úhlu γ, těžnici $\overline{CE} = t$ a výšku $\overline{CF} = v$.

Vztyčíme-li v bodě D kolmici na základnu $\overline{AB}$, protne těžnici t v bodě G, z něhož spuštěná kolmice p na symetrálu s protne strany trojúhelníka a, b v bodech K, L, které leží na kružnici k, opsané nad $\overline{CD} = s$ jako nad průměrem.



Obr. 1.

Toto lze jinak vysloviti: Průsečíky K, L kružnice k (nad průměrem CD sestrojené) s rameny a, b a průsečík G těžnice t_C s kolmicí v bodě D k základně vztyčené leží v jedné přímce p.

K důkazu postačí ukázat, že délka $\overline{DG} = v_1$ vyjádřena z pravoúhlého trojúhelníku EDG je rovna délce $\overline{DG}$ vypočtené pomocí vztahů vzniklých kružnicí k, čili, že bod G je průsečíkem tří přímek, totiž: $\overline{CE}, \overline{DG}$ a $\overline{KL}$.

Označme $\overline{AD} = d$ v trojúhelníku ADC a vyjádřeme onu stranu pomocí věty sinusové

$$d = \frac{b \sin \frac{\gamma}{2}}{\sin\left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right)}.$$

Podobně
$$s = \frac{b \sin \alpha}{\sin\left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right)}.$$

Dále označme

$$\sphericalangle DCF = \sphericalangle CDG = \delta = \alpha + \frac{\gamma}{2} - 90.$$

Určeme délku v_1 předem závisle na kružnici k.

$$v_1 = \frac{\overline{MD}}{\cos \delta},$$

avšak

$$\overline{MD} = s - \overline{MC},$$

kde
$$\overline{MC} = CL \cos \frac{\gamma}{2} = s \cos^2 \frac{\gamma}{2},$$

$$MD = s\left(1 - \cos^2 \frac{\gamma}{2}\right) = s \sin^2 \frac{\gamma}{2}.$$

Tedy
$$v_1 = \frac{b \sin \alpha \sin^2 \frac{\gamma}{2}}{\sin\left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right) \cos\left(\alpha + \frac{\gamma}{2} - 90\right)},$$

upravením
$$v_1 = b \sin \alpha \frac{\sin^2 \frac{\gamma}{2}}{\sin^2\left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right)}. \tag{1}$$

Nyní vyjadřme tutéž délku $\overline{DG} = v_1$ nezávisle na kružnici k. Z podobnosti trojúhelníků EFC a EDG plyne úměrnost stran, tedy

$$v_1 : v = DE : FE = \left(\frac{c}{2} - \frac{b \sin \frac{\gamma}{2}}{\sin\left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right)}\right) : \left(\frac{c}{2} - b \cos \alpha\right).$$

Ježto

$$c = \frac{b \sin \gamma}{\sin (\alpha + \gamma)}, \quad v = b \sin \alpha,$$

plyne

$$v_1 = b \sin \alpha \frac{\dfrac{b \sin \gamma}{2 \sin (\alpha + \gamma)} - \dfrac{b \sin \dfrac{\gamma}{2}}{\sin \left(\alpha + \dfrac{\gamma}{2}\right)}}{\dfrac{b \sin \gamma}{2 \sin (\alpha + \gamma)} - b \cos \alpha} = b \sin \alpha \,.\, V. \quad (2)$$

Avšak složený tento zlomek, jejž jsme označili V, dá se upraviti na zlomek rovnice (1).

Kraťme b, a úhel γ nahraďme polovičním $\frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma}{2}$.

I jest po snadné úpravě

$$V = \frac{\sin^2 \frac{\gamma}{2} \left(\sin \alpha \sin \frac{\gamma}{2} - \cos \alpha \cos \frac{\gamma}{2}\right)}{\sin \left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right) \left[(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2} + \sin \alpha \cos \alpha \left(\sin^2 \frac{\gamma}{2} - \cos^2 \frac{\gamma}{2}\right)\right]}.$$

Výraz ve jmenovateli v hranaté závorce jest roven

$$- \cos \left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right) . \sin \left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right);$$

dosazením

$$V = \frac{\sin^2 \frac{\gamma}{2} \left[- \cos \left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right)\right]}{\sin \left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right) \sin \left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right) \left[- \cos \left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right)\right]},$$

