Dodatek. Provedených několik příkladů stačí zajisté úplně k poznání způsobu řešení; odporučuji čtenáři, aby sám se pokusil o sestavení a řešení některých úloh maximo-minimálních. Nechť uvažuje na př. rozmanitá tělesa (kužel, válec, jehlany a hranoly atd.) do koule vepsaná nebo kouli opsaná, jež mají největší (nejmenší) možný obsah nebo největší (nejmenší) možný povrch; rovněž jsou zajímavé otázky, týkající se trojúhelníku určeného dvěma částmi, jehož obvod nebo obsah nebo některá část má býti co možná největší; totéž pro čtyřúhelník určený čtyřmi částmi atd.

Předkládám čtenáři mimo to k řešení tyto tři poněkud složitější příklady, jichž správné a úplné řešení vyžaduje vedle znalosti pouček o differencování také trochu obratnosti a trpělivosti:

1. Z okna ležícího v metrů nad ulicí pozoruji chodce výšky l *m*, jenž kráčí ulicí ve vzdálenosti d *m* od domu (a s domem rovnoběžně). V kterém místě jeví se mi chodec v úhlu největším?

Upozorňuji, že dle volby čísel v, l, d mohou nastati při řešení různé případy.

2. Bodem m ležícím ve vodorovné rovině vedené středem koule o poloměru r jest položiti rovinu, po níž by těleso, padajíc z bodu m, dospělo k povrchu koule v době co nejkratší (vzdálenost bodu m od středu $d < r$). Jest provésti geometrickou konstrukci této roviny.

3. Do rovnoramenného trojúhelníku o dané základně a výšce jest vepsati ellipsu, jejíž jedna osa by ležela v ose trojúhelníku a jejíž obsah by byl maximální. Zvláštní případ: trojúhelník rovnostranný.

Poznámka redakce. Z usnesení výboru J. Č. M. vypisuje se na nejlepší řešení těchto tří úloh zvláštní cena: 1 výtisk Weyrova **Differenciálního počtu.**

Tečny dvou kruhů.

(P. **Rajmund Fišer.**)

Obsahem pojednání tohoto jest jednak kriterium, kdy jsou souřadnice všech osmi styčných bodů společných tečen dvou kruhů vyjádřeny čísly racionálnými, jednak návod rovnici takových dvou kruhů sestaviti.

Jsou-li dány kruhy $K_1(p_1, q_1, r_1)$ a $K_2(p_2, q_2, r_2)$ — kde je vyjádřeno všech šest souřadnic čísly racionálnými — najdeme rovnici tečen způsobem tímto:

Přímka $p \equiv x \cos\varphi + y \sin\varphi - t = o$ jest tečnou daného kruhu, když vzdálenost její od středu kružnice se rovná (absolutně) poloměru. Je-li přímka p tečnou dvou kružnic, obdržíme rovnice:

$$p_1 \cos\varphi + q_1 \sin\varphi - t = \pm r_1, \tag{1}$$
$$p_2 \cos\varphi + q_2 \sin\varphi - t = \pm r_2. \tag{2}$$

Je-li daná přímka vnější tečnou obou kružnic, musí státi v pravo stejná znaménka, buď positivní, neb negativní. Chtíce stanoviti rovnici vnějších tečen, musíme vypočítati veličiny: $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ a t, při čemž řešiti jest tento systém rovnic:

$$p_1 \cos\varphi + q_1 \sin\varphi - t = r_1, \tag{3}$$
$$p_2 \cos\varphi + q_2 \sin\varphi - t = r_2, \tag{4}$$
$$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1. \tag{5}$$

Vyloučivše z těchto rovnic veličiny t a $\sin\varphi$, zjednáme si rovnici:

$$[(p_1 - p_2)^2 + (q_1 - q_2)^2] \cos^2\varphi - 2(p_1 - p_2)(r_1 - r_2)\cos\varphi + [(r_1 - r_2)^2 - (q_1 - q_2)^2] = 0. \tag{6}$$

Mají-li souřadnice bodů styčných býti vyjádřeny čísly racionálnými, musí míti touž vlastnost veličiny $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ a t. Z rovnice (6) možno vypočísti $\cos\varphi$; racionálnou hodnotu obdržíme, když je diskriminanta D rovnice (6) úplný čtverec.

$$D = 4(p_1 - p_2)^2 (r_1 - r_2)^2 - 4[(p_1 - p_2)^2 + (q_1 - q_2)^2] \cdot [(r_1 - r_2)^2 - (q_1 - q_2)^2]. \tag{7}$$

$$D = 4(q_1 - q_2)^2 \cdot [(p_1 - p_2)^2 + (q_1 - q_2)^2 - (r_1 - r_2)^2]. \tag{8}$$

Při vnějších tečnách jsou vyjádřeny souřadnice všech čtyř styčných bodů, když je dle rovnice (8) výraz

$$(p_1 - p_2)^2 + (q_1 - q_2)^2 - (r_1 - r_2)^2 \tag{9}$$

úplným čtvercem.

