Avšak $b$ můžeme stanoviti ještě spůsobem jiným, dáno-li $s$, a úhly $\alpha$, $\beta$, $\gamma$.

Užijeme-li věty sinusové, máme:

$$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma,$$

t. j.

$$(a + b + c) : (\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma) = b : \sin\beta;$$

z toho

$$(\varepsilon') \qquad b = \frac{s \sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}.$$

Srovnáním vzorců $(\varepsilon)$ a $(\varepsilon')$ plyne

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma} = \frac{\sin\frac{\beta}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2}},$$

t. j.

$$(6) \qquad \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.$$

Relaci $(\varepsilon)$ mohli bychom i jiným spůsobem odůvodniti, a sice použitím známého rozboru planimetrického, dle něhož řešíme nejprvé trojúhelník o straně $s$ a přilehlých úhlech $\frac{\alpha}{2}$ a $\frac{\beta}{2}$. Dle sinusové věty ustanovíme velikost strany proti úhlu $\frac{\beta}{2}$; strana $b$ pak jest ramenem rovnoramenného trojúhelníka, jehož základna jest právě vypočtěná strana, a úhel při základně $\frac{\alpha}{2}$. Tímto spůsobem obdržíme též vzorec $(\varepsilon)$.

---

# Ukázky z Diofanta.

Žákům středních škol podává

**Fr. Hromádko,**
professor v Praze.

Nauka o neurčitých rovnicích slove též neurčitá analytika. První její počátky vyskytují se zároveň u dvou současníků, u indického hvězdáře Ariobathy a řeckého mathematika Diofanta, žijícího v Alexandrii okolo r. 360 po Kristu.

Jako Euklid v geometrii proslavil se Diofantus v algebraickém počtářství a to hlavně v oboru rovnic. Napsal dílo: „*ἀριθμητικῶν βιβλία ιγ*“, t. j. arithmetických (věcí, kusů) kněh 13, z nichž jenom šest se nám zachovalo.*) Dílo to jest vlastně sbírka úloh s připojeným jejich řešením, celkem 208 úloh. První kniha jich obsahuje 43, druhá 36, třetí 24, čtvrtá 46, pátá 33 a šestá 26. Poslední tato kniha má úlohy o trojúhelníku pravoúhlém, avšak jen o výpočet stran tu běží, nikoliv úhlů a tím méně o sestrojování trojúhelníků.

Úlohy Diofantovy jsou dvojího druhu, *určité a neurčité.* Neznámou veličinu nazývá Diofantos slovem *ἀρίθμος* (číslo) a označuje ji řeckou literou *s* jak na konci slov se píše, tedy: *ς*. Jest to jediná litera, která v řecké abecedě číselného určitého významu nemá a s naším $x$ co do významu úplně souhlasí.

Naše mocniny neznámého $x$ jmenuje Diofantus stručně takto:

$$x^2 = dynamos,\quad x^3 = kybos,\quad x^4 = dynamo\text{-}dynamos,$$
$$x^5 = dynamo\text{-}kybos \text{ atd.}$$

Převratné jejich hodnoty označuje též zvláštními názvy:

$$\frac{1}{x} = arithmoston,\quad \frac{1}{x^2} = dynamoston,\quad \frac{1}{x^3} = kyboston \text{ atd.}$$

Jednotlivé členy rovnice nazývá eidos (*εἶδος*) v lat. překladu „species“, odkud se odvozuje název: „arithmetica speciosa.“

Mezi první a druhou knihou jeho spisu jeví se patrná *mezera*, ve které dle domněnky naší by patřilo řešení rovnic kvadratických smíšených o jedné neznámé a pak rovnic neurčitých stupně prvého. Neurčité rovnice stupně druhého a vyšších stupňů vyskytují se v ostatních knihách po různu mezi úlohami určitými roztroušené.

Řecký mnich Maximus Planudes, který žil r. 1350 po Kr., sestavil z řeckých básníků jistý druh anthologie, ve které se

---

*) **Obsah těchto šesti kněh jest v jednom rukopise rozdělen na sedm kněh.**

nachází též asi 40 epigrammat, obsahujících početní úlohy (rovnice) v podobě hádánek a mezi nimi jest též epigram na Diofanta, obsahující téměř všecko, co o jeho životních poměrech celkem víme. Zní v překladě takto:

„Zde hrob ten Diofanta kryje oh, velký div tu!
Počtářským uměním jeho věk ten náhrobek hlásá.
Šestý života díl určil mu Bůh býti chlapcem,
Dvanáctý ještě přidav, stáda mu popřál pásti.
V sedmém oddílu na to v manželský stav vstoupil
A v pátém po sňatku roce synka milého choval.
Avšak ubohý syn ten polovici jen otcova věku dosáhl,
Když Hades nelitostný života nít mu přeťal,
Čtyři ještě roky ránu tu otec vědou konejšil
Než umřel. Jak dlouhého věku dožil se?“

Dříve než Řekové, zabývali se Diofantem Arabové. Zejména to byl Muhamed Abul Wufa (zemř. 998 po Kr.), který přeložil Diofantovu počtářskou knihu do arabštiny. Avšak překlad ten se ztratil.