čili

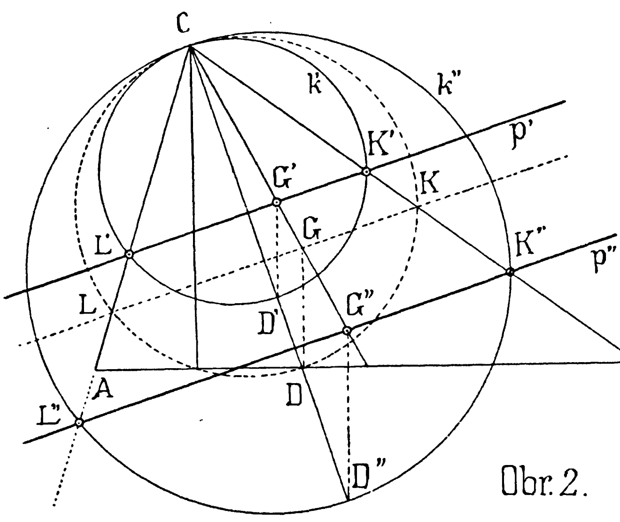
$$V = \frac{\sin^2 \frac{\gamma}{2}}{\sin^2 \left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right)},$$

což dosazeno do (2) rov. dává

$$v_1 = b \sin \alpha \frac{\sin^2 \frac{\gamma}{2}}{\sin^2 \left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right)}$$

úplně shodné s (1).

Tím je dokázáno, že spojnice p průsečíků K, L kružnice k s rameny trojúhelníka jde průsečíkem G těžnice s kolmicí v bodě D na základnu vztyčenou.



Obr. 2.

Přímka p a kružnice k jsou vzájemně vázány. Kružnice k prochází pěti body: vrcholem C, patou F výšky v_C, průsečíkem D symetrály s_C se stranou a a pak body K, L, jež na ramenech vytíná přímka p jdoucí bodem G_1 (průsečíkem těžnice s kolmicí na základnu jdoucí bodem D) a jsoucí kolmou na symetrálu s_C.

Naopak přímka p jde třemi body: průsečíky K, L ramen trojúhelníka s kružnicí k, která je opsaná nad délkou symetrály jako nad průměrem a bodem G, průsečíkem těžnice s kolmicí na základnu jdoucí bodem D.

Na základě homothetie (střed homothetie vrchol C) ovšem každá kružnice k' mající střed na symetrále a jdoucí vrcholem C má též vlastnost, že protíná ramena trojúhelníka v bodech K', L', které jsou zároveň průsečíky přímky p' kolmé k symetrále a jdoucí bodem G', jenž jest průsečíkem těžnice a přímky s výškou rovnoběžné procházející bodem D', koncovým to bodem průměru CD'. (Viz obr. 2.)

Samozřejmě totéž platí i pro jiné vrcholy.

Vzájemného vztahu přímky p a kružnice k lze použíti k sestrojení trojúhelníka, dána-li výška v, symetrála s a těžnice t (všechny z téhož vrcholu vycházející). Sestrojení patrno z obr. 1.

Rozmanitosti.

Podává **Václav Hübner**, školní rada na Král. Vinohradech.

Rovnice hyperboly vzhledem k asymptotám jako osám souřadnic jest — jak známo —

$$xy = \frac{e^2}{4}.$$

Tečna Tm v bodě $m(x_1, y_1)$ na hyperbole má rovnici

$$y - y_1 = \frac{dy_1}{dx_1}(x - x_1).$$

Z rovnice hyperboly obdržíme:

$$xdy + ydx = 0$$

a tudíž

$$\frac{dy_1}{dx_1} = -\frac{y_1}{x_1},$$

pročež

$$y - y_1 = -\frac{y_1}{x_1}(x - x_1),$$

jinak

$$yx_1 + y_1 x - 2x_1 y_1 = 0.$$

Úseky tečny na asymptotách (os souřadnic) jsou: $2x_1$, $2y_1$. Plocha trojúhelníku omezeného tečnou a asymptotami jest

$$\triangle = \frac{2x_1 \, . \, 2y_1}{2} \, . \, sin\, \omega,$$