Podobné kriterium obdržíme při vnitřních tečnách. Přímka $p \equiv x \cos\varphi + y \sin\varphi - t = 0$ jest vnitřní tečnou obou kružnic, když v jedné z obou rovnic (1), (2) stojí v pravo znaménko positivní, v druhé negativní. Majíce tedy stanoviti rovnici vnitřních tečen, musíme řešiti systém rovnic.

$$p_1 \cos\varphi + q_1 \sin\varphi - t = r_1, \tag{10}$$
$$p_2 \cos\varphi + q_2 \sin\varphi - t = -r_2, \tag{11}$$
$$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1. \tag{12}$$

Vyloučivše z těchto rovnic t a $\sin\varphi$, obdržíme

$$[(p_1 - p_2)^2 + (q_1 - q_2)^2] \cos^2\varphi - 2(p_1 - p_2)(r_1 + r_2)\cos\varphi + \\ + [(r_1 + r_2)^2 - (q_1 - q_2)^2] = 0. \tag{13}$$

Mají-li býti souřadnice všech čtyř styčných bodů vyjádřeny čísly racionálnými, musí býti diskriminanta D rovnice (13) úplným čtvercem:

$$D = 4(q_1 - q_2)^2 . [(p_1 - p_2)^2 + (q_1 - q_2)^2 - (r_1 + r_2)^2]. \tag{14}$$

Jak viděti, dostačí už podmínka, když trinom

$$(p_1 - p_2)^2 + (q_1 - q_2)^2 - (r_1 + r_2)^2 \tag{15}$$

jest úplným čtvercem.

Mají-li souřadnice všech osmi bodů styčných býti čísla racionálná, musí platiti současně podmínky (9) a (15). Chtíce stanoviti rovnice takových dvou kruhů, užijme vztahu:

$$a^2 + b^2 = \left[\frac{(u^2 - v^2)\,a + 2uvb}{u^2 + v^2}\right]^2 + \left[\frac{(u^2 - v^2)\,b - 2uva}{u^2 + v^2}\right]^2. \tag{16}$$

Dosadíme-li do této rovnice za a rozdíl $p_1 - p_2$ a za b rozdíl $q_1 - q_2$, obdržíme:

$$(p_1 - p_2)^2 + (q_1 - q_2)^2 = \left[\frac{(u^2 - v^2)(p_1 - p_2) + 2uv(q_1 - q_2)}{u^2 + v^2}\right]^2 \\ + \left[\frac{(u^2 - v^2)(q_1 - q_2) - 2uv(p_1 - p_2)}{u^2 + v^2}\right]^2. \tag{17}$$

Další postup lze snadno sledovati na příkladě zvláštním. Dosadíce do rovnice (17) jednou za $u^2 - v^2$ číslo 3, za $2uv$ pak 4, po druhé za $u^2 - v^2$ číslo 5 a za $2uv$ číslo 12, obdržíme rovnice:

$$(p_1 - p_2)^2 + (q_1 - q_2)^2 = \left[\frac{3(p_1 - p_2) + 4(q_1 - q_2)}{5}\right]^2 + \\ + \left[\frac{3(q_1 - q_2) - 4(p_1 - p_2)}{5}\right]^2, \tag{18}$$

$$(p_1 - p_2)^2 + (q_1 - q_2)^2 = \left[\frac{5(p_1 - p_2) + 12(q_1 - q_2)}{13}\right]^2 \\ + \left[\frac{5(q_1 - q_2) - 12(p_1 - p_2)}{13}\right]^3. \tag{19}$$