První, ovšem jen kusý překlad Diofanta v latinské řeči, uveřejnil W. Xylander r. 1575, prof. v Heidelberku. První vydání textu s latinským překladem, četnými poznámkami a výkladem podal Bachet de Méziriac, francouzský učenec, který připojil k němu zároveň řešení neurčitých rovnic podoby: $ax + by = c$ celými čísly.

Úlohy, které na rovnici tuto vycházejí, slovou obyčejně diofantické, ačkoli v Diofantově díle ani jedna taková se nenachází.

Nové vydání Bachetovo uveřejnil Fermat (1670). Německé vydání Diofantova spisu vyšlo kuse přeloženo od Poselgera roku 1818 (čísla polygonalná), později od O. Schulze r. 1822, Nesselmanna „die Algebra der Griechen“ 1842, posledně od G. Wertheima 1890 v Lipsku.

Nejnovější vydání původního textu s latinským překladem uveřejnil Paulus Tannery r. 1893 bibl. Teub.

Aby studující čtenář o rovnicích Diofantových nabyl pravý obrázek, podávám tuto v překladě věrném (první tři úlohy doslovně), *20* úloh z *první* a *10* z *druhé* knihy řečeného spisu*),

*) Dle vydání P. Tannerya. Lipsiae 1893.

podotýkaje, že ostatních kněh úlohy, čím dál tım složitější, na ukázku podati hodlám podruhé jindy.

Řešení úloh I. (od 4—20) jest podáno dle *nynějšího* způsobu *všeobecně*. Rovněž z knihy *druhé:* od (1—7), ale od (8—11) dle původního znění.

## Z knihy I.

1. Předložené číslo rozložiti *) ve dvě čísla s daným nadbytkem (rozdílem).

Řešení. Budiž dané číslo $= 100$, nadbytek jednoho nade druhé $= 40$. Vyhledati obě čísla.

Polož menší číslo $= x$, pak bude větší $x + 40$, obě dohromady činí $2x + 40$ a dávají číslo $= 100$, t. j. $100 = 2x + 40$.

Rovné od rovného. Odejmu-li od sta 40 a od $2x + 40$ také tolik, zbude (stejně) t. j. $60 = 2x$, pročež $x = 30$.

K položkám (se vraťme). Menší číslo bude 30 a větší 70.

Důkaz zřejmý.

2. Předložené číslo jest rozložiti ve dvě čísla v poměru daném.

Nuže polož, že třeba 60 by bylo rozložiti ve dvě čísla v poměru $1 : 3$. Postav za menší číslo $x$, pak bude větší $3x$, neboť větší jest trojnásobek menšího. Obě dvě čísla dohromady musí se rovnati 60, pročež $4x = 60$ a $x = 15$ menší a 45 větší.

3. Předložené číslo rozložiti ve dvě čísla v daném poměru i nadbytku.

Dejme tomu, že by bylo 80 rozložiti ve dvě čísla tak, aby větší z nich bylo trojnásob a ještě o 4 jednotky větší než menší číslo.

Postavme menší číslo $x$, tedy větší $3x + 4$ a součet obou

$$4x + 4 = 80.$$

Rovné od rovného odejmu, i zbude:

$$4x = 76 \quad \text{a} \quad x = 19.$$

Zpět k položkám. Bude tedy menší číslo 19 a větší 61.

---

*) Doslovně „rozebrati“ a tak veskrz dále.

4. Vyhledati dvě čísla jsoucí v daném poměru (5 : 1), by také jejich rozdíl (20) byl dán.

Řešení dle nynějšího způsobu: $x = 5y$ a $x - y = 20$ čili $4y = 20$ a $y = 5$ a $x = 25$.

5. Určité číslo (100) rozložiti ve dvě čísla tak, aby součet určitých zlomků těchto čísel se rovnal danému číslu (30).

Řešení. Dejme tomu, že jest rozložiti 100 ve dvě čísla $x + y$ tak, aby $\frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 30$, z čehož jde $x = 75$ a $y = 25$.

6. Určité číslo rozložiti ve dvě čísla tak, aby prvního čísla daný díl byl o dané číslo větší než druhého čísla daný díl.

Řešení vede na rovnice

$$x + y = a \tag{1}$$

a

$$\frac{x}{m} - \frac{y}{n} = b \tag{2}$$

$(a = 100, \quad b = 20, \quad m = 4, \quad n = 6), \quad x = 88, \quad y = 12.$

7. Od téhož čísla (neznámého) odečísti dvě daná čísla a učiniti zbytky ty k sobě v poměru daném.

Řešení. Dejme tomu, že od téhož čísla odečteme jednou 100 a po druhé 20 a že větší zbytek máme učiniti třikráte větší než jest zbytek menší.

