František Josef Studnička

Geometrické upotřebení některých pouček o determinantechGeometric application of some theorems on determinants. [II.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 2 (1873), No. 4, 236--239

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122498`

Spojením rovnice (6) a (7) obdržíme konečně:

$$\delta = 2\varphi.$$

Bez ohledu k poloze osy otáčení rovná se tedy úhel měřený dvojnásobnému úhlu, o nějž se zrcádko otočilo. Nestálost ideálné roviny odrazu nemá tudíž na velikost měřených úhlů pražádného vlivu.

Větu poslední dokázal prof. Wastler v Hradci Štýrském roku 1864 *)

Geometrické upotřebení některých pouček o determinantech.

(Podává Dr. *F. J. Studnička.*)

(Pokračování.)

O transformaci souřadnic prostorových. **)

Vedeme-li daným bodem v prostoru roviny kolmo na jednotlivé osy pravoúhlé soustavy souřadnicové, bude poloha jeho určena úseky x, y, z na těchto osách rovinami spůsobených.

Chceme-li tedy přejíti k nové soustavě pravoúhlé se společným bodem počátečním, veďme tímtéž bodem roviny kolmo na nové osy souřadnicové, načež obdržíme co nové souřadnice úseky ξ, η. ζ. Úloha o transformaci souřadnic bude pak řešena pro tento případ, dovedeme-li ξ, η, ζ vyjádřiti pomocí x, y, z a naopak.

Uzavírá-li kolmice s počátečního bodu soustavy na rovinu nějakou vedená a délku δ mající s jednotlivými osami úhly α, β, γ, jest rovnice této roviny

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - \delta = 0.$$

Podlé toho platí, značí-li krátce α_k, β_k, γ_k kosinusy úhlů, jež uzávírá původní osa některá s příslušnou novou, pro nové souřadnice vzorce

$$\begin{aligned} \xi &= \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z, \\ \eta &= \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z, \qquad (1) \\ \zeta &= \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z, \end{aligned}$$

---

*) Viz: „Friedrich Hartner, Handbuch der niedern Geodaesie, Wien 1872.“

**) Viz *Studnička* „O determinantech“ pag. 40.

při čemž musí koöfficienty, jelikož nové osy stojí kolmo na sobě, vyhoviti zvláštním podmínkám

$$\begin{aligned} \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2 &= 0, \\ \alpha_2 \alpha_3 + \beta_2 \beta_3 + \gamma_2 \gamma_3 &= 0, \\ \alpha_3 \alpha_1 + \beta_3 \beta_1 + \gamma_3 \gamma_1 &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

a vedlé toho ještě všeobecnějším podmínkám

$$\begin{aligned} \alpha_2^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 &= 1, \\ \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 &= 1, \\ \alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2 &= 1. \end{aligned} \tag{3}$$

Abychom řešili opačnou úlohu a vyjádřii x, y, z pomocí nových souřadnic ξ, η, ζ, nutno soustavu (1) podlé těchto neznámých řešiti; obdrží se tu, značí-li

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1 \\ \alpha_2, & \beta_2, & \gamma_2 \\ \alpha_3, & \beta_3, & \gamma_3 \end{vmatrix} \tag{4}$$

a zavede-li se nejkratší označení subdeterminantů,

$$\begin{aligned} x\Delta &= (\beta_2 \gamma_3)\xi + (\beta_3 \gamma_1)\eta + (\beta_1 \gamma_2)\zeta, \\ y\Delta &= (\gamma_2 \alpha_3)\xi + (\gamma_3 \alpha_1)\eta + (\gamma_1 \alpha_2)\zeta, \\ z\Delta &= (\alpha_2 \beta_3)\xi + (\alpha_3 \beta_1)\eta + (\alpha_1 \beta_2)\zeta. \end{aligned} \tag{5}$$

Abychom ustanovili hodnotu determinantu Δ a jeho subdeterminantů, spojme první vzorec soustavy (3) s prvním a třetím soustavy (2), čímž obdržíme tři rovnice

$$\begin{aligned} \alpha_1 \alpha_1 + \beta_1 \beta_1 + \gamma_1 \gamma_1 &= 1, \\ \alpha_2 \alpha_1 + \beta_2 \beta_1 + \gamma_2 \beta_1 &= 0, \\ \alpha_3 \alpha_1 + \beta_3 \beta_1 + \gamma_3 \gamma_1 &= 0, \end{aligned}$$

z nichž jde řešením, použijeme-li stejného označení,

$$\begin{aligned} \alpha_1 \Delta &= (\beta_2 \gamma_3), \\ \beta_1 \Delta &= (\gamma_2 \alpha_3), \\ \gamma_1 \Delta &= (\alpha_2 \beta_3). \end{aligned}$$

A podobným spůsobem bychom obdrželi dále

$$\begin{aligned} \alpha_2 \Delta &= (\beta_3 \gamma_1), & \alpha_3 \Delta &= (\beta_1 \gamma_2), \\ \beta_2 \Delta &= (\gamma_3 \alpha_1), & \beta_3 \Delta &= (\gamma_1 \alpha_2), \\ \gamma_2 \Delta &= (\alpha_3 \beta_1), & \gamma_3 \Delta &= (\alpha_1 \beta_2). \end{aligned}$$

Dosadíme-li tedy tyto hodnoty subdeterminantů do soustavy (5) a zkrátíme-li Δ, obdržíme konečně

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 \xi + \alpha_2 \eta + \alpha_3 \zeta, \\ y &= \beta_1 \xi + \beta_2 \eta + \beta_3 \zeta, \\ z &= \gamma_1 \xi + \gamma_2 \eta + \gamma_3 \zeta, \end{aligned} \tag{6}$$

čímž druhá úloha naše, vyjádřiti původní souřadnice novými, jest řešena.