Učiňme:

$$r_1 + r_2 = \frac{3(p_1 - p_2) + 4(q_1 - q_2)}{5} =$$
$$= \frac{39(p_1 - p_2) + 52(q_1 - q_2)}{65}. \qquad (20)$$
$$r_1 - r_2 = \frac{5(p_1 - p_2) + 12(q_1 - q_2)}{13} =$$
$$= \frac{25(p_1 - p_2) + 60(q_1 - q_2)}{65}. \qquad (21)$$

Z rovnic těchto jest:

$$r_1 = \frac{32(p_1 - p_2) + 56(q_1 - q_2)}{65}, \qquad (22)$$
$$r_2 = \frac{7(p_1 - p_2) - 4(q_1 - q_2)}{65}. \qquad (23)$$

Z rovnic těchto obdržíme pro libovolné hodnoty rozdílů $p_1 - p_2$ a $q_1 - q_2$ poloměry kružnic r_1 a r_2. Mají-li všechny veličiny vyjádřeny býti čísly celistvými, nutno řešiti soustavu rovnic.

$$32(p_1 - p_2) + 56(q_1 - q_2) - 65r_1 = 0, \qquad (24)$$
$$7(p_1 - p_2) - 4(q_1 - q_2) - 65r_2 = 0. \qquad (25)$$

Vyloučíme-li z rovnic těchto rozdíl $q_1 - q_2$, obdržíme:

$$r_1 = 2(p_1 - p_2) - 14r_2, \qquad 4(q_1 - q_2) = 7(p_1 - p_2) - 65r_2. \qquad (26)$$

Dosadíme-li do těchto rovnic

$$p_1 - p_2 = 3 + 4u \quad \text{a} \quad r_2 = 1 + 4v,$$

obdržíme tyto hodnoty

$$p_1 - p_2 = 3 + 4u, \qquad r_1 = -8 + 8u - 56v,$$
$$q_1 - q_2 = -11 + 7u - 65v, \quad r_2 = 1 + 4v. \qquad (27)$$

Dosadíme-li v rovnicích (26) za $p_1 - p_2 = 2 + 4u$, $r_2 = 2 + 4v$, obdržíme:

$$p_1 - p_2 = 2 + 4u, \qquad r_1 = -24 + 8u - 56v,$$
$$q_1 - q_2 = -29 + 7u - 65v, \quad r_2 = 2 + 4v. \qquad (28)$$

Volíce v rovnicích (27) a (28) za u, a, v libovolná čísla celistvá, obdržíme dvě kružnice, při nichž souřadnice všech osmi styčných bodů jsou vyjádřeny čísly racionálnými. Obdržíme-li za r_1 a r_2 čísla negativní, volíme za poloměry hodnoty absolutní, což je vzhledem k výrazům (9) a (15) dovoleno. Dosadíce v rovnicích (28) za $u = -3$, $v = -1$, obdržíme, $p_1 - p_2 = -10$, $q_1 - q_2 = 15$, $r_1 = 8$, $r_2 = 2$; těmto podmínkám vyhovují ku př. kružnice $K_1(-6, 7, 8)$ a $K_2(4, -8, 2)$.

Rychleji dojdeme cíle, použijeme-li vzorce

$$(ab + cd)^2 + (ac - bd)^2 = (ab - cd)^2 + (ac + bd)^2. \quad (29)$$

Dle tohoto vztahu obdržíme ku př. rovnici

$$7^2 + 9^2 = 3^2 + 11^2.$$

Volíme-li

$$p_1 - p_2 = 7, \quad q_1 - q_2 = 9, \quad r_1 - r_2 = 3, \quad r_1 + r_2 = 11,$$

jsou obě podmínky (9) a (15) splněny a kružnice, jež oběma podmínkám vyhovují jsou ku př. $K_1(4, 4, 7)$, $K_2(-3, -5, 4)$.

V rovnici $7^2 + 9^2 = 3^2 + 11^2$ možno též voliti $p_1 - p_2 = 7$, $q_1 - q_2 = 9$, $r_1 - r_2 = 3$, $r_1 + r_2 = 9$, při čemž jsou též obě podmínky (9) a (15) splněny; vzhledem k tomu obdržíme kružnice $K_1(4, 4, 6)$, $K_2(-3, -5, 3)$. Učiníme-li ve výraze (15)

$$(r_1 + r_2)^2 = (p_1 - p_2)^2 + (q_1 - q_2)^2$$

splynou obě vnitřní tečny v jednu; mají-li býti v tomto případě všechny souřadnice obou kružnic vyjádřeny čísly celistvými, musí $p_1 - p_2$, $q_1 - q_2$, $r_1 + r_2$ býti čísla pythagorejská, ku př. $p_1 - p_2 = 5$, $q_1 - q_2 = 12$, $r_1 + r_2 = 13$. Je-li $r_1 - r_2 = 5$, obdržíme kružnice $K_1(3, -6, 9)$ a $K_2(-2, 6, 4)$. Je-li ve výraze (15) $(r_1 + r_2)^2 > (p_1 - p_2)^2 + (q_1 \;\; q_2)^2$, jsou vnitřní tečny nemožny; mají-li souřadnice styčných bodů vnějších tečen býti čísla racionálná, musí býti vyhověno podmínce (9). K tomu účelu volme dva libovolné čtverce, ku př. $2^2 + 7^2$, a učiňme $r_1 - r_2 = 2$; zvolíme-li $r_1 + r_2 = 8$, jsou vnitřní tečny nemožny. Takové dvě kružnice jsou: $K_1(3, 5, 3)$ a $K_2(1, -2, 5)$.

Nejsnadnějším způsobem lze obdržeti všech osm styčných bodů s racionálně vyjádřenými souřadnicemi, když zvolíme součet dvou libovolných čtverců ku př. $3^2 + 9^2$ a učiníme $p_1 - p_2 = \pm 3$, $q_1 - q_2 = \pm 9$, $r_1 - r_2 = 3$, $r_1 - r_2 = 9$; v tomto případě jsou podmínky vyjádřené v (9) a (15) splněny. Obě kružnice mají však tu vlastnost, že jednak poloměr jedné je vzhledem k poloměru druhé kružnice příliš malým, jednak že obě kružnice se blízko sebe nacházejí.

Ku konci buďtež uvedeny některé úlohy:

K_1	a K_2	K_1	a K_2
(7, 3, 6)	(— 3, — 2, 4)	(7, 3, 8)	(— 3, — 2, 3)
(6, 4, 5)	(— 5, — 3, 6)	(8, 4, 6)	(— 5, 3, 5)
(3, 3, 4)	(— 5, 2, 3)	(6, 2, 5)	(— 5, — 1, 2)
(3, — 2, 6)	(— 7, — 7, 4)	(6, 7, 8)	(— 7, 1, 5)
(— 3, 2, 3)	(2, — 3, 4)	(— 5, 3, 7)	(2, — 6, 4)
(4, — 7, 7)	(— 7, 0, 6)	(3, 6, 9)	(— 2, — 6, 4)
(1, — 6, 4)	(4, — 1, 3)	(1, 6, 5)	(— 1, — 2, 3).

O elektrickém výboji ve zředěných plynech.

Studujícím středních škol napsal **M. Otta**, gym. professor na Kr. Vinohradech.

Při výkladech školských lze pozorovati, že v nadpise uvedený oddíl z nauky o elektřině se žákům velice zamlouvá, tak že tito jeví značný zájem pro úkazy, které při elektrickém výboji nastávají. Poněvadž pak kniha učebná obsahuje velmi málo o zjevech těchto, odhodlal jsem se napsati tyto řádky a doufám, že budou vlídně přijaty těmi, jimž jsou určeny.

Indukované proudy, vedeme-li je ze sekundární cívky velkého induktoria Ruhmkorffova ke dvěma konduktorům, které ve vzduchu jsou postaveny isolovaně, objeví se výbojem elektrickým mezi oběma svodiči. Výboj ten podobá se disruptivnímu výboji, který možno pozorovati při pokusech influenční elektrikou Wimshurstovou. Liší se však od něho tím, že jest mohutnější a skvělejší a po případě i doskoku značnějšího, což snadno nahlédneme, povážíme-li, že vyrovnávají se tu větší množství elektrická a rozdíl potenciálu jest větší než při výbojích obyčejné influenční elektriky. Tvar takového výboje upomíná silně na blesk, s nímž jest téže podstaty.

Podoba výboje toho však se valně pozmění, vybíjí-li se indukované proudy prostorem naplněným zředěným plynem, čili jak krátce říkáme, prostorem zředěným. Prostor takový můžeme si zjednati tím, že přitavíme ke rtuťové vývěvě válcovitou trubici nebo kulovitou nádobu skleněnou, v níž plyn obsažený postupně zřeďujeme. Trubice takové mají tvar různý a skládají se v podstatě z nádob skleněných, do kterých jsou zataveny dva