Vede na rovnici: $3(x - 100) = x - 20$, ze které $x = 140$.

8. Dvěma daným číslům přidati totéž jakési číslo třetí a učiniti, aby vzniklé součty byly k sobě v poměru daném.

Řešení. Vede na rovnici

$$\frac{a + x}{b + x} = m \quad \text{u Diofanta} \quad \left.\begin{aligned} a &= 100 \\ b &= 20 \\ m &= 3 \end{aligned}\right\} x = 20.$$

9. Ode dvou daných čísel ubrati totéž číslo, aby zbytky byly k sobě v poměru daném (6).

Řešení. Dána buďtež čísla 20 a 100, $20 - x$ jest menší než zbytek $100 - x$ a dle úlohy: $\frac{100 - x}{20 - x} = 6$, z čehož $x = 4$.

10. Dvěma daným číslům (20 a 100), menšímu přidati a většímu ubrati totéž číslo ($x$) a učiniti, aby vzniklý součet ku zbytku byl v poměru daném $= 4$.

Řešení. Vede na rovnici $\frac{20 + x}{100 - x} = 4$, ze které $x = 76$.

11. Dvě čísla jsou dána. Jedno z nich jest přidati, druhé pak ubrati témuž číslu třetímu ($x$), aby výsledky byly k sobě v poměru daném.

Řešení. Vede na rovnici

$$\frac{x + a}{x - b} = c, \quad \left.\begin{aligned} a &= 20, \\ b &= 100, \\ c &= 3, \end{aligned}\right\} x = 160.$$

12. Určité číslo rozebrati ve dvě čísla dvakrát a to tak, aby jedno číslo z prvního rozběru k jednomu číslu z druhého rozběru bylo v poměru daném a druhé z druhého rozběru číslo k druhému z prvého rozběru bylo též v poměru daném.

Řešení. Dle našeho označení vede úloha tato na rovnice:

$$a = x + y = x_1 + y_1 = 100,$$

$$\frac{x}{x_1} = m = 2; \quad \frac{y_1}{y} = n = 3,$$

z nichž snadno obdržíme:

$$x = 80, \quad y = 20 \quad \text{a} \quad x_1 = 40, \quad y_1 = 60.$$

13. Určité číslo rozebrati ve dvě čísla třikrát, aby jedna část z rozběru prvního k jedné části rozběru druhého měla daný poměr; druhá část z druhého rozkladu vyšlá byla k části z třetího rozkladu v poměru daném a konečně ostatní část z třetího rozběru k druhé části z prvého rozběru by byla také v poměru daném.

Řešení. Dle nynějšího označení. Budiž určité číslo $= a = 100$, i jest dle požadavku úlohy

$$a = x_1 + y_1 = x_2 + y_2 = x_3 + y_3 = 100,$$

$$\frac{x_1}{y_2} = 3; \quad \frac{x_2}{y_3} = 2; \quad \frac{x_3}{y_1} = 4;$$

pročež:

$$a = 2y_2 + y_1 = 2y_3 + y_2 = 4y_1 + y_3,$$
$$3a = 3y_2 + 3y_3 + 5y_1 \text{ atd.}$$
$$x_1 = 84; \quad x_2 = 72; \quad x_3 = 64$$
$$y_1 = 16 \quad y_2 = 28 \quad y_3 = 36$$

14. Vyhledati dvě čísla, by jejich součin byl k součtu obou v určitém poměru.

Řešení. Dle našeho způsobu úloha tato vyznačena jest rovnicí: $\frac{xy}{x+y} = m$ a jest neurčitá. V původním znění jest $m = 3$ a jedno z hledaných čísel na př. $y > 3$. Diofantus klade libovolně $y = 12$, pak úloha se stává určitou totiž

$$\frac{12x}{x+12} = 3, \text{ z čehož } x = 4.$$

15. Nalézti dvě čísla taková, aby každé z nich, přijmouc od druhého určité množství jednotek (číslo), bylo ke zbytku pozůstalému z druhého čísla v určitém poměru.

Řešení. Úlohu tu lze vyjádřiti všeobecně takto:

$$\frac{x+a}{y-a} = m \qquad (1).$$
$$\frac{y+b}{x-b} = n \qquad (2).$$

U Diofanta jest $a = 30$, $b = 50$; $m = 2$ a $n = 3$, pročež

$$x = 98 \text{ a } y = 94.$$

16. Nalézti tři čísla toho druhu, aby po dvou spolu sečtená tvořila určitá čísla (součty.)

Řešení. Ze soustavy rovnic:

$$x + y = a = 20, \; x + z = b = 30 \text{ a } y + z = c = 40$$

snadno lze vypočítati $x = 5$, $y = 15$, $z = 25$.

Všeobecně: $z = s - a$ atd. kde

$$s = \frac{a+b+c}{2} = 45.$$

(Dokončení.)