Při tom možná ještě snadno určiti některé podmínky, jimž tyto koëfficienty jsou též podrobeny.

Znásobíme-li rovnice

$$\begin{aligned} \alpha_1 \Delta &= (\beta_2 \gamma_3), \\ \alpha_2 \Delta &= (\beta_3 \gamma_1), \\ \alpha_3 \Delta &= (\beta_1 \gamma_2), \end{aligned} \tag{7}$$

jak po sobě jdou, veličina α_1, α_2, α_3 a sečteme-li je, obdržíme, zřetel majíce k významu determinantu Δ, především

$$(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)\Delta = \alpha_1 (\beta_2 \gamma_3) + \alpha_2 (\beta_3 \gamma_1) + \alpha_3 (\beta_1 \gamma_2) = \Delta,$$

a tudíž, zkrátíme-li,

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$$

ku kteréžto podmínce stejným spůsobem se druží

$$\begin{aligned} \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 &= 1, \\ \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 &= 1; \end{aligned} \tag{8}$$

znásobíme-li však tytéž rovnice (7), jak po sobě jdou, veličinami β_1, β_2, β_3, obdržíme, poněvadž se na pravé straně vyskytne determinant s dvěma stejnými sloupci,

$$(\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3)\Delta = \beta_1 (\beta_2 \gamma_3) + \beta_2 (\beta_3 \gamma_1) + \beta_3 (\beta_1 \gamma_2) = 0,$$

z čehož jde, zkrátíme-li,

$$\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3 = 0,$$

k čemuž podobným spůsobem se druží ještě podmínky

$$\begin{aligned} \beta_1 \gamma_1 + \beta_2 \gamma_2 + \beta_3 \gamma_3 &= 0, \\ \gamma_1 \alpha_1 + \gamma_2 \alpha_2 + \gamma_3 \alpha_3 &= 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Pomocí podmínek v soustavě (8) a (9) obsažených možná konečně i hodnotu determinantu Δ ustanoviti; uvedeme-li totiž rovnici (7) na druhou mocnost a sečteme-li, obdržíme především

$$(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)\,\Delta^2 = (\beta_2 \gamma_3)^2 + (\beta_3 \gamma_1)^2 + (\beta_1 \gamma_2)^2,$$

a vyjadříme-li pravou stranu podlé známého pravidla rozdílem

$$(\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2)(\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2) - (\beta_1 \gamma_1 + \beta_2 \gamma_2 + \beta_3 \gamma_3)^2$$

a užijeme-li příslušných podmínek soustavy (8) a (9), konečně

$$\Delta^2 = 1 \text{ neb } \Delta = \pm 1 \tag{10}$$

což obsahuje poučku i od jinud známou,*) že *modulus orthogonální substituce rovná se* ± 1.

Jaké znamení se tu má zvoliti, o tom rozhoduje směr, jakým se od původní soustavy přechází k nové; jestli točivý

*) Viz *Studnička* „O determinantech" pag. 88.

pohyb, kterým se jednotlivé osy uvádějí z původní polohy do nové, u všech stejného smyslu, *svorný*, platí znamení svrchní (+), v opačném případě spodní (—).

Zvolíme-li tedy směr nových os tak, že

$$\Delta = +1,$$

obdržíme konečně z podmínek soustavy (7) a podobných ještě

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (\beta_2\gamma_3),\ \alpha_2 = (\beta_3\gamma_1),\ \alpha_3 = (\beta_1\gamma_2), \\ \beta_1 &= (\gamma_2\alpha_3),\ \beta_2 = (\gamma_3\alpha_1),\ \beta_3 = (\gamma_1\alpha_2), \\ \gamma_1 &= (\alpha_2\beta_3),\ \gamma_2 = (\alpha_3\beta_1),\ \gamma_3 = (\alpha_1\beta_2). \end{aligned} \tag{11}$$

Spojíme-li tedy všechny tyto výsledky, poznáme snadno, že *devět koefficientů, vyskytujících se při orthogonální substituci neb při této transformaci pravoúhlých souřadnic musí vyhoviti dvaadvaceti podmínkám* a sice soustavám (2), (3), (8) a (9) po třech, vzorci (10) jednu a soustavě (11) devět podmínek obsahující.

Podmínky (11) konečně souvisí ještě s jinou poučkou o determinantech; obdržímeť pomocí jich

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1, \beta_1, \gamma_1 \\ \alpha_2, \beta_2, \gamma_2 \\ \alpha_3, \beta_3, \gamma_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (\beta_2\gamma_3), (\gamma_2\alpha_3), (\alpha_2\beta_3) \\ (\beta_3\gamma_1), (\gamma_3\alpha_1), (\alpha_3\beta_1) \\ (\beta_1\gamma_2), (\gamma_1\alpha_2), (\alpha_1\beta_2) \end{vmatrix},$$

kdež poslední determinant, sestaven jsa ze subdeterminantů soustavy předcházející, sluje determinantem *přidruženým* a co takový rovná se *druhé* mocnině *) determinantu původního, z čehož jde

$$\Delta = \Delta^2 \text{ neb } \Delta = 1,$$

jak původně bylo za základ položeno.

O normálách určitého druhu křivek.

(Od *Al. Strnada*.)

Následující řádky mají za účel odvození věty o normálách křivek vytvořených na základě stálé délky neb stálého úhlu.

1. Předpokládejme přímku stálé délky, pohybující se tím spůsobem, že konečné body její *a*, *b* opisují křivky K_a, K_b v rovině

---

*) V rovině možná podobnou cestu nastoupiti, nejedná-li se o